

Cardanische Formel für Gleichungen 3. Grades

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, MuPAD 4, <http://haftendorn.uni-lueneburg.de> Aug.06

Automatische Übersetzung aus MuPAD 3.11, Okt 04 Update Aug 06

Es fehlen noch textliche Änderungen, die MuPAD 4 direkt berücksichtigen, das ist in Arbeit.

Web: <http://haftendorn.uni-lueneburg.de>

www.mathematik-verstehen.de

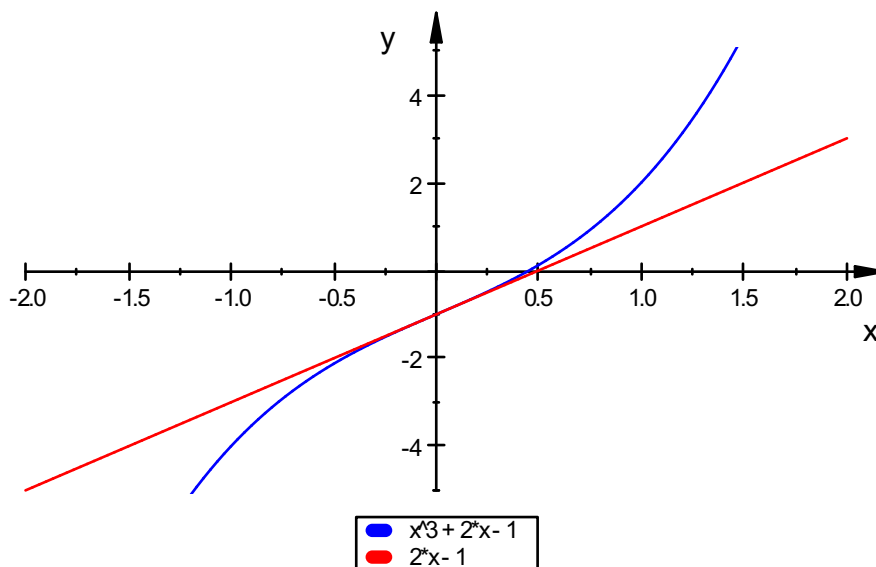
f := (p, q, x) -> x^3 + p*x + q

(p, q, x) → x³ + p·x + q

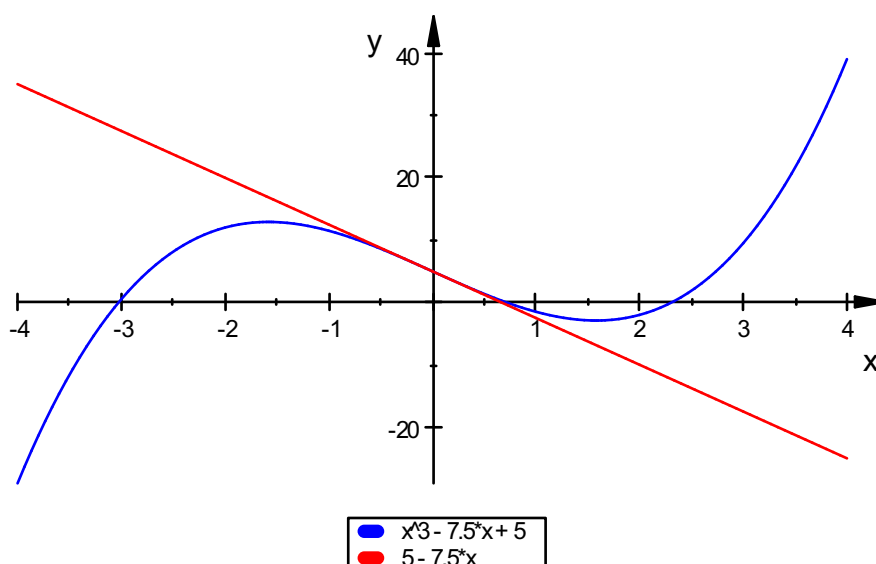
f(2, -1, x)

x³ + 2·x - 1

plotfunc2d(f(2, -1, x), f(2, -1, x) - x^3, x = -2..2, ViewingBoxYRange = -5..5)



plotfunc2d(f(-7.5, 5, x), f(-7.5, 5, x) - x^3, x = -4..4)



$$R := (p, q) \rightarrow (q/2)^2 + (p/3)^3$$

$$(p, q) \rightarrow \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

Cardano-Formel

$$xs := (-q/2 + \sqrt{R(p, q)})^{1/3} - (q/2 + \sqrt{R(p, q)})$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}} - \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}$$

R tritt in der Lösung von Cardano als Radikand einer Quadratwurzel auf.

