Cardanische Formel, weitere Fälle und Beweis

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Uni Lüneburg, Jan 2005 www.uni-lueneburg.de/mathe-lehramt

Die Gleichung 3. Grades $x^3 + px + q = 0$ heißt Standardform für die Cardano-Lösung. Sie ist mit der **Cardanischen Formel** zu lösen. (Siehe anderes Blatt)

$x^3 + a\,x^2 + b = 0$ Aus diesem Typ erhält man die Standardform durch Division und Substitution $1 + a\dfrac{1}{x^2} = b\dfrac{1}{x^3}$ *mit* $z := \dfrac{1}{x}$ und damit $z^3 - \dfrac{a}{b}x - \dfrac{1}{b} = 0$

Ist $x^3 + b\,x^2 + c\,x + d = 0$ gegeben, lässt man durch $z := x - a$ das Quadrat verschwinden.

$$(z+a)^3 + b\,(z+a)^2 + c(z+a) + d = 0$$

$$z^3 + (3a+b)z^2 + (3a^2 + 2ab + c)z + (d + a^3 + a^2b + ac) = 0$$

Die erste Klammer muss nun also verschwinden: $a := -\dfrac{b}{3}$ und es folgt

$$p := c - \frac{b^2}{3} \quad und \quad q := d + 2\left(\frac{b}{3}\right)^3 - c\,\frac{b}{3}, \text{ also } z^3 + pz + q = 0.$$

Damit ist also jede Gleichung dritten Grades erfasst.

Herleitung der Cardano-Formel: Ansatz $x = u - v$

$$x^3 = (u-v)^3 = u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3 = 3uv(v-u) + u^3 - v^3$$

$$x^3 + 3uv(u-v) - u^3 + v^3 = x^3 + 3uv\,x - u^3 + v^3 = x^3 + px + q$$

also $p = 3uv \;\wedge\; q = v^3 - u^3$ Hieraus lassen sich u und v bestimmen.

$u^3 - \left(\dfrac{p}{3}\right)^3 \dfrac{1}{u^3} + q = 0$ *also* $u^6 + q\,u^3 = \left(\dfrac{p}{3}\right)^3$, es folgt $u^3 = -\dfrac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{p}{3}\right)^3}$

und damit $v^3 = u^3 + q = +\dfrac{q}{2} \pm \sqrt{R}$

Wegen der Bedingung $q = v^3 - u^3$ sind beide Wurzeln mit gleichem Vorzeichen zu nehmen.

Damit ist $xs = \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2} + \sqrt{R}} - \sqrt[3]{\dfrac{q}{2} + \sqrt{R}}$ mit $R = \left(\dfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{p}{3}\right)^3$

als eine Lösung nachgewiesen.

$xs = \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2} - \sqrt{R}} - \sqrt[3]{\dfrac{q}{2} - \sqrt{R}} = -\sqrt[3]{\dfrac{q}{2} + \sqrt{R}} + \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2} + \sqrt{R}}$, mit dem anderen Zeichen vor der inneren Wurzel ergibt sich keine andere Lösung.