Quadriken Konstruktion rückwärts 3d

Prof. Dr. Dörte Haftendorn: Mathematik mit MuPAD 4, Juni 07 Update 30.06.07
Web: http://haftendorn.uni-lueneburg.de www.mathematik-verstehen.de

##

Fall1 drei verschiedene EW

Fall2 zwei verschiedene EW, einer doppelt

Konstruktion einer anderenLage, Sammlung guter Beispiele, unten

----

```
E3:=matrix([[1,0,0],[0,1,0],[0,0,1]])
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gewünschte orthogonale EV

```
v1:=matrix([1,-1,1]);
v2:=matrix([-1,1,2]);  //selbst aufpassen, dass dieser
orthogonal ist.
v3:=1/3*linalg::crossProduct(v1,v2);
linalg::scalarProduct(v1,v2)
```

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$0$$

```
v1n:=linalg::normalize(v1):
v2n:=linalg::normalize(v2):
v3n:=linalg::normalize(v3):
Pv:=v1n.v2n.v3n
```

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

```
simplify(linalg::det(Pv))
```


$$1$$

Diese Determinantet kann eigentlich wegen des Kreuzproduktes nicht -1 werden.

Falls man von Hand aufgestellt hat und diese Det. -1 ist, vertauscht man besser v1 und v2.

Falls man von Hand aufgestellt hat und diese Det. -1 ist, vertauscht man besser v1 und v2. Anderenfalls ist noch eine Achsenspiegelung nach der Drehung zu denken.

```
Ptv:=linalg::transpose(Pv)
```

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

```
kv1:=2: kv2:=1: kv3:=4:    // freie Wahl der EW, verschieden
//kv1:=1: kv2:=2: kv3:=kv2:    // freie Wahl der EW, einer dopp
//kv1:=2: kv2:=kv1:kv3:=kv1: // freie Wahl des dreifachen EW, trivial, zentrische Streckung
Dewv:=matrix([[kv1,0,0],[0,kv2,0],[0,0,kv3]])
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

```
A:=Simplify(Pv*Dewv*Ptv);
factor(Simplify(Pv*Dewv*Ptv))
```

$$\begin{pmatrix} \frac{17}{6} & \frac{7}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{7}{6} & \frac{17}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$\_\mathrm{mult}\left(\frac{1}{6}\right) \cdot \begin{pmatrix} 17 & 7 & 2 \\ 7 & 17 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

```
amke:=[A-kv1*E3, A-kv2*E3,A-kv3*E3] //Verwendung bei Berechnung es EV
```

$$\left[\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{7}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{7}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{11}{6} & \frac{7}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{7}{6} & \frac{11}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{7}{6} & \frac{7}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{7}{6} & -\frac{7}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}\right]$$

```
Simplify(map(amke,linalg::det))   //Probe
```

$$[0, 0, 0]$$

```
evli:=linalg::eigenvectors(6*A) //Probe, was MuPAD liefert
```


$$\left[\left[6, 1, \left[\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right]\right], \left[12, 1, \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]\right], \left[24, 1, \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]\right]\right]$$

$$\left[\left[6,\ 1,\ \left[\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right]\right],\ \left[12,\ 1,\ \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]\right],\ \left[24,\ 1,\ \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]\right]\right]$$

Herausgreifen der EigenWerte ki und der Eigenvektoren evi

##

Gehe zum passenden Fall

Anpassen wegen der Vielfachheiten Fall1 Drei verschiedene EW

```
k1 :=evli[1][1];  k2 :=evli[2][1]; k3 :=evli[3][1];
ev1:=evli[1][3][1]:
ev2:=evli[2][3][1]: //evt. neg, damit Rechtssystem
herauskommt
ev3:=evli[3][3][1]:
```

6

12

24

```
linalg::det(ev1.ev2.ev3)
```

3

Diese Determinante sollte positiv sein, donst ist später noch eine Spiegelung im Spiel.