Welche Besonderheit entsteht, wenn R=0 ist?

$$\text{solve}(R(p, q) = 0, p)$$

$$\left\{ \sqrt[3]{-\frac{27 \cdot q^2}{4}}, \left(\frac{i \cdot \sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) \cdot \sqrt[3]{-\frac{27 \cdot q^2}{4}}, -\left(\frac{i \cdot \sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot \sqrt[3]{-\frac{27 \cdot q^2}{4}} \right\}$$

$$p0 := -3 * (q/2)^{(2/3)}$$

$$-3 \cdot \left(\frac{q}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\text{subs}(xs, p=p0)$$

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2}}$$

$$xs0 := -2 * (q/2)^{(1/3)}$$

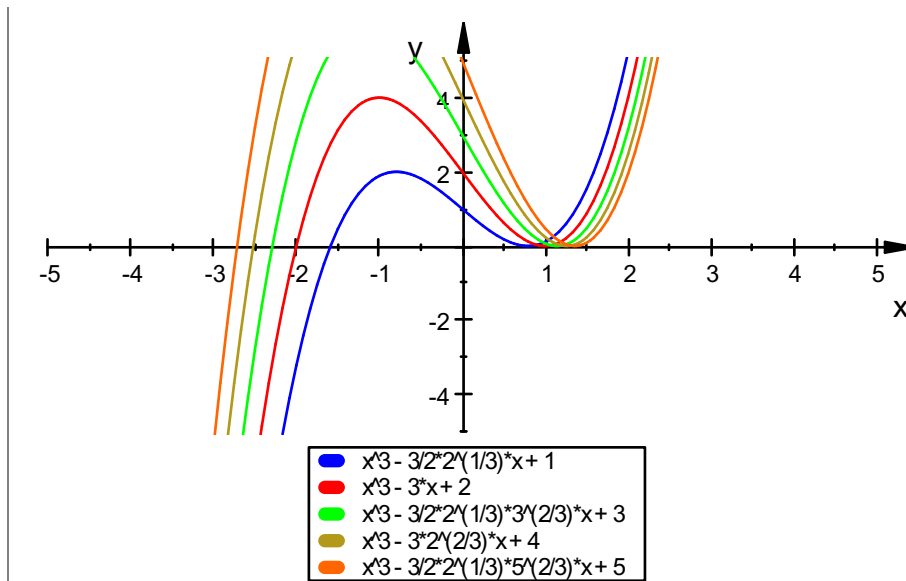
$$-2 \cdot \sqrt[3]{\frac{q}{2}}$$

$$f(p0, q, xs0) \quad // \text{Probe}$$

$$\frac{q}{2} \cdot 6 - 3 \cdot q$$

Zugehörige Graphen:

$$\text{plotfunc2d}(f(p0, q, x) \$q=1..5, x=-5..5, \text{ViewingBoxYF}$$



`diff(f(p0,q,x),x)`

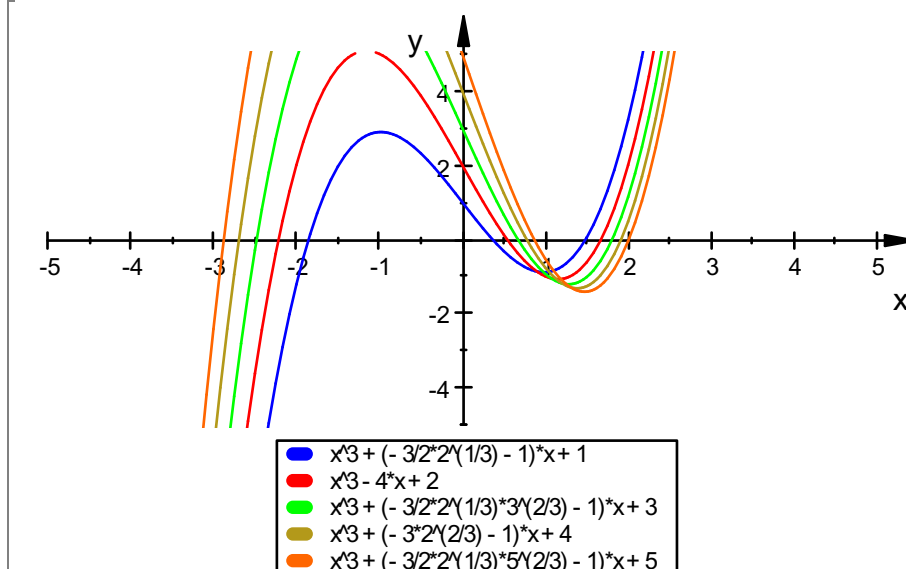
$$3 \cdot x^2 - 3 \cdot \left(\frac{q}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$$

