Geometrie und Algebra: Konstruieren mit Zirkel und Lineal 1/3

Die Beschränkung auf die Werkzeuge Zirkel und Lineal dient nicht praktischen Zwecken sondern sie ist eine intellektuelle, „echt“ mathematische Herausforderung. Sie steht in griechischer Tradition seit mindestens 2300 Jahren.
Obwohl man Geometrie auf einem leeren Zeichenblatt treiben kann, ist es für die hier angestrebte Verbindung mit der Algebra, die letztlich auch tiefsinnige Beweise für die Unlösbarkeit einiger griechische Probleme liefert, sinnvoll, sich ein Koordinatensystem vorzustellen. Zunächst braucht es nur Punkte mit ganzzahligen Koordinaten zu geben.
Es gibt also ein Lineal ohne irgendwelche Markierungen und einen Zirkel.
Neue Punkte dürfen ausschließlich durch die folgenden **Grundhandlungen** entstehen.

Grundhandlung 1: Durch zwei Punkte darf mit dem Lineal eine Gerade gezeichnet werden.
Grundhandlung 2: Den Abstand zweier Punkte darf man als Radius für den Zirkel abgreifen.
Grundhandlung 3: Um einen Punkt darf man einen Kreis mit einem solchen Raduis schlagen.
Grundhandlung 4: Als neue Punkte darf man nur Schnittpunkte nehmen:
Schnitte von Gerade mit Gerade, Gerade mit Kreis, Kreis mit Kreis

Alle Koordinaten (und Streckenlängen), die man auf diese Weise erhalten kann, nennt man **„konstruierbare Zahlen“.**

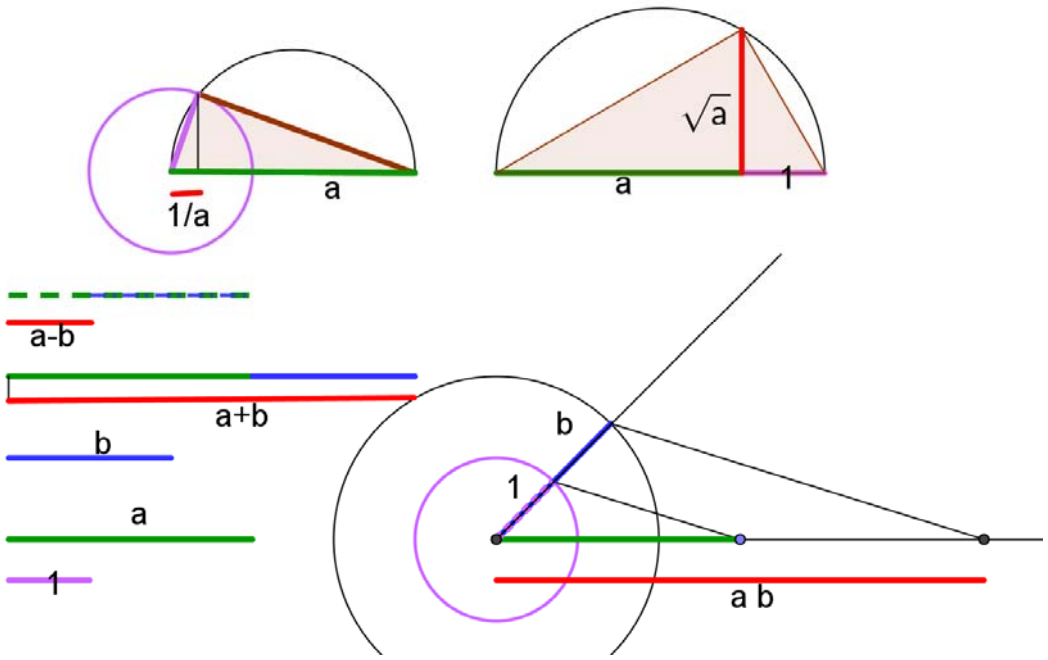
Satz 1

Man kann zu allen schon konstruierten Zahlen a und b auch ihre Summe, Differenz, Produkt, Quotienten und ihre Quadratwurzel konstruieren.

$$a+b,\ a-b,\ a\cdot b,\ \frac{1}{a},\ \frac{b}{a},\ \sqrt{a}$$

Beweis:

Es werden die elementaren Konstruktionen für Parallelen, Senkrechten und Thaleskreis als bekannt vorausgesetzt. Negative Werte muss man sich im Zusammenhang mit dem Koordinatensystem vorstellen.