##

Herausgreifen der EigenWerte ki und der Eigenvektoren evi

Anpassen wegen der Vielfachheiten Fall 2 zwei verschiedene EW, ein dopp.

```
//k1 :=evli[1][1];  k2 :=evli[1][1]; k3 :=evli[2][1];
//ev1:=evli[1][3][1];ev2:=evli[1][3][2];ev3:=evli[2][3]
[1];
```

0

0

1

$$\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hier müssen später die EV orthogonalisiert werden, z.B.

```
//ev1:=linalg::crossProduct(ev2,ev3)
```

$$\begin{pmatrix} -5 \\ \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

```
linalg::det(ev1.ev2.ev3)
```

$$3$$

Diese Determinante sollte positiv sein, donst ist später noch eine
Spiegelung im Spiel.
###

Konstruktion einer anderen Lage

```
p:=matrix([x,y,z]): pt:=linalg::transpose(p)
```

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$$

Erfindung eines Punktes für das Urbild.
Bei parabolischen Quadriken ist die vorherige Bestimmung des Scheitels an dieser Stelle zu aufwändig. Ist kein Eigenwert 0 kann man hier einen Mittelpunkt der späteren Quadrik wählen.

```
m:=matrix([5,-2,2]); mt:=linalg::transpose(m)  ;
```

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

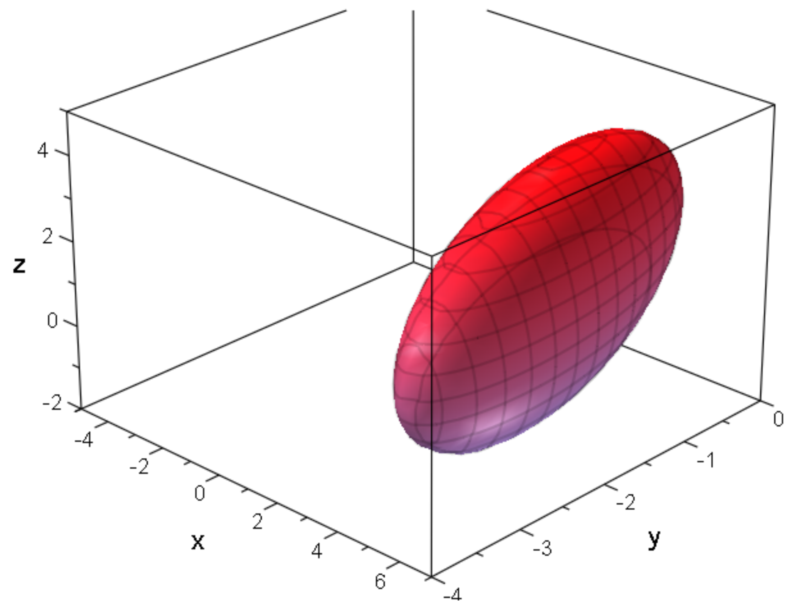
Konstruktion ein schönen Quadrik-Gleichung.
Bei parabolischen Quadriken muss hier ein linearer Term für die Richtung mit Eigenwert 0 (Reihenfolge von MuPAD) vorgesehen werden.
z.B.

```
d:=-kv1*kv2*kv3;  // das ist nicht nötig aber praktisch
Quadrik:=6*expand((pt-mt)*A*(p-m)+d);
```

$$-8$$

$$\left(17 \cdot x^2 + 14 \cdot x \cdot y + 4 \cdot x \cdot z - x \cdot 150 + 17 \cdot y^2 - y \cdot z \cdot 4 + 6 \cdot y + 8 \cdot z^2 - z \cdot 60 + 393 \right)$$

```
Qp:=plot::Implicit3d(Quadrik[1]=0,x=-5..7,y=-4..0,z=-2..
5
     ,Mesh=[20,20,20]):
plot(Qp):
```

###
#

Sammlung guter Beispiele,

```
v1:=matrix([1,1,2]);
v2:=matrix([-1,-1,1]);  //selbst aufpassen, dass dieser orthogonal ist.
```