`solve(==0,x)`

$$\left\{ -\sqrt[3]{\frac{q}{2}}, \sqrt[3]{\frac{q}{2}} \right\}$$

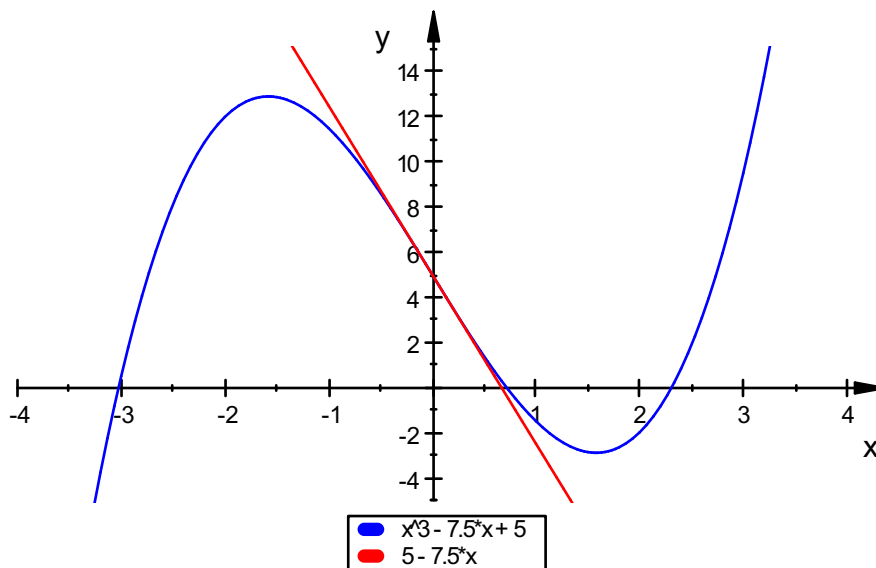
Dieses Ergebnis passt zu den "Affenkastenerkenntnissen"
 Man sieht außerdem: weitere Nullstellen können erst
 entstehen, wenn
 bei fest gehaltenem q die Wendetangente steiler wird.

`plotfunc2d(f(p0-1,q,x) $q=1..5, x=-5..5, ViewingBc`



Die Wendetangente hat aber die Steigung p.

```
plotfunc2d(x^3-7.5*x+5,-7.5*x+5,x=-4..4, Viewing
```



```
xsk:=subs(subs(xs,p=-7.5),q=5)
```

```
- 0.3577536257 + 0.6196474564 · i
```

Zu dieser komplexen 3. Wurzel gehören zwei weitere Wurzeln im

Komplexen. Es stellt sich aber heraus, dass eine davon immer reell ist.

Diese hat den gleichen Betrag wie xsk und das Vorzeichen von q.

Also:

```
xsr:=sign(5)*sqrt(Re(xsk)^2+Im(xsk)^2)
```

```
0.7155072515
```

xs

$$\sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}} - \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}$$

```
xsreell:=(p,q)->sign(q)*sqrt(Re(xs)^2+Im(xs)^2)
```

$$(p, q) \rightarrow \text{sign}(q) \cdot \sqrt{\Re(xs)^2 + \Im(xs)^2}$$

```
xsr:=float(subs(subs(xsreell(p,q),p=-7.5),q=5))
```

```
0.7155072515
```

Hornerschema ergibt für nachfolgende Parabel:

```
par := x -> x^2 + s*x + s^2 + p
```

$$x \rightarrow x^2 + s \cdot x + s^2 + p$$

```
lo := solve (par (x) = 0, x)
```

$$\left\{ -\frac{s}{2} - \frac{\sqrt{-3 \cdot s^2 - 4 \cdot p}}{2}, \frac{\sqrt{-3 \cdot s^2 - 4 \cdot p}}{2} - \frac{s}{2} \right\}$$

```
alle := [op(lo, 1), s, op(lo, 2)]
```

$$\left[\frac{\sqrt{-3 \cdot s^2 - 4 \cdot p}}{2} - \frac{s}{2}, s, -\frac{s}{2} - \frac{\sqrt{-3 \cdot s^2 - 4 \cdot p}}{2} \right]$$

```
subs (subs (alle, s=xsr), p=-7.5)
```

$$[2.309836491, 0.7155072515, -3.025343742]$$

```
numeric::solve (f (-7.5, 5, x) = 0, x)
```

$$\{-3.025343742, 0.7155072515, 2.309836491\}$$