Konstruieren

Konstruieren mit Zirkel und Lineal, algebraisch betrachtet. Ha 2013

www.mathematik−verstehen.deBereich −>Geschichte −>unlösbare Probleme

Entscheidend ist, dass beim Konstruieren mit Kreisen und Geraden ausschließlich geschachtelte Quadratwurzelterme entstehen können. Das wird hier demonstriert.

Gegeben seien die Punkte (a,b) und (c,d) mit rationalen Koordinaten.

Dann definieren sie die Gerade $\mathbf{ger1}:=(y-b)\cdot(c-a)=(x-a)\cdot(d-b)$

Gegeben seien die Punkte (s,t) und (u,v) mit rationalen Koordinaten.

Dann definieren sie die Gerade $\mathbf{ger2}:=(y-t)\cdot(u-s)=(x-s)\cdot(v-t)$

Der Schnittpunkt, falls sie nicht parallel sind, ist:

$$\text{solve}(\{\mathbf{ger1},\mathbf{ger2}\},x,y) \blacktriangleright x=\frac{s\cdot((a-c)\cdot v-a\cdot d+b\cdot c)-((a-c)\cdot t-a\cdot d+b\cdot c)\cdot u}{(b-d)\cdot s-(a-c)\cdot t-(b-d)\cdot u+(a-c)\cdot v} \text{ and } y=\frac{(b-d)\cdot s\cdot v-t\cdot((b-d)\cdot u+a\cdot d-b\cdot c)+(a\cdot d-b\cdot c)\cdot v}{(b-d)\cdot s-(a-c)\cdot t-(b-d)\cdot u+(a-c)\cdot v}$$

Der Schnittpunkt hat dann also ebenfalls rationale Koordinaten.

Sind die Koordinaten aber schon Wurzelausdrücke, dann kommen im Schnittpunkt allenfalls diese Wurzelausdrücke vor, jedenfalls keine neuen Wurzeln.

1.1

Konstruieren

Sei nun zu der Geraden ger1 noch ein Kreis um (s,t) mit Radius r gegeben

$\mathbf{ger1}:=(y-b)\cdot(c-a)=(x-a)\cdot(d-b)$ $\mathbf{kr1}:=(x-s)^2+(y-t)^2=r^2$

$\text{solve}(\{\mathbf{ger1},\mathbf{kr1}\},x,y)$ Diese allgemeine Gleichung überfordert das TI−CAS.

$\mathbf{kreis1}:=(x-\sqrt{2})^2+(y-2)^2=3^2 \blacktriangleright x^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot x+y^2-4\cdot y+6=9$

$\mathbf{gerade}:=\sqrt{\sqrt{7}+1}\cdot x-\sqrt{3}\cdot y=\mathbf{bb} \blacktriangleright \sqrt{\sqrt{7}+1}\cdot x-\sqrt{3}\cdot y=6.$

$\text{solve}(\{\mathbf{gerade},\mathbf{kreis1}\},x,y) \blacktriangleright x=2.38018 \text{ and } y=^-0.840231 \text{ or } x=4.33487 \text{ and } y=1.31458$

Da sind die zwei Schnittpunkte, aber ich möchte die Terme sehen.

$\text{exact}(\text{solve}(\{\mathbf{gerade},\mathbf{kreis1}\},x,y))$ Auch dies wird nicht geschafft.