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

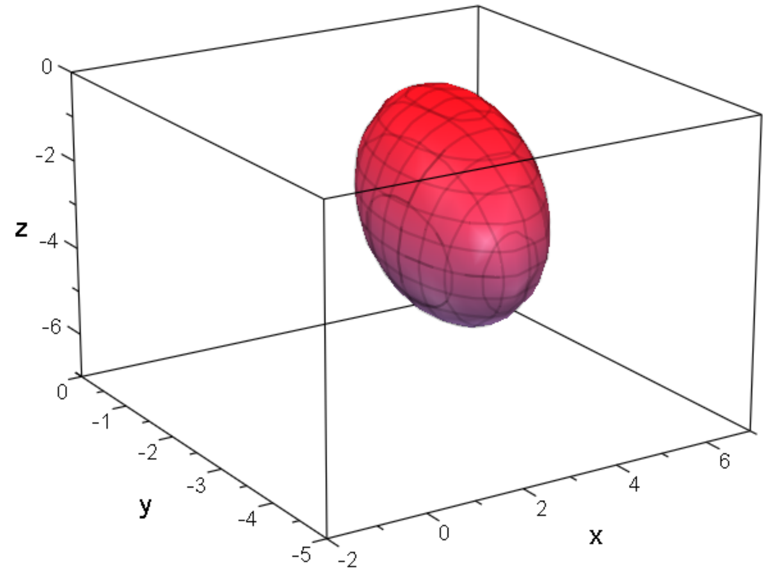
Ellipsoid,   in Extradatei dann untersucht

```
kv1:=1: kv2:=2: kv3:=3:   // freie Wahl der EW, verschieden
Q1:=matrix([[7*x^2 - 4*x*y - 2*x*z - 70*x + 7*y^2 - 2*y*z + 38*y + 4*z^2 + 28*z + 202]])
```

$$\left(7 \cdot x^2 - x \cdot y \cdot 4 - x \cdot z \cdot 2 - x \cdot 70 + 7 \cdot y^2 - y \cdot z \cdot 2 + 38 \cdot y + 4 \cdot z^2 + 28 \cdot z + 202 \right)$$

```
m:=matrix([4,-2,-3]);
Q1p:=plot::Implicit3d(Q1[1]=0,x=-2..7,y=-5..0,z=-7..0):
plot(Q1p):
```

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

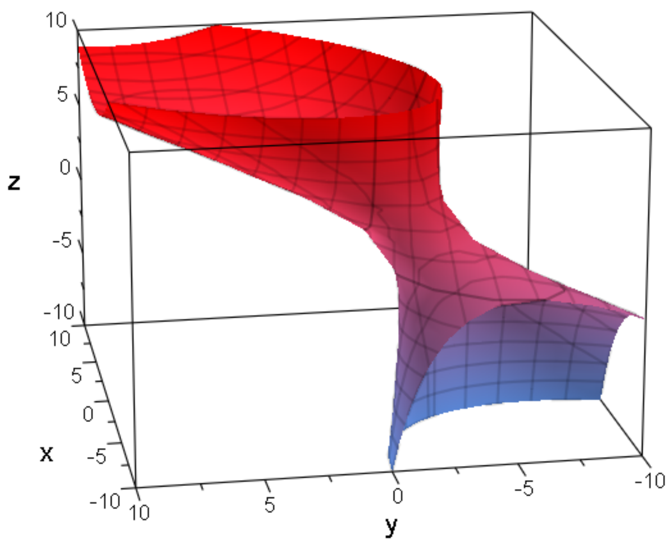


Einschaliges Hyperboloid

```
Q2:=matrix([[42*z - 6*y - 60*x - 6*x^2 - 6*y^2 + 6*x*y +
6*x*z + 6*y*z - 180]])
```

$$\left(42\cdot z-y\cdot 6-x\cdot 60-x^2\cdot 6-y^2\cdot 6+6\cdot x\cdot y+6\cdot x\cdot z+6\cdot y\cdot z-180\right)$$

```
m:=matrix([-5,-2,2]):
Q2p:=plot::Implicit3d(Q3
[1]=0,x=-10..10,y=-10..10,z=-10..10):
plot(Q2p):
```



