49. Wie heißen die Wurzeln der kubi[...]
$+ 3bx - c = 0$, wenn dieselbe zwei [...]
welcher Bedingung müssen in diesem F[...]
Gleichung genügen?

50. Welche Wurzeln hat die kubische G[...]
$- c = 0$, wenn man weiß, daß eine Wu[...]
beiden andern ist, und welcher Bedingung [...]
Koeffizienten der Gleichung genügen?

51 Wie heißen die Wurzeln der kub[...]
$+ bx - c = 0$, wenn zwei Wurzeln rezi[...]
dingung müssen in diesem Falle die Koeffizien[...]

52. Wie heißen die Wurzeln der G[...]
$x^4 + 4ax^3 + 6bx^2 + 4cx + d = 0$, [...]
Wurzeln gleich der Summe der beiden an[...]
dingung müssen in diesem Falle die Koeffizien[...]

53. Welchen Bedingungen müssen die [...]
des 4. Grades $x^4 + 4ax^3 + 6bx^2 + 4cx$ [...]
zwei Wurzeln die reziproken Werte der be[...]
heißen in diesem Falle die Wurzeln?

Dr. E. Bardey's

Aufgabensammlung,

methodisch geordnet,

mehr als 8000 Aufgaben enthaltend

über alle Teile der Elementar-Arithmetik,

vorzugsweise für Gymnasien, Realgymnasien und Oberrealschulen.

In alter und neuer Ausgabe.

Alte Ausgabe.

Siebenundzwanzigste Auflage.

Leipzig und Berlin,
Druck und Verlag von B. G. Teubner.
1903.

XXXVIII.

Kubische Gleichungen.

Reine kubische Gleichungen, in welchen die Unbekannte nur in der dritten Potenz vorkommt, welche also von der Form $x^3 = a$ sind, kubische Gleichungen mit einer ausgezeichneten Wurzel, insonderheit solche mit einer Wurzel 0, und die symmetrischen kubischen Gleichungen von der Form $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$ sind schon oben im 25. Abschnitt behandelt worden. Die Auflösung dieser Arten von kubischen Gleichungen erforderte keine besonderen Hilfsmittel.

Auch die kubischen Gleichungen mit einer rationalen Wurzel lassen sich nach dem vorigen Abschnitt leicht lösen. Die folgenden Gleichungen haben wenigstens eine rationale Wurzel. Es sollen alle Wurzeln derselben angegeben werden.

1) $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$
2) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$
3) $x^3 + 8x^2 + 5x - 50 = 0$
4) $x^3 + 2x^2 - 23x + 6 = 0$
5) $x^3 - 4x^2 - 15x - 42 = 0$
6) $x^3 - 4x^2 + x - 4 = 0$
7) $x^3 - 5x^2 + 8x - 6 = 0$

8) $x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{9}x + \frac{5}{6} = 0$
9) $x^3 - 2\frac{5}{6}x^2 + 2\frac{3}{4}x - 1 = 0$
10) $6x^3 - 29x^2 = 45 - 53x$
11) $70 + 71x = 47x^2 - 6x^3$

Gehört eine kubische Gleichung nicht unter die oben angegebenen Arten und hat sie keine rationale Wurzel, so sind andere Betrachtungen zur Auflösung nötig. Man geht in diesem Falle immer von der reduzierten kubischen Gleichung aus. Hat eine gegebene kubische Gleichung die reduzierte Form nicht, so muß man derselben erst diese Form geben. Hat das erste Glied einen Koeffizienten, so dividiert man die Gleichung durch denselben. Ob die Koeffizienten sonst ganze Zahlen oder Brüche sind, ist gleichgültig. Man nimmt an, daß die kubische Gleichung auf die Form

$$x^3 = px + q$$

gebracht ist, wo p und q beliebige reelle Zahlen sind, ganze oder gebrochene, positive oder negative.

A. Cardanische Lösung.

Ist die kubische Gleichung

$$x^3 = px + q \tag{1}$$

gegeben, so ist die Cardanische Lösung

$$x = \sqrt[3]{\frac{q + r}{2}} + \sqrt[3]{\frac{q - r}{2}} \quad \text{für } r = \sqrt{q^2 - \tfrac{4}{27}p^3} \tag{2}$$

Um auf diesem Wege alle drei Wurzeln der gegebenen Gleichung zu finden, hat man, wenn die reellen Werte der Kubikwurzeln

$$\sqrt[3]{\frac{q + r}{2}} = u \qquad \sqrt[3]{\frac{q - r}{2}} = v \tag{3}$$

gesetzt werden,

$$x_1 = u + v, \qquad \begin{aligned} x_2 &= -\frac{u + v}{2} + \frac{u - v}{2}\sqrt{-3} \\ x_3 &= -\frac{u + v}{2} - \frac{u - v}{2}\sqrt{-3} \end{aligned} \tag{4}$$

