Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Juli 03

Welt 1 Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$

Abgeschlossenheit,
Assoziativität
Existenz des neutralen Elementes
Existenz der Inversen

Die Summe zweier ganzer Zahlen ist eine ganze Zahl.
Man kann beliebig gruppieren.
Die Null kann man stets addieren ohne Wirkung.
Zu jeder Zahl gibt es die Gegenzahl, deren Addition Null ergibt.

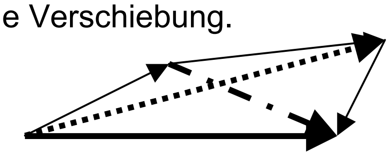
Welt 2 Quintus und seine Auto-Umsätze und Umsatz-Änderungen

Quintus verkauft 5 Autotypen (Primo, Sekondo, Terzio, Quarto,Quinto). Im Januar verkaufte er (10,2,15,26,4), Im Februar (9,8,10,16,7). Zusammen waren das (, , , ,).
Die Umsatz-Änderung war (, , , ,). Was verkaufte er im März, wenn sich die Umsatzänderung wiederholt? Bezeichne AUÄ einen Auto-Umsatz oder eine Auto-Umsatz-Anderung.
Die Summe zweier AUÄ ist eine mögliche AUÄ.
Für eine Gesamt-AUÄ ist es egal, wie man die Rechnungen gruppiert.
(0,0,0,0,0) ist eine mögliche AUÄ..
Zu jeder AUÄ gibt es auch die entgegengesetzte AUÄ.

Abgeschlossenheit,
Assoziativität
Existenz des neutralen Elementes
Existenz der Inversen

Welt 3 Verschiebungen im 3D-Raum

Die Summe von Verschiebungen soll durch das Hintereinanderausführen erklärt sein.
Die Summe von Verschiebungen ist dann wieder eine Verschiebung.
Es ist egal, wie man Verschiebungen gruppiert:
Die "Nullverschiebung" ist: gar nicht verschieben.
Zu jeder Verschiebung gibt es die Rückwärts-Verschiebung.



Welt 4 Die Polynome bis 2. Grad

p und q seien solche Polynome, also $p(x)=a\,x^2+b\,x+c \quad mit \quad a,b,c\in\Re$,
$q(x)=r\,x^2+s\,x+t \quad mit \quad r,s,t\in\Re$. Dann soll die Summe $p+q$ +sein:
$(p+q)(x)=(a+r)\,x^2+(b+s)\,x+(c+t)$ Man überlege sich wieder alle vier Gesetze.

Welt 5 Die Kleinsche Vierergruppe

+	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Das soll hier heißen a+a=e, b+c=a, links + oben = Tabelleneintrag
Alle Ergebnisse liegen in der Menge M={e,a,b,c}.
Das Gruppieren müsste man genau prüfen.
e ist Neutrales Element.
Jedes Element ist zu sich selbst invers.

Alle diese Welten (und viele andere) passen zu einem gemeinsamen Konzept. Von den einzelnen Wirklichkeiten wird das Gemeinsame "weggezogen", **abstrahiert**

Es gibt eine Menge M. Die Elemente seien mit a,b,c... bezeichnet.
Es ist eine Verknüpfung "+" unter diesen Elementen erklärt.

G1	**a+b ist aus M**	**Abgeschlossenheit**
G2	**(a+b)+c=a+(b+c)**	**Assoziativgesetz**
G3	**Es gibt ein neutrales Element**	**Existenz des Neutralen**
G4	**Zu jedem a gibt es $\tilde{a}$ aus M mit a+$\tilde{a}$=neutrales Element**	

Eine Menge M mit Verknüpfung "+" heißt algebraische Struktur (M,+).
Erfüllt (M,+) die Gesetze G1, G2, G3, G4, dann ist (M,+) eine Gruppe.
Erfüllt (M,+) die Gesetze G1, G2, dann ist (M,+) eine Halbgruppe.
Erfüllt (M,+) die Gesetze G1, G2, G3, dann ist (M,+) eine Halbgruppe mit neutr.El.
Erfüllt (M,+) noch G5 a+b=b+a Kommutativgesetz,
dann ist (M,+) kommutative Halbgruppe, bzw. kommutative Gruppe (abelsche Gruppe).