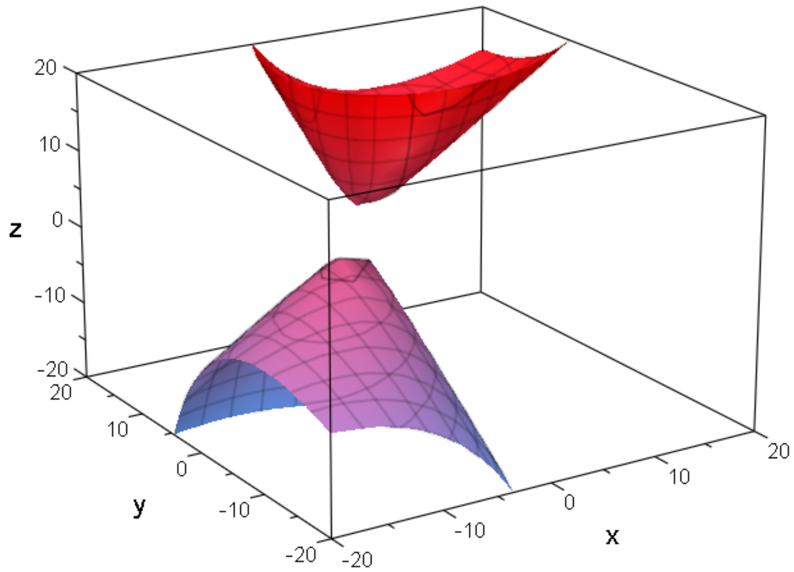
zweischaliges Hyperboloid

```
Q3:=matrix([[78*x - 30*y - 12*z + 6*x^2 + 6*y^2 - 6*x*y
- 6*x*z - 6*y*z + 222]])
```

$$\left(78\cdot x-y\cdot 30-z\cdot 12+6\cdot x^2+6\cdot y^2-x\cdot y\cdot 6-x\cdot z\cdot 6-y\cdot z\cdot 6+222\right)$$


```
m:=matrix([-4,2,3]):
Q3p:=plot::Implicit3d(Q3
```

```
Q3p:=plot::Implicit3d(Q3
[1]=0,x=-20..20,y=-20..20,z=-20..20):
plot(Q3p):
```

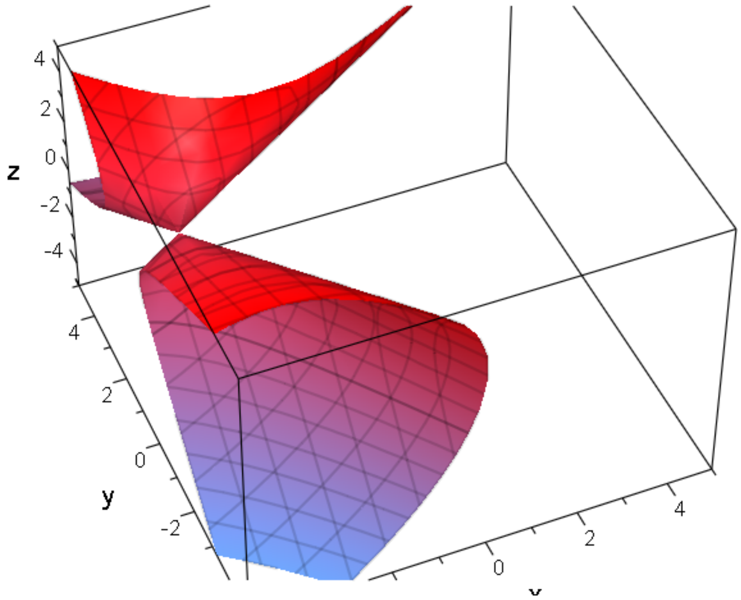


Kegel

```
EW:=[1,3,-2]:   m:=[-4,1,2]: //liegt drauf, Mittelpnkt
Quadrik5:=matrix([[33*x^2 - 24*x*y - 42*x*z + 372*x -
30*y^2 - 24*y*z + 12*y + 33*z^2 - 276*z + 1014]]);
```

$$\left(33 \cdot x^2 - x \cdot y \cdot 24 - x \cdot z \cdot 42 + 372 \cdot x - y^2 \cdot 30 - y \cdot z \cdot 24 + 12 \cdot y + 33 \cdot z^2 - z \cdot 276 + 1014 \right)$$

```
Q5p:=plot::Implicit3d(Quadrik5
[1]=0,x=-5..5,y=-5..5,z=-5..5):
plot(Q5p):
```



