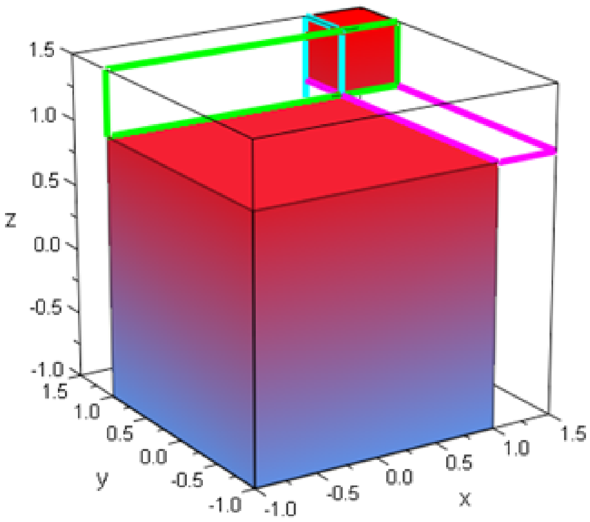
# Kubische Gleichung nach Tartaglia und Cardano




Der große Würfel $(u+v)^3$ ist zusammengesetzt aus
3 Platten mit Kante $(u+v)$ Breite $u$,
Höhe $v$, also Volumen je $u\ v\ (u+v)^3$
+ mittlerer Würfel $u^3$,
+ kleiner Würfel $v^3$
Also gilt:

$$(u+v)^3 = 3uv(u+v) + (u^3+v^3)$$

$$x^3 = p\ x \quad + q$$

Lösungsvorschlag
Setze:

$$p = 3uv \wedge q = u^3 + v^3$$

Dann sind aus diesem Gleichungssystem u und v zu bestimmen.
Diese Darstellung ist die 3D-Umsetzung der Vorstellung von Al Khwarizmi für quadratische Gleichung

$v = \dfrac{p}{3u}$ und damit $q = u^3 + \left(\dfrac{p}{3u}\right)^3$. Diese Gleichung ergibt $u^6 - q\ u^3 + \left(\dfrac{p}{3}\right)^3 = 0$.

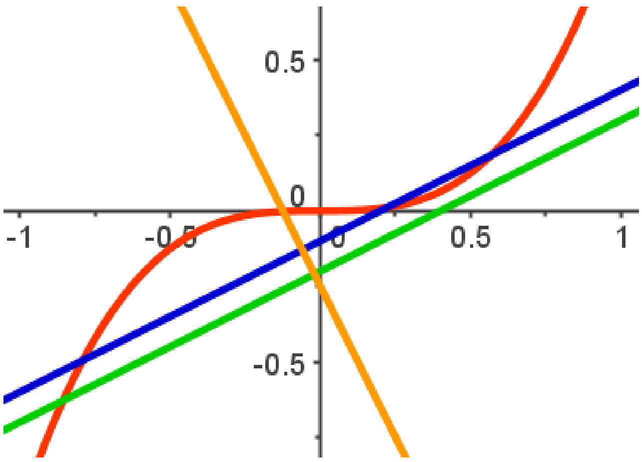
Das ist lösbar als tri-quadratische Gleichung $w^2 - q\ w + \dfrac{p^3}{27} = 0 \quad \text{mit} \quad w := u^3$

Die quadratische Gleichung hat die Lösungen

$$w = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} = \frac{q}{2} \pm \sqrt{R} \ \ mit\ R := \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}.$$

Die Diskriminante R bestimmt das Lösungsverhalten:

1. R>0 ist für negative p garantiert, (zeigt orangefarbene Gerade) aber auch bei positivem p kann ein hinreichend großes q noch R>0 bewirken (grüne Gerade).
2. R=0 Dieser Fall tritt ein, wenn die Gerade die Potenzfunktion berührt.




3. R<0 Dieser Fall heißt casus irreducibilis. w ist dann nicht reell, sonder komplex. Die Gerade schneidet die Potenzfunktion dann dreimal.

Diese Fälle werden nun im Einzelnen untersucht.