

3 Vektoren mit Parameter, einfach

Lineare Abhängigkeit:

Gesucht ist a so, dass die Vektoren linear abhängig werden

$$\mathbf{v1} := \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v2} := \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v3} := \begin{bmatrix} a \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\text{solve}(s \cdot \mathbf{v1} + r \cdot \mathbf{v2} + t \cdot \mathbf{v3} = 0, \{s, r, t\}) \rightarrow \text{false}$

$$\mathbf{aa} := \text{augment}(\text{augment}(\mathbf{v1}, \mathbf{v2}), \mathbf{v3}) \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & a \\ 3 & 3 & 3 \\ 5 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$\det(\mathbf{aa}) \rightarrow 3 \cdot (a-11)$ ⚠ Nur wenn die Determinante verschwindet, kann es nichttriviale Lösungen geben. Bei $\det \neq 0$ wäre $s=r=t=0$ die einzig Lösung. Dann wären die Vektoren linear unabhängig. Man soll aber a so suchen, so dass die Vektoren linear abhängig sind. Also $\text{solve}(\det(\mathbf{aa})=0, a) \rightarrow a=11$ ⚠ (konnte man ja auch so sehen).

aa	$\begin{bmatrix} 2 & -1 & a \\ 3 & 3 & 3 \\ 5 & 6 & 2 \end{bmatrix}$
$mRowAdd\{3,aa,1,2\}$	$\begin{bmatrix} 2 & -1 & a \\ 9 & 0 & 3 \cdot a + 3 \\ 5 & 6 & 2 \end{bmatrix}$
$mRowAdd\left\{6, \begin{bmatrix} 2 & -1 & a \\ 9 & 0 & 3 \cdot a + 3 \\ 5 & 6 & 2 \end{bmatrix}, 1, 3\right\}$	$\begin{bmatrix} 2 & -1 & a \\ 9 & 0 & 3 \cdot a + 3 \\ 17 & 0 & 6 \cdot a + 2 \end{bmatrix}$
$mRow\left\{17, \begin{bmatrix} 2 & -1 & a \\ 9 & 0 & 3 \cdot a + 3 \\ 17 & 0 & 6 \cdot a + 2 \end{bmatrix}, 2\right\}$	$\begin{bmatrix} 2 & -1 & a \\ 153 & 0 & 51 \cdot (a+1) \\ 17 & 0 & 6 \cdot a + 2 \end{bmatrix}$
$umgeformt:=mRowAdd\left\{-9, \begin{bmatrix} 2 & -1 & a \\ 153 & 0 & 51 \cdot (a+1) \\ 17 & 0 & 6 \cdot a + 2 \end{bmatrix}, 3, 2\right\}$	$\begin{bmatrix} 2 & -1 & a \\ 0 & 0 & 33 - 3 \cdot a \\ 17 & 0 & 6 \cdot a + 2 \end{bmatrix}$
$\{\}$	
5/99	

1.2

Man kann natürlich auch die Gleichung $r \mathbf{v}_1 + s \mathbf{v}_2 + t \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ als Gleichungssystem lösen mit den Möglichkeiten, die sich im Calculator-Fenster mit "Zeilenoperationen" für Matrizen ergeben.

Das ergibt dann **umgeformt** $\rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & a \\ 0 & 0 & 33-3 \cdot a \\ 17 & 0 & 6 \cdot a+2 \end{bmatrix}$

Hier sieht man, $(33-3a) \cdot t = 0 \rightarrow (33-3 \cdot a) \cdot t = 0$ ergibt bei $a=11$ für t eine beliebige Lösung. Damit ergibt sich aus Zeile 3 eine Lösung, nämlich

$$\text{solve} \left(17r + (6a+2)t = 0, r \right) \rightarrow r = \frac{-2 \cdot (3 \cdot a + 1) \cdot t}{17}$$

$$\text{Aus der ersten Zeile folgt } \text{solve} \left(2 \frac{-2 \cdot (3 \cdot a + 1) \cdot t}{17} - s + a t = 0, s \right) \rightarrow s = \frac{(5 \cdot a - 4) \cdot t}{17}$$

($a \neq 11$) hat $r=0$, $t=0$, $s=0$ zur Folge, Dann sind die Vektoren linear unabhängig.

$$a=11 \text{ hat } t \text{ bel. } r = \frac{-2 \cdot (3 \cdot a + 1) \cdot t}{17} \Big|_{a=11} \rightarrow r = -4 \cdot t \quad s = \frac{(5 \cdot a - 4) \cdot t}{17} \Big|_{a=11} \rightarrow s = 3 \cdot t \text{ zur}$$

Folge.