Ist r^2, d. h. $q^2 - \frac{4}{27}p^3$ positiv, was immer der Fall ist, wenn p in der Gleichung (1) negativ ist, also in der Gleichung $x^3 + px \pm q = 0$, so hat die Gleichung eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln.*) — Ist $r^2 = 0$, so erhält man drei reelle Wurzeln, von denen zwei ein-

*) Die Cardanische Lösung hat den Übelstand, daß sie die rationale Wurzel, wenn die Gleichung eine solche hat, nur selten in rationaler Form liefert. Damit dies geschieht, muß nach den Ermittelungen von E. Liebrecht die kubische Gleichung die Form $x^3 = 3mnx + m^3 + n^3$ haben, wo m und n beliebige rationale Größen sein können. Die Cardanische Formel liefert dann $x = m + n$.

ander gleich sind. Eine der gleichen Wurzeln muß dann dem absoluten Werte nach halb so groß sein als die ungleiche, aber das entgegengesetzte Zeichen haben. — Ist r^2 negativ, also r selbst imaginär, so erscheinen alle drei Wurzeln nach der Cardanischen Lösung in imaginärer Form, obwohl gerade in diesem Falle alle drei Wurzeln reell sind. Diesen Fall nennt man den irreduziblen Fall, weil man bis jetzt kein Mittel gefunden hat, algebraisch die imaginäre Form auf eine reelle zu reduzieren.

Die folgenden Gleichungen haben wenigstens eine rationale Wurzel und sind derart, daß die Cardanische Lösung diese Wurzel auch in rationaler Form liefert. Es sollen alle drei Wurzeln mit Hilfe der Cardanischen Lösung aufgesucht werden.

1) $x^3 = 3x + 2$ 2) $x^3 = 36x + 91$
3) $x^3 = 9x - 28$ 4) $x^3 + 9x + 26 = 0$
5) $x^3 - 18x = 35$ 6) $x^3 - 72x - 280 = 0$

Die folgenden Gleichungen haben eine reelle rationale oder irrationale Wurzel. Die Cardanische Lösung liefert jedoch auch die rationale Wurzel in irrationaler Form. In diesem Falle müssen die Quadrat- und Kubikwurzeln ordentlich berechnet werden, da man sich oft lange vergeblich abmühen kann, die irrationale Form auf eine rationale zu bringen.

7) $x^3 = 2x + 3$ 8) $x^3 = x - 7$
9) $x^3 + 5x - 4 = 0$ 10) $x^3 = 4x + 15$
11) $x^3 + 7x - 8 = 0$ 12) $x^3 = 26x + 60$

Die folgenden Gleichungen haben ebenfalls eine reelle rationale oder irrationale Wurzel, müssen aber erst mehr oder weniger umgeformt werden, um die Cardanische Lösung auf sie anwenden zu können.

13) $4x^3 - 5x - 6 = 0$ 14) $7x^3 + 3x - 100 = 0$
15) $15x^3 + 13x^2 - 2 = 0$ 16) $111x^3 = 5x^2 + 4$
17) $x^3 - 3x^2 + 4x - 4 = 0$ 18) $5x^3 + 10x^2 + 7x - 2 = 0$
19) $3x^3 + 13x^2 + 11x - 14 = 0$
20) $28x^3 - 126x^2 + 195x - 139 = 0$

B. Die trigonometrische Lösung.

Die trigonometrische Lösung tritt ein im irreduziblen Fall, wenn also $q^2 - \frac{4}{27}p^3$ negativ ist. Ist die kubische Gleichung

(1) $$x^3 = px + q$$

gegeben, so bestimmt man den Winkel φ aus

(2) $$\sin 3\varphi = \frac{3q}{p\sqrt{\frac{4}{3}p}},$$

was in diesem Falle immer möglich ist, da $q^2 - \frac{4}{27}p^3 < 0$, mithin $\frac{3q}{p\sqrt{\frac{4}{3}p}} < 1$ ist. Ist φ gefunden, so sind die drei Wurzeln der gegebenen Gleichung

(3) $$x_1 = -\sqrt{\tfrac{4}{3}p}\cdot\sin\varphi,\quad x_2 = -\sqrt{\tfrac{4}{3}p}\cdot\sin(60-\varphi),$$
$$x_3 = +\sqrt{\tfrac{4}{3}p}\cdot\sin(60+\varphi)$$

Für die Gleichung $x^3 = px - q$ erhalten die drei Wurzeln die entgegengesetzten Zeichen. — Aus der Lösung ist zu ersehen, daß die Gleichung in diesem Falle drei reelle Wurzeln hat. — Der Fall $x^3 = -px \pm q$ gehört nicht hierher, gehört zur Cardanischen Lösung.