Elliptisches Paraboloid

```
EW:=[0,1,2]: m:=[3,-1,-3] //liegt drauf
```

```
Quadrik7:=matrix([[5*x^2 - 10*x*y - 4*x*z - 40*x + 5*y^2
```

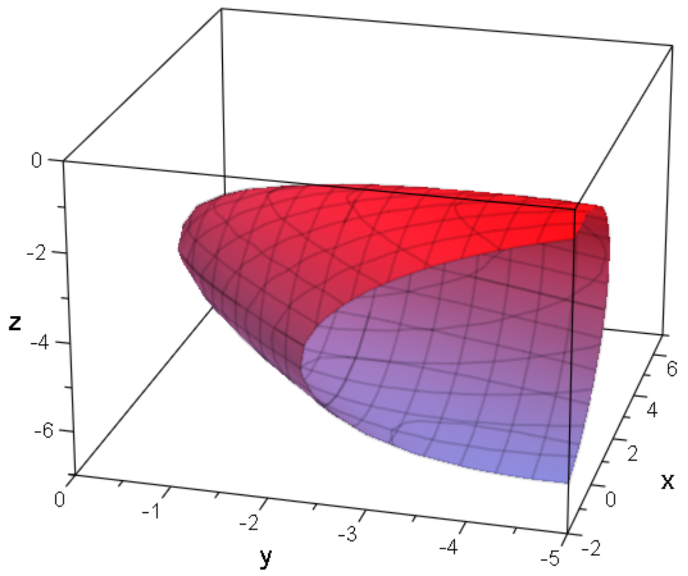
```
Quadrik7:=matrix([[5*x^2 - 10*x*y - 4*x*z - 40*x + 5*y^2
+ 4*y*z + 52*y + 8*z^2 + 64*z + 164]]);
```

$$\left(5 \cdot x^2 - x \cdot y \cdot 10 - x \cdot z \cdot 4 - x \cdot 40 + 5 \cdot y^2 + 4 \cdot y \cdot z + 52 \cdot y + 8 \cdot z^2 + 64 \cdot z + 164 \right)$$

```
Quadrik7|{x=3,y=-1,z=-3}
```

$$(0)$$

```
Q7p:=plot::Implicit3d(Quadrik7
[1]=0,x=-2..7,y=-5..0,z=-7..0):
plot(Q7p):
```



Hyperbolisches Paraboloid

```
EW:=[0,-2,1]:   m:=[-3,1,-3]; //liegt drauf
Quadrik8:=matrix([[60*y + 48*z - 3*x^2 - 3*y^2 + 6*x*y +
12*x*z - 12*y*z - 12]])
```

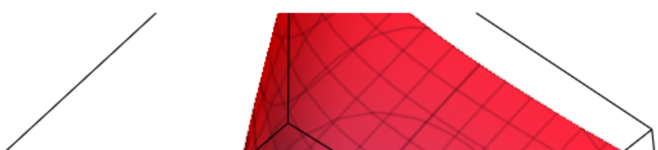
$$[-3, 1, 3]$$

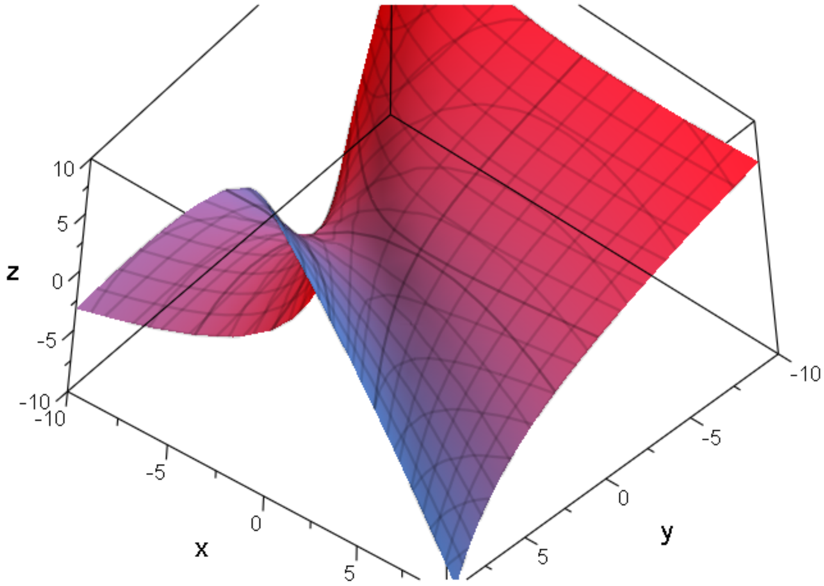
$$\left(60 \cdot y + 48 \cdot z - x^2 \cdot 3 - y^2 \cdot 3 + 6 \cdot x \cdot y + 12 \cdot x \cdot z - y \cdot z \cdot 12 - 12 \right)$$

```
Quadrik8|{x=-3,y=1,z=-3}
```