Das heißt, dass die drei Vektoren linear abhängig sind. Mit $t=1$ folgt

$$-4 \cdot \mathbf{v}_1 + 3 \cdot \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \rightarrow \begin{bmatrix} a-11 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Big|_{a=11} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3 Vektoren mit Parameter

Lineare Abhängigkeit:

Gesucht ist a so, dass die Vektoren linear abhängig werden

$$\mathbf{v1} := \begin{bmatrix} a \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v2} := \begin{bmatrix} 1 \\ -a \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v3} := \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \cdot a \end{bmatrix}$$

$\text{solve}(s \cdot \mathbf{v1} + r \cdot \mathbf{v2} + t \cdot \mathbf{v3} = 0, \{s, r, t\}) \rightarrow \text{false}$

$$\mathbf{aa} := \begin{bmatrix} a & 1 & -2 \\ -3 & -a & -2 \\ 5 & 2 & 2 \cdot a \end{bmatrix}$$

$\det(\mathbf{aa}) \rightarrow -2 \cdot (a^3 - 1)$ ⚠ Nur wenn die Determinante verschwindet, kann es nichttriviale Lösungen geben. Bei $\det \neq 0$ wäre $s=r=t=0$ die einzig Lösung. Dann wären die Vektoren linear unabhängig. Man soll aber a so suchen, so dass die Vektoren linear abhängig sind. Also $\text{solve}(\det(\mathbf{aa})=0, a) \rightarrow a=1$ ⚠ (konnte man ja auch so sehen).

$$\begin{array}{l}
 \left[\begin{array}{ccc|ccc}
 & a & & 1 & & -2 \\
 & 2 \cdot (a+2) \cdot (a^2-3) & & 0 & -4 \cdot (a+1) \cdot (a+2) & \\
 & -2 \cdot (a+1) \cdot (2 \cdot a-5) & & 0 & 4 \cdot (a+1) \cdot (a+2) &
 \end{array} \right] \\
 \text{rowAdd} \left(\left[\begin{array}{ccc|ccc}
 & a & & 1 & & -2 \\
 & 2 \cdot (a+2) \cdot (a^2-3) & & 0 & -4 \cdot (a+1) \cdot (a+2) & \\
 & -2 \cdot (a+1) \cdot (2 \cdot a-5) & & 0 & 4 \cdot (a+1) \cdot (a+2) &
 \end{array} \right], 2,3 \right) \\
 \left[\begin{array}{ccc|ccc}
 & a & & 1 & & -2 \\
 & 2 \cdot (a+2) \cdot (a^2-3) & & 0 & -4 \cdot (a+1) \cdot (a+2) & \\
 & 2 \cdot a^3-2 & & 0 & 0 &
 \end{array} \right] \\
 \text{umgeformt:} = \left[\begin{array}{ccc|ccc}
 & a & & 1 & & -2 \\
 & 2 \cdot (a+2) \cdot (a^2-3) & & 0 & -4 \cdot (a+1) \cdot (a+2) & \\
 & 2 \cdot a^3-2 & & 0 & 0 &
 \end{array} \right] \\
 \left[\begin{array}{ccc|ccc}
 & a & & 1 & & -2 \\
 & 2 \cdot (a+2) \cdot (a^2-3) & & 0 & -4 \cdot (a+1) \cdot (a+2) &
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

2.2

Man kann natürlich auch die Gleichung $r \mathbf{v}_1 + s \mathbf{v}_2 + t \mathbf{v}_3 = 0$ als Gleichungssystem lösen mit den Möglichkeiten, die sich im Calculator-Fenster mit "Zeilenoperationen" für Matrizen ergeben.

Das ergibt dann **umgeformt** $\rightarrow \begin{bmatrix} a & 1 & -2 \\ 2 \cdot (a+2) \cdot (a^2-3) & 0 & -4 \cdot (a+1) \cdot (a+2) \\ 2 \cdot a^3 - 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Hier sieht man, $(2a^3 - 2) \cdot r = 0 \rightarrow (2 \cdot a^3 - 2) \cdot r = 0$ ergibt bei $a=1$ für r eine beliebige Lösung. Damit ergibt sich aus Zeile 2 eine Lösung, nämlich

solve $(2 \cdot (a+2) \cdot (a^2-3) \cdot r - 4 \cdot (a+1) \cdot (a+2) \cdot t = 0, t) \rightarrow t = \frac{(a^2-3) \cdot r}{2 \cdot (a+1)}$ or $a=-2$ zu $a=-2$ siehe unten

Aus der ersten Zeile folgt solve $(r \cdot a + s + (-2) \cdot \frac{(a^2-3) \cdot r}{2 \cdot (a+1)} = 0, s) \rightarrow s = \frac{-(a+3) \cdot r}{a+1} \triangleleft$

($a \neq 1$) hat $r=0, t=0, s=0$ zur Folge, Dann sind die Vektoren linear unabhängig.

$$a=1 \text{ hat } r \text{ bel. } t = \frac{(a^2-3) \cdot r}{2 \cdot (a+1)} \Big|_{a=1} \rightarrow t = \frac{-r}{2} \quad s = \frac{-(a+3) \cdot r}{a+1} \Big|_{a=1} \rightarrow s = -2 \cdot r \text{ zur Folge.}$$

Das heißt, dass die drei Vektoren linear abhängig sind. Mit $r=1$ folgt

$$v_1 - 2 \cdot v_2 - \frac{1}{2} \cdot v_3 \rightarrow \begin{