Folgende kubische Gleichungen haben drei reelle Wurzeln, teils rationale, teils irrationale. Die Wurzeln sollen nach der trigonometrischen Lösung aufgesucht werden. Ist die Gleichung nicht in der reduzierten Form gegeben, so muß sie erst auf diese Form gebracht werden.

1) $x^3 - 7x - 6 = 0$ 2) $x^3 = 12x + 14$
3) $x^3 - 19x + 30 = 0$ 4) $x^3 = 7x - 5$
5) $4x^3 - 13x + 6 = 0$ 6) $30x^3 - 61x^2 + 36 = 0$
7) $8x^3 + 12x^2 - 4x - 1 = 0$ 8) $2x^3 - 5x^2 - 13x + 30 = 0$
9) $27x^3 - 54x^2 + 25x + 1 = 0$

C. Kubische Gleichungen mit verschiedener Lösung.

Um eine kubische Gleichung, deren Auflösung nicht nach dem 25. Abschnitt leicht in die Augen fällt, zu lösen, wird man erst untersuchen, ob sie eine rationale Wurzel hat, wo dann die Auflösung weiter keine Schwierigkeiten macht. Hat sie keine rationale Wurzel, so muß man sie auf die reduzierte Form $x^3 = px + q$ bringen, wenn sie diese nicht schon hat. Darnach ist das Zeichen von $q^2 - \frac{4}{27}p^3$ zu bestimmen. Ist es +, so hat man die Cardanische Lösung anzuwenden; ist es —, die trigonometrische.

Um eine rationale Wurzel leichter aufzufinden, ist es meistens zweckmäßig, nach S. 301, 23 erst die Grenzen festzustellen, zwischen welchen die reelle Wurzel liegt. Hat die Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ zwischen m und n eine reelle Wurzel, liegt aber zwischen m und n kein Faktor von c, so kann die Wurzel, welche zwischen m und n liegt, nur irrational sein. Durch Einsetzen von $+\infty, 10, 1, 0, -1, -10, -\infty$ für x, erkennt man auch leicht, ob die Gleichung nur eine reelle Wurzel hat, oder drei.

1. $x^3 = 37x + 84$ 2. $x^3 = 45x - 152$
3. $x^3 + 41x = 1000$ 4. $x^3 - 61x + 180 = 0$
5. $x^3 = 30x - 20$ 6. $x^3 = 90x + 341$

9) Die allgemeine Gleichung $x^n - a$…
in eine reduzierte zu verwandeln.

B. Direkte Auflösungen der Gleichu…

§ 95a.

Besondere Fälle der Gleichungen

1) $x^3 - 1 = 0$.
Aufl.: $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{2}(1 - \sqrt{-3})$ … $= J_2$. (S. § 49, Nr. 18.)

2) $x^3 + 1 = 0$.
Aufl.: $x_1 = -1$, $x_2 = -J_1$, …

3) α) $x^3 \pm n^3 = 0$.
Aufl.: $x_1 = \mp n$, $x_2 = \mp n J_1$, …

β) $(a - x)^3 = (x - b)^3$.
Aufl.: $x_1 = \frac{1}{2}(a + b)$, x_2 und $x_3 = \frac{1}{2}(a + b) \pm \frac{1}{2}(a - b)\sqrt{-3}$.

4) Wenn $x^3 + Ax^2 + Bx$ die drei ersten Glieder des vollständigen Kubus einer zweiteiligen Größe enthalten soll, welche Beziehung muß alsdann zwischen A und B stattfinden?
Aufl.: $A^2 - 3B = 0$.

5) Die Gleichung $x^3 + Ax^2 + \frac{1}{3}A^2x = C$ aufzulösen*).
Aufl.: $x_1 = -\frac{1}{3}A + \sqrt[3]{C + \frac{1}{27}A^3}$, $x_2 = -\frac{1}{3}A + J_1\sqrt[3]{C + \frac{1}{27}A^3}$,
$x_3 = -\frac{1}{3}A + J_2\sqrt[3]{C + \frac{1}{27}A^3}$.

6) $x^3 - 12x^2 + 48x - 189 = 0$.
Aufl.: $x_1 = 9$, $x_2 = 1\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2}\sqrt{-3}$, $x_3 = 1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}\sqrt{-3}$.

7) Welche Beziehung muß zwischen den Koeffizienten m, n und p stattfinden, damit die Gleichung $x^3 + mx^2 + nx + p = 0$ auf die Form $y^3 + qy = 0$ gebracht werden kann? Welche Beziehung findet zwischen den Wurzeln x_1, x_2, x_3 statt?
Aufl.: Es muß $2m^3 - 9mn + 27p = 0$ sein; die Wurzeln bilden eine arithmetische Progression und es ist $x_1 = -\frac{1}{3}m$, x_2 und $x_3 = -\frac{1}{3}m \pm \frac{1}{3}\sqrt{3(m^2 - 3n)}$.