$$(0)$$

```
Q8p:=plot::Implicit3d(Quadrik8
[1]=0,x=-10..10,y=-10..10,z=-10..10):
plot(Q8p):
```

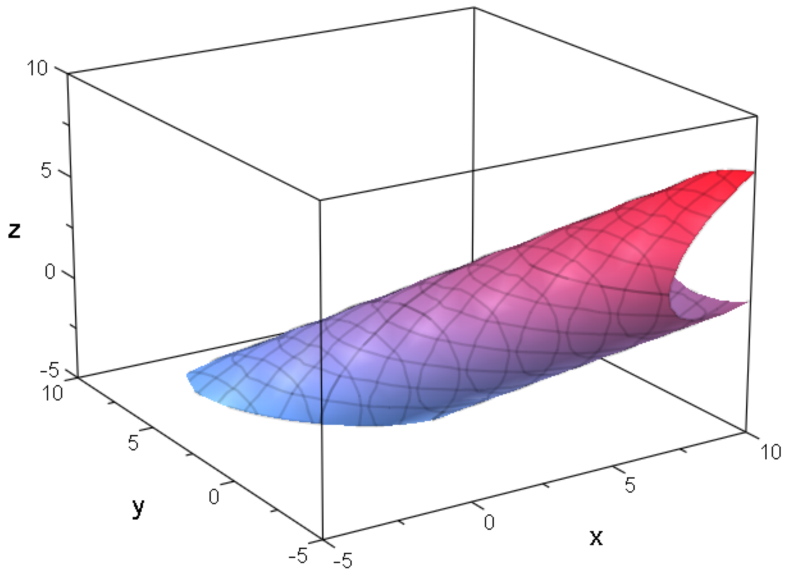


Elliptischer Zylinder

```
EW:=[0,3,2]:   m:=[4,2,-2]://Mittelpunkt
Quadrik9:=matrix([[11*x^2 + 8*x*y - 14*x*z - 132*x +
8*y^2 + 8*y*z - 48*y + 11*z^2 + 84*z + 288]]);
```

$$\left(11 \cdot x^2 + 8 \cdot x \cdot y - x \cdot z \cdot 14 - x \cdot 132 + 8 \cdot y^2 + 8 \cdot y \cdot z - y \cdot 48 + 11 \cdot z^2 + 84 \cdot z + 288 \right)$$

```
Q9p:=plot::Implicit3d(Quadrik9
[1]=0,x=-5..10,y=-5..10,z=-5..10):
plot(Q9p):
```



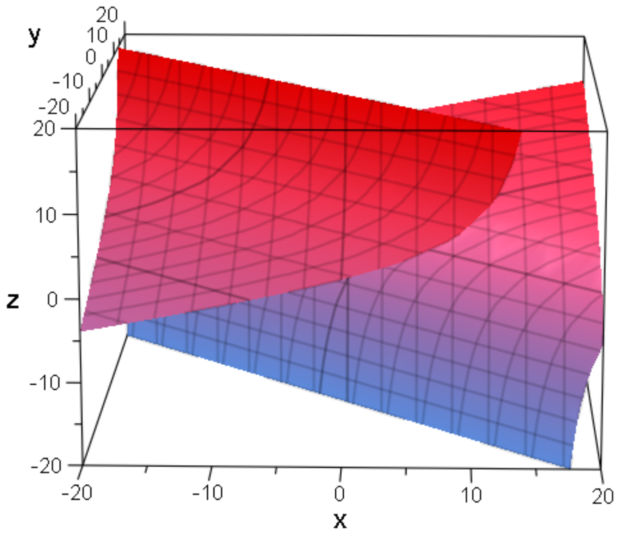
Hyperbolischer Zylinder, in Extradatei dann untersucht

```
Q10:=matrix([[8*z - 12*y - 12*x - 1/2*x^2 - 1/2*y^2 -
x*y + 2*x*z + 2*y*z + 40]])
```