Folgerung: Die Rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sind konstruierbar.

Def.: $\mathbb{Q}\left(\sqrt{r}\right):=\left\{a+b\sqrt{r}\ \middle|\ a,b\in\mathbb{Q}\right\}$ heißt **quadratischer Erweiterungskörper** von $\mathbb{Q}$

Das algebraische Fachwort „Körper“ besagt u.A., dass man mit Termen dieses Bautyps Strichrechnungen, Punktrechnungen incl. Divisionen ausführen kann.
Die so erfassten Zahlen sind alle konstruierbar.

Sei $K = \{a,b,c,r,s,t,u,v,\dots \mid \text{konstruierte Zahlen}\}$

Dann ist $(y-b)(c-a) = (x-a)(d-b)$ eine Gerade durch die Punkte (a,b) und (c,d)

Ebenso ist $(y-t)(u-s) = (x-s)(v-t)$ eine Gerade durch (s,t) und (u,v).

Der Schnittpunkt dieser Geraden ist, falls er existiert:

$$\mathbf{ger1} := (y-b)\cdot(c-a) = (x-a)\cdot(d-b) \qquad \mathbf{ger2} := (y-t)\cdot(u-s) = (x-s)\cdot(v-t)$$

$$\text{solve}(\{\mathbf{ger1},\mathbf{ger2}\},x,y) \blacktriangleright x = \frac{s\cdot((a-c)\cdot v - a\cdot d + b\cdot c) - ((a-c)\cdot t - a\cdot d + b\cdot c)\cdot u}{(b-d)\cdot s - (a-c)\cdot t - (b-d)\cdot u + (a-c)\cdot v}$$
$$\text{and } y = \frac{(b-d)\cdot s\cdot v - t\cdot((b-d)\cdot u + a\cdot d - b\cdot c) + (a\cdot d - b\cdot c)\cdot v}{(b-d)\cdot s - (a-c)\cdot t - (b-d)\cdot u + (a-c)\cdot v}$$

Er ist zulässig konstruiert und seine Koordinaten sind auch in dem Körper K.

Ein Kreis durch (s,t) mit dem Radius r hat die Gleichung $(x-s)^2 + (y-t)^2 = r^2$

Beim Schnitt mit der ersten der oberen Geraden ergeben sich, allgemein notiert, wilde Terme, die erste Abszisse ist

Man kann also Quadratwurzel erwarten.

Diese Zahl ist dann nicht in K selbst sondern wieder in einem quadratischen Erweiterungskörper

```
logk = Solve[{ger1, kr1}, {x, y}]
```

$$\Big\{\Big\{x \to \Big(2b^2c - 2abd - 2bcd + 2ad^2 + 2a^2s - 4acs + 2c^2s + 2abt - 2bct - 2adt + 2cdt - \sqrt{\big((-2b^2c + 2abd + 2bcd - 2ad^2 - 2a^2s + 4acs - 2c^2s - 2abt + 2bct + 2adt - 2cdt)^2 - 4(a^2+b^2-2ac+c^2-2bd+d^2)(b^2c^2 - 2abcd + a^2d^2 - a^2r^2 + 2acr^2 - c^2r^2 + a^2s^2 - 2acs^2 + c^2s^2 + 2abct - 2bc^2t - 2a^2dt + 2acdt + a^2t^2 - 2act^2 + c^2t^2)\big)}\Big) \Big/ \big(2(a^2+b^2-2ac+c^2-2bd+d^2)\big),$$

$$K\left(\sqrt{A}\right) := \left\{ z + w\sqrt{A} \,\middle|\, z,w \in K \right\}$$

Dabei ist A der Tem unter der Wurzel.