8) $x^3 - 3bx^2 + (3b^2 - a^2)x - b(b^2 - a^2) = 0$.
Aufl.: $x_1 = b$, $x_2 = b + a$, $x_3 = b - a$.

9) $x^3 - 3(m + n)x^2 + (3m^2 + 6mn + 2n^2)x - m(m^2 + 3mn + 2n^2) = 0$.
Aufl.: $x_1 = m$, $x_2 = m + n$, $x_3 = m + 2n$.

*) Methoden, die allgemeine kubische Gleichung auf diese Form zu reduzieren, finden sich in Matthiessen, Grundzüge der antiken und modernen Algebra. Leipzig [1878] § 146 — 148.

Sammlung

von

Beispielen und Aufgaben

aus der

allgemeinen Arithmetik und Algebra.

In systematischer Folge bearbeitet

für

Gymnasien, Realgymnasien, Oberrealschulen und Gewerbschulen

von

Dr. Eduard Heis,
weil. Prof. der Mathematik und Astronomie an der Königlichen Akademie zu Münster.

[illegible] bis [illegible]. Auflage.

Köln, 1896.
Verlag der M. DuMont-Schauberg'schen Buchhandlung.

§ 95b.

1) Cardanische Formel*) und Formeln von Clausen und Hulbe.

$$x^3 + px + q = 0^{**}).$$

$$x_1 = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}}, \text{ oder}$$

$$x_1 = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q}\left[\sqrt[3]{-1 + \sqrt{1 + \tfrac{4}{27}\tfrac{p^3}{q^2}}} - \sqrt[3]{1 + \sqrt{1 + \tfrac{4}{27}\tfrac{p^3}{q^2}}}\right].$$

Bezeichnet man den ersten Summanden von x_1 mit u, den zweiten mit v, so sind die beiden anderen Wurzeln $x_2 = J_1u + J_2v = -\frac{1}{2}(u + v) + \frac{1}{2}i\sqrt{3}(u - v)$, $x_3 = J_2u + J_1v = -\frac{1}{2}(u + v) - \frac{1}{2}i\sqrt{3}(u - v)$. (Man vergleiche § 95a Nr. 1.)

1) Wie ändert sich die Cardanische Formel um, wenn $x^3 + px - q = 0$, wie, wenn $x^3 - px + q = 0$, wie endlich, wenn $x^3 - px - q = 0$ gegeben ist?

2) Wenn α eine Wurzel der Gleichung $x^3 + px + q = 0$ ist, so sind die beiden anderen Wurzeln $-\frac{1}{2}\alpha \pm \sqrt{-\frac{3}{4}\alpha^2 - p}$. Warum? In welchem Falle sind die beiden anderen Wurzelwerte imaginär?

3) In welchem Falle erscheint der erste durch die Cardanische Formel sich ergebende Wurzelwert unter imaginärer Form?

4) $x^3 + 48x + 504 = 0$.
Aufl.: $x_1 = -6$, $x_2 = 3 + 5\sqrt{-3}$, $x_3 = 3 - 5\sqrt{-3}$.

5) $3x^3 + 4x + 7 = 0$.
Aufl.: $x_1 = -1$, x_2 und $x_3 = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{6}\sqrt{-3}$.

6) $x^3 - 21x - 344 = 0$.
Aufl.: $x_1 = 8$, x_2 und $x_3 = -4 \pm 3\sqrt{-3}$.

7) $x^3 - 3x + 2 = 0$.
Aufl.: $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$.

8) $x^3 - 12x + 16 = 0$.
Aufl.: $x_1 = -4$, x_2 und $x_3 = 2$.

9) $x^3 - 9x + 28 = 0$.
Aufl.: $x_1 = -4$, x_2 und $x_3 = 2 \pm \sqrt{-3}$.

10) $x^3 - 60x + 671 = 0$.
Aufl.: $x_1 = -11$, x_2 und $x_3 = \frac{11}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-123}$.

*) Sollte eigentlich die Formel des Scipio Ferreo oder die Formel des Tartalea heißen. Nach Cardans eigenem Berichte (Ars magna, 1545) hatte Scipio Ferreo die Methode der Auflösung der Gleichungen des dritten Grades zuerst entdeckt; späterhin erfand dieselbe Tartalea selbständig.

**) Erste Auflösung mittels Kegelschnitte von Omar ben Ibrahim Alchayami (um 1080). L'algèbre d'Omar ben Ibrahim publ. et trad. par Woepcke. Paris 1851. Vgl. Grundzüge der antiken und modernen Algebra § 365.