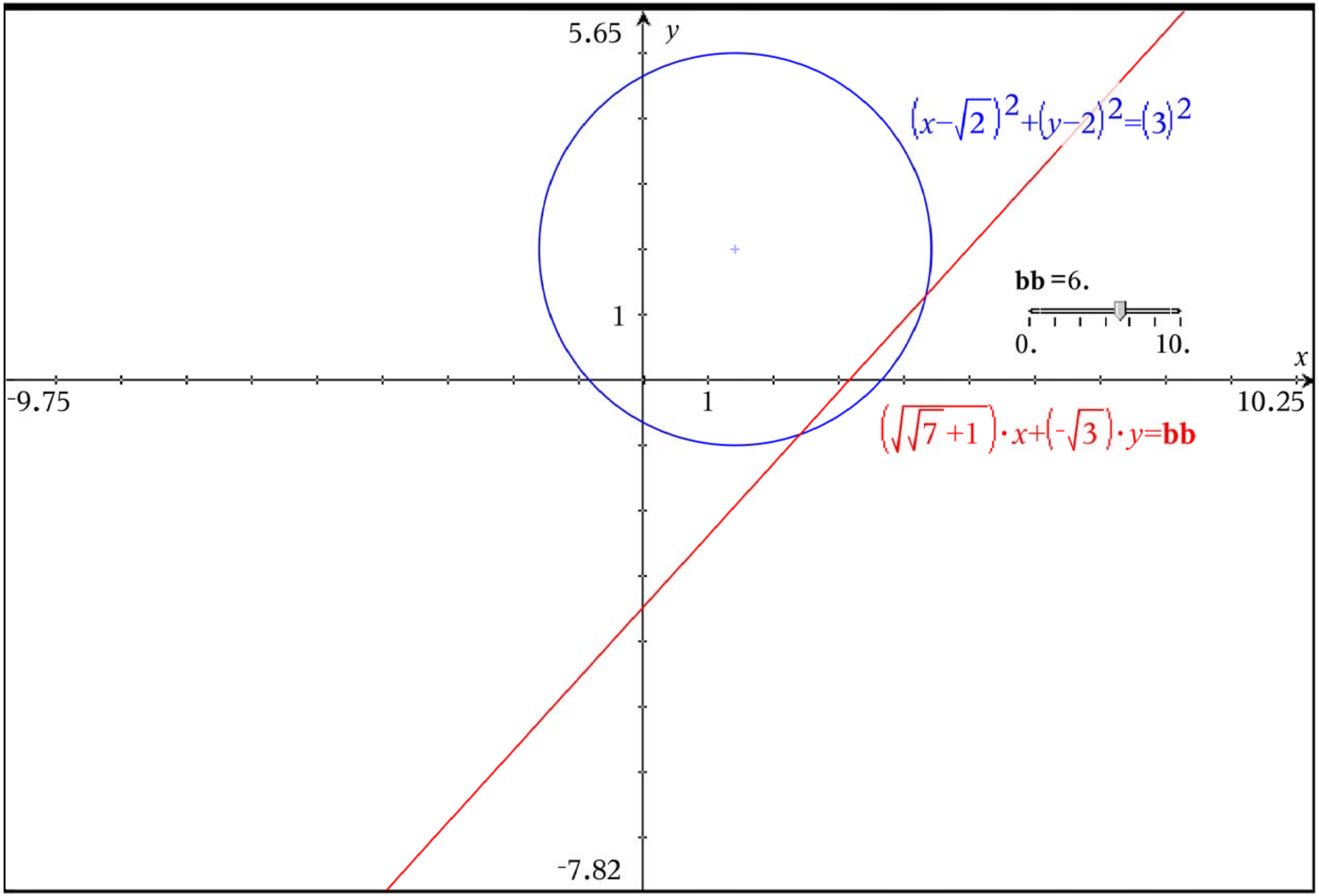
```
Solve[{kreis1, gerade}, {x, y}]
```

$$\left\{\left\{x \to \frac{1}{2\left(-4\sqrt{3}-\sqrt{21}\right)}\left(-6\sqrt{6}-12\sqrt{1+\sqrt{7}}-8\sqrt{3\left(1+\sqrt{7}\right)}-\sqrt{-4\left(-48-7\sqrt{3}\right)\left(-4\sqrt{3}-\sqrt{21}\right)+\left(6\sqrt{6}+12\sqrt{1+\sqrt{7}}+8\sqrt{3\left(1+\sqrt{7}\right)}\right)^2}\right),\right.\right.$$

Mathematica kann es. Man sieht, es kommen nur Schachtelungen aus den vorhandenen Wurzeln vor. $\sqrt{3}\cdot\sqrt{2} \blacktriangleright \sqrt{6}$ $\sqrt{3\cdot 7} \blacktriangleright \sqrt{21}$ **und eine neue Quadratwurzel,**

1.2

Konstruieren



1.3

Konstruieren

Konstruieren mit Zirkel und Lineal, algebraisch betrachtet. Ha 2013

www.mathematik−verstehen.deBereich −>Geschichte −>unlösbare Probleme

Entscheidend ist, dass beim Konstruieren Mit Kreisen und Geraden ausschließlich geschachtelte Quadratwurzelterme entstehen können. Das wird hier demonstriert.

$\mathbf{kr1}:=(x-s)^2+(y-t)^2=r^2 \blacktriangleright s^2-2\cdot s\cdot x+t^2-2\cdot t\cdot y+x^2+y^2=r^2$

$\mathbf{kr2}:=(x-a)^2+(y-b)^2=rho^2 \blacktriangleright x^2-2\cdot a\cdot x+y^2-2\cdot b\cdot y+a^2+b^2=rho^2$

$\mathrm{solve}(\{\mathbf{kr1},\mathbf{kr2}\},\{x,y\})$ Die Überfordert wieder Ti−CAS

$\mathbf{kreis1} \blacktriangleright x^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot x+y^2-4\cdot y+6=9$

$\mathbf{kreis2}:=(x-1)^2+(y-5)^2=3^2 \blacktriangleright x^2-2\cdot x+y^2-10\cdot y+26=9$