Im konkreten Fall ist dies deutlicher.

```
logkr =
 (Solve[{ger1, kr1}, {x, y}] /. {a → 1, b → 5, c → 4, d → 1, s → 1, t → 3, r → 3})
```

$$\left\{\left\{x \to \frac{1}{50}\left(98 - 18\sqrt{21}\right),\ y \to \frac{1}{3}\left(\frac{279}{25} + \frac{36\sqrt{21}}{25}\right)\right\},\ \left\{x \to \frac{1}{50}\left(98 + 18\sqrt{21}\right),\ y \to \frac{1}{3}\left(\frac{279}{25} - \frac{36\sqrt{21}}{25}\right)\right\}\right\}$$

Wenn zwei Kreise geschnitten werden, werden die Terme nicht wesentlich aufwendiger

Wieder ergibt sich bloß eine Quadratwurzel aus den schon konstruierten Zahlen.

```
Solve[{kr1, kr2}, {x, y}]
```

$$\Big\{\Big\{x \to \Big(4a^3 + 4ab^2 + 4ar^2 - 4a^2s + 4b^2s - 4r^2s - 4as^2 + 4s^3 - 8abt - 8bst + 4at^2 + 4st^2 - 4a\rho^2 + 4s\rho^2 - \sqrt{\big((-4a^3 - 4ab^2 - 4ar^2 + 4a^2s - 4b^2s + 4r^2s + 4as^2 - 4s^3 + 8abt + 8bst - 4at^2 - 4st^2 + 4a\rho^2 - 4s\rho^2)^2 - 4(4a^2 + 4b^2 - 8as + 4s^2 - 8bt + 4t^2)(a^4 + 2a^2b^2 + b^4 + 2a^2r^2 - 2b^2r^2 + r^4 - 2a^2s^2 + 2b^2s^2 - 2r^2s^2 + s^4 - 4a^2bt - 4b^3t + 4br^2t - 4bs^2t + 2a^2t^2 + 6b^2t^2 - 2r^2t^2 + 2s^2t^2 - 4bt^3 + t^4 - 2a^2\rho^2 - 2b^2\rho^2 - 2r^2\rho^2 + 2s^2\rho^2 + 4bt\rho^2 - 2t^2\rho^2 + \rho^4)\big)}\Big) \Big/ \big(2(4a^2 + 4b^2 - 8as + 4s^2 - 8bt + 4t^2)\big),$$

Auch diese Kooerdinaten liegen in einem Erweiterungskörper

Ist eine der verwendeteten Koordinaten schon selbst eine Wurzel, so ergibt sich Quadrat-wurzelschachtelung.

Rechts sieht man die Wurzel(2) aus dem Mittelpunkt von Kreis 1 sowohl alleine als auch unter der großen Wurzel auftauchen.

$$\mathbf{kreis1} := (x-\sqrt{2})^2 + (y-3)^2 = 2^2 \blacktriangleright x^2 - 2\cdot\sqrt{2}\cdot x + y^2 - 6\cdot y + 11 = 4$$

$$\mathbf{kreis2} := (x-1)^2 + (y-5)^2 = 3^2 \blacktriangleright x^2 - 2\cdot x + y^2 - 10\cdot y + 26 = 9$$

$$\text{lo} := \text{solve}(\{\mathbf{kreis1},\mathbf{kreis2}\},\{x,y\})$$
$$\blacktriangleright x = \frac{-\left(2\cdot(\sqrt{2}+1)\cdot\sqrt{1835 - 1104\cdot\sqrt{2}} - 33\cdot\sqrt{2} - 13\right)}{41} \text{ and } y = \frac{-\left(\sqrt{1835-1104\cdot\sqrt{2}} + 10\cdot\sqrt{2} - 129\right)}{41} \text{ or}$$
$$x = \frac{2\cdot(\sqrt{2}+1)\cdot\sqrt{1835-1104\cdot\sqrt{2}} + 33\cdot\sqrt{2} + 13}{41} \text{ and } y = \frac{\sqrt{1835-1104\cdot\sqrt{2}} - 10\cdot\sqrt{2} + 129}{41}$$

$$\text{approx}(\mathbf{lo}) \blacktriangleright x = -0.493002 \text{ and } y = 2.3979 \text{ or } x = 3.40369 \text{ and } y = 3.20493$$