$$\left(8 \cdot z - y \cdot 12 - x \cdot 12 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} - x \cdot y + 2 \cdot x \cdot z + 2 \cdot y \cdot z + 40 \right)$$


```
m:=matrix([-1,-3,4]):
```

```
m:=matrix([-1,-3,4]):
Q10p:=plot::Implicit3d(Q10
[1]=0,x=-20..20,y=-20..20,z=-20..20):
plot(Q10p):
```

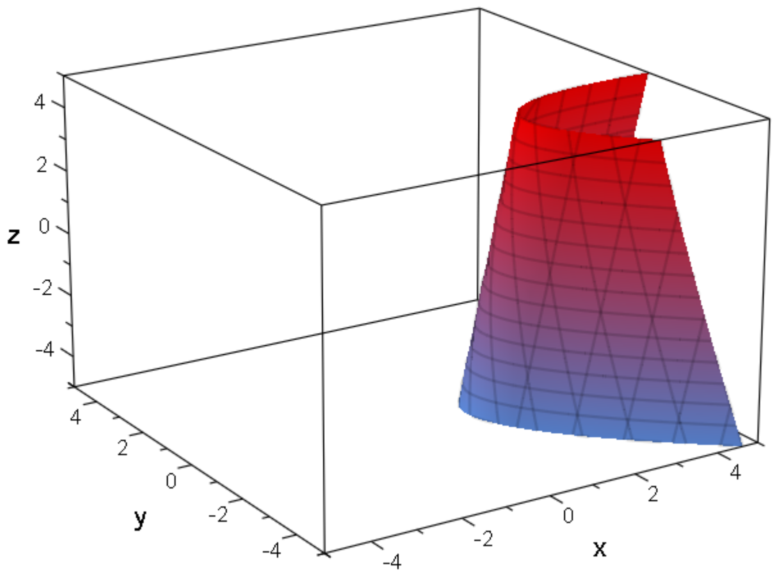


Parabolischer Zylinder

```
Quadrik14:=matrix([[4*x^2 + 20*x*y + 4*x*z - 36*x +
25*y^2 + 10*y*z + 60*y + z^2 + 12*z + 96]]);
```

$$\left(4 \cdot x^2 + 20 \cdot x \cdot y + 4 \cdot x \cdot z - x \cdot 36 + 25 \cdot y^2 + 10 \cdot y \cdot z + 60 \cdot y + z^2 + 12 \cdot z + 96 \right)$$

```
Q14p:=plot::Implicit3d(Quadrik14
[1]=0,x=-5..5,y=-5..5,z=-5..5,
    Mesh=[20,20,20]):
plot(Q14p):
```



ein weiteres Ellipsoid

```
EW:=[6,12,24]:   m:=[5,-2,2]://Mittelpunkt
```

```
EW:=[6,12,24]:    m:=[5,-2,2]://Mittelpunkt
Quadrik1b:=6*expand((pt-mt)*A*(p-m)+d);
```

$$-8$$

$$\left(17 \cdot x^2 + 14 \cdot x \cdot y + 4 \cdot x \cdot z - x \cdot 150 + 17 \cdot y^2 - y \cdot z \cdot 4 + 6 \cdot y + 8 \cdot z^2 - z \cdot 60 + 393\right)$$

```
Q1bp:=plot::Implicit3d(Quadrik1b[1]=0,x=-5..7,y=-4..0,z=
-2..5
    ,Mesh=[20,20,20]):
plot(Q1bp):
```