$\mathrm{lo}:=\mathrm{solve}(\{\mathbf{kreis1},\mathbf{kreis2}\},\{x,y\})$

$$\blacktriangleright x=\frac{-(\sqrt{2}+1)\cdot\left(3\cdot\sqrt{-17\cdot(47\cdot\sqrt{2}-75)}-17\right)}{34} \text{ and } y=\frac{-\left(\sqrt{-17\cdot(47\cdot\sqrt{2}-75)}-119\right)}{34} \text{ or }$$

$$x=\frac{(\sqrt{2}+1)\cdot\left(3\cdot\sqrt{-17\cdot(47\cdot\sqrt{2}-75)}+17\right)}{34} \text{ and } y=\frac{\sqrt{-17\cdot(47\cdot\sqrt{2}-75)}+119}{34}$$

$\mathrm{approx}(\mathbf{lo}) \blacktriangleright x=-1.35836 \text{ and } y=3.14578 \text{ or } x=3.77258 \text{ and } y=3.85422$

Eine neue Quadtratwurzel ist dazugekommen.

1.4

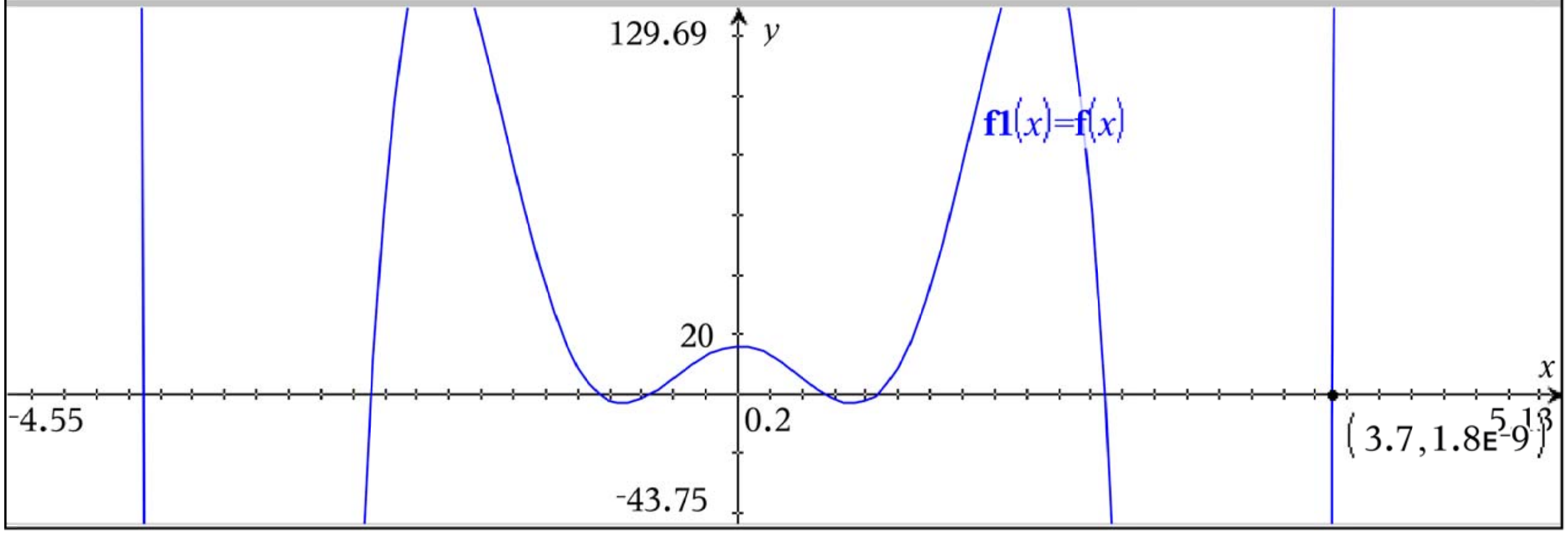
Konstruieren

Konstruieren mit Zirkel und Lineal, algebraisch betrachtet. Ha 2013

$(x^4-10\cdot x^2-4)^2=160\cdot x^2$ ▸ $(x^4-10\cdot x^2-4)^2=160\cdot x^2$ ist das Polynom, das $\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}$ als eine Nullstelle hat. $f(x):=\text{expand}\left(\left(x^4-10\cdot x^2-4\right)^2-160\cdot x^2\right)$ ▸ *Fertig*

$f(x)$ ▸ $x^8-20\cdot x^6+92\cdot x^4-80\cdot x^2+16$ $\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}$

$f\left(\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)$ ▸ 0 $al:=\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}$ ▸ $\frac{\sqrt{10}}{2}+\frac{3\cdot\sqrt{2}}{2}$ al ▸ 3.70246



1.5