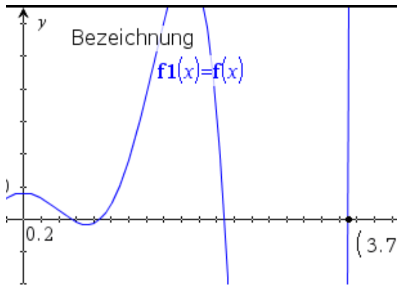
An dem letzten Beispiel sieht man , dass die so für die Koordinaten des Schnittpunktes konstruierten Zahlen aus einem Körper, in dem die Zahlterme den Aufbau $u+v\sqrt{1835-1104\sqrt{2}}$, wobei u und v selbst den Aubau $z+w\sqrt{2}$ haben. Konstruierte Zahlen liegen also in einer Kette von quadratischen Körpererweiterungen. $x \in K_n$ mit $\mathbb{Q} \underset{2}{\subset} K_1 \underset{2}{\subset} K_2 \underset{2}{\subset} K_3 ...... \underset{2}{\subset} K_n$ oder sie sind schon selbst rational.

Jede solche Erweiterung kann man wegen des Aufbaues $z+w\sqrt{r}$ als „zweidimensional" auffassen, so dass K_n die Dimension 2^n hat. Man sagt K_n hat den Körpergrad 2^n über $\mathbb{Q}$, denn die Zahlen, die in den „Wurzeltürmen" stehen, sind alle rational.

Dieser Grad ist auch der **Grad eines Polynoms**, dessen Nullstelle die konstruierte Zahl ist. Das machen wir uns nun klar:

$\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}$ sei also eine konstruierte Zahl.

$$x=\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}$$
$$x-\sqrt{2}=\sqrt{3+\sqrt{5}}$$
$$x^2-2\sqrt{2}\,x+2=3+\sqrt{5}$$
$$x^2-1=2\sqrt{2}\,x+\sqrt{5}$$
$$x^4-2x^2+1=8x^2+4\sqrt{10}+5$$
$$x^4-10x^2-4=4\sqrt{10}\,x$$
$$x^8-20x^6+92x^4+80x^2+16=160x^2$$
$$x^8-20x^6+92x^4-80x^2+16=0$$
$$f(x)=x^8-20x^6+92x^4-80x^2+16$$



Das Polynom mit rationalen Koeffizienten $f(x)$ hat $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}=3.70246...$ als Nullstelle.

Polynome von konstruierten Zahlen müssen also einen Zweierpotenz-Grad haben.

Die Kette von Körperwerweiterungen ist hier

$$\mathbb{Q}\subset K_1\subset K_2\subset K_3 \quad mit \quad K_1=\mathbb{Q}\left(\sqrt{5}\right);\ K_2=K_1\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}\right);\ K_3=K_2\left(\sqrt{2}\right)$$

Erzeugende Polynome $f_1(x)=x^2-5;\ f_2(x)=x^2-3-\sqrt{5};\ f_3(x)=x^2-2$

Hat man also z.B. ein Polynom g(x) dritten Grades mit rationalen Koeffizienten, man sagt $g(x)\in\mathbb{Q}[x]$, das keine rationalen Nullstellen hat, dann ist die eine reelle Nullstelle, die es ja geben muss, nicht konstruierbar.

Mit solchen Argumenten beweist man die Unlösbarkeit der berühmten antiken Konstruktionsprobleme:

Delisches Problem der Würfelverdoppelung:

Man braucht eine Konstruktion der Lösung von $x^3-2=0$. Das geht also nicht.

Winkeldrittelung:

Man braucht eine Lösung von $x^3-\frac{3}{4}x-\frac{c}{4}=0$ Das geht also auch nicht.

Konstruktion des 7-Ecks

Man braucht eine Lösung von $x^3-21x-7=0$ Das geht also auch nicht.

Zur Herleitung dieser Gleichungen siehe www.mathematik-verstehen.de Bereich Griechen-> Unlösbare Probleme