

Konstruieren

Konstruieren mit Zirkel und Lineal, algebraisch betrachtet. Ha 2013
 www.mathematik-verstehen.deBereich ->Geschichte ->unlösbare Probleme
 Entscheidend ist, dass beim Konstruieren mit Kreisen und Geraden ausschließlich geschichtete Quadratwurzelterme entstehen können. Das wird hier demonstriert.
 Gegeben seien die Punkte (a,b) und (c,d) mit rationalen Koordinaten.
 Dann definieren sie die Gerade $ger1 := (y-b) \cdot (c-a) - (x-a) \cdot (d-b)$
 Gegeben seien die Punkte (s,t) und (u,v) mit rationalen Koordinaten.
 Dann definieren sie die Gerade $ger2 := (y-t) \cdot (u-s) - (x-s) \cdot (v-t)$
 Der Schnittpunkt, falls sie nicht parallel sind, ist:

$$\text{solve}(\{ger1,ger2\},xy) = x = \frac{s \cdot ((a-c) \cdot v - u \cdot d + b \cdot c) - ((a-c) \cdot t - u \cdot d + b \cdot c) \cdot u}{(b-d) \cdot s - (a-c) \cdot t - (b-d) \cdot u + (a-c) \cdot v}$$

$$\text{and } y = \frac{(b-d) \cdot s \cdot v - ((b-d) \cdot u \cdot d + b \cdot c) \cdot (a-c) + (a-d) \cdot b \cdot c}{(b-d) \cdot v - (a-c) \cdot t - (b-d) \cdot u + (a-c) \cdot v}$$

 Der Schnittpunkt hat dann also ebenfalls rationale Koordinaten.
 Sind die Koordinaten aber schon Wurzelausdrücke, dann kommen im Schnittpunkt allenfalls diese Wurzelausdrücke vor, jedenfalls keine neuen Wurzeln.

1.1

Konstruieren

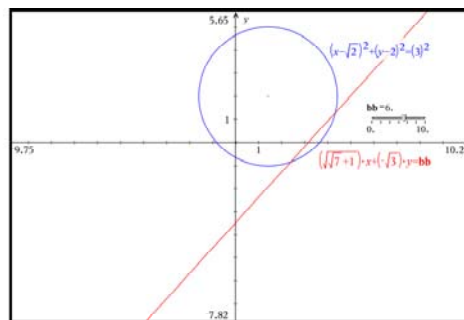
Sei nun zu der Geraden $ger1$ noch ein Kreis ms mit Radius r gegeben
 $ger1 := (y-b) \cdot (c-a) - (x-a) \cdot (d-b)$ $kr1 := (x-s)^2 + (y-t)^2 - r^2$
 $\text{solve}(\{ger1,kr1\},xy)$ Diese allgemeine Gleichung überfordert das TI-CAS.
 $kr1 := (x-\sqrt{2})^2 + (y-2)^2 - 3^2 = x^2 - 2\sqrt{2}x + y^2 - 4y + 6 - 9$
 $gerade := \sqrt{7+1} \cdot x - \sqrt{3} \cdot y - bb = \sqrt{8} \cdot x - \sqrt{3} \cdot y - 6$
 $\text{solve}(\{gerade,kr1\},xy) = x = 2.38018$ and $y = 0.840231$ or $x = 4.33487$ and $y = 1.31458$
 Da sind die zwei Schnittpunkte, aber ich möchte die Terme sehen.
 $\text{exact}(\text{solve}(\{gerade,kr1\},xy))$ Auch dies wird nicht geschafft.
 $\text{solve}(\text{kr1},y) = (x-s)^2 - r^2 = (x-\sqrt{2})^2 - 3^2 = x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 - 9 = x^2 - 2\sqrt{2}x - 7$

$$\left(x = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 4 \cdot (-7)}}{2} = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{8 + 28}}{2} = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{2\sqrt{2} \pm 6}{2} = \sqrt{2} \pm 3 \right)$$

 Mathematica kann es. Man sieht, es kommen nur Schachtelungen aus den vorhandenen Wurzeln vor. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{6}$ $\sqrt{3} \cdot 7 = \sqrt{21}$ und eine neue Quadratwurzel.

1.2

Konstruieren



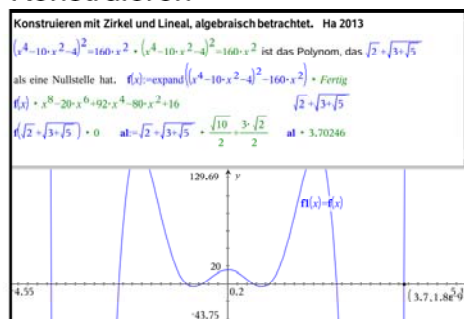
1.3

Konstruieren

Konstruieren mit Zirkel und Lineal, algebraisch betrachtet. Ha 2013
 www.mathematik-verstehen.deBereich ->Geschichte ->unlösbare Probleme
 Entscheidend ist, dass beim Konstruieren mit Kreisen und Geraden ausschließlich geschichtete Quadratwurzelterme entstehen können. Das wird hier demonstriert.
 $kr1 := (x-s)^2 + (y-t)^2 - r^2 = x^2 - 2sx + s^2 + y^2 - 2ty + t^2 - r^2$
 $kr2 := (x-a)^2 + (y-b)^2 - rho^2 = x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - rho^2$
 $\text{solve}(\{kr1,kr2\},xy)$ Die überfordert wieder TI-CAS
 $kr1 := x^2 - 2\sqrt{2}x + y^2 - 4y + 6 - 9$
 $kr2 := (x-1)^2 + (y-3)^2 - 3^2 = x^2 - 2x + y^2 - 6y + 9 - 9$
 $\text{lo} := \text{solve}(\{kr1,kr2\},xy)$
 $x = \frac{(\sqrt{2}+1) \cdot (3 \cdot \sqrt{17} \cdot (47 \cdot \sqrt{2} - 75) - 17)}{34}$ and $y = \frac{(\sqrt{17} \cdot (47 \cdot \sqrt{2} - 75) - 119)}{34}$
 or
 $x = \frac{(\sqrt{2}+1) \cdot (3 \cdot \sqrt{17} \cdot (47 \cdot \sqrt{2} - 75) + 17)}{34}$ and $y = \frac{\sqrt{17} \cdot (47 \cdot \sqrt{2} - 75) + 119}{34}$
 $\text{approx}(\text{lo}) = x = 1.55836$ and $y = 3.14578$ or $x = 3.77258$ and $y = 3.85422$
 Eine neue Quadratwurzel ist dazugekommen.

1.4

Konstruieren



1.5