Hat eine algebraische Struktur zwei Verknüpfungen, kann sie Halbring, Ring, Körper oder nichts davon sein.
Man schreibt die Verknüpfungen als + und $\bullet$, untersucht (M,+, $\bullet$).
Es geht um die folgenden zu fordernden Gesetze (Axiome). $a,b,c... \in \mathbf{M}$

D $\quad a\bullet (b + c) = a\bullet b \ + a\bullet c$ Distributivgesetz

Dieses Axiom koppelt die beiden Verknüpfungen.

Welt 6 Cafete

Wenn ich mir an 5 Tagen der Woche für 50 Cent Kaffee und für 80 Cent Brötchen kaufe, ist es egal, ob ich meine Gesamtkosten als 5 mal 50+80 Cent oder als 5$\bullet$50 Cent für Kaffee plus 5$\bullet$80 Cent für Brötchen berechne.

Axiome

Ist (M,+) Halbgruppe, gilt D und ist (M, $\bullet$) Halbgruppe, dann ist (M,+ $\bullet$) **Halbring**.
Ist (M,+) komm. Gruppe, gilt D und ist (M, $\bullet$) Halbgruppe, dann ist (M,+ $\bullet$) **Ring.**
Ist (M,+) komm. Gruppe, gilt D und ist (M', $\bullet$) komm. Gruppe, dann ist (M,+ $\bullet$) **Körper.** M'=M\{0}

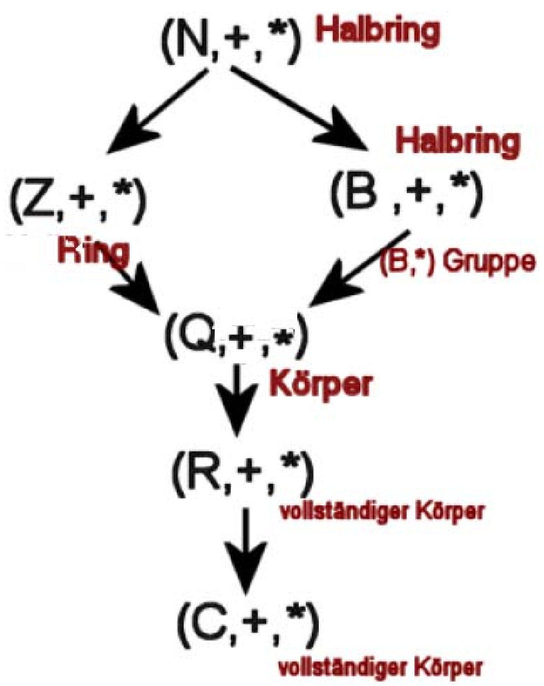
Welt 1 Die ganzen Zahlen $(\mathbb{Z},+,\bullet)$, $(\mathbb{Z},+)$ ist Gruppe (s.o.)

Die Produkt zweier ganzer Zahlen ist eine ganze Zahl. ← Abgeschlossenheit,
Man kann beliebig gruppieren. ← Assoziativität
Die Eins kann man stets Multiplizieren ohne Wirkung. ← Existenz des neutralen Elementes
Aber ← **Keine** Existenz aller Inversen
Zu keiner Zahl außer -1 und 1 gibt es den Kehrwert a*, **a$\bullet$a*=1**.
Also ist $(\mathbb{Z},+,\bullet)$ ein Ring aber kein Körper.

Welt 4 Polynome bis Grad 2

Die Multiplikation p(x) $\bullet$ q(x) führt zu einem Polynom 4. Grades, $\bullet$ ist also ungeeignet.
Die Hintereinanderausführung p(q(x)) führt auch zu einem Polynom 4. Grades, ist ungeeignet.

Aufbau des Zahlsystems in der Schule



Klasse 1-5 arbeitet mit den nicht abgeschlossen Strukturen: Zahlen bis 10,..... zuerst + dann $\bullet$.
Abziehen und Teilen ist nur eingeschränkt möglich.
Klasse 6 macht die multiplikative Struktur zur Gruppe,
Teilen ist jetzt uneingeschränkt möglich, Abziehen nicht.
Klasse 7 macht die addititive Struktur von N zur Gruppe.
Abziehen ist jetzt uneingeschränkt möglich,Teilen nicht.
Gleich anschließend wird sowohl addititive Struktur von B zur Gruppe gemacht (das Negative von Brüchen) als auch die multiplikative Struktur von Z zur Gruppe gemacht (Brüche aus Negativen Zahlen).
Schönerweise führt beides zum Körper Q.
Dem widmet sich **Klasse 8**.
Klasse 9 sorgt für manche Lösungen algebraischer Gleichungen, x^2 =2 ...., führt dann aber gleich unter der "Definition**" jede denkbare Kommazahl ist reelle Zahl** den Körper R ein. Jede konvergente Folge in R konvergiert gegen eine Zahl von R, Darum heiß R **vollständig.** Die Komplexen Zahlen C sind ebenfalls ein vollständiger Körper, in dem nun alle algebraischen Gleichungen lösbar sind, x^2 = -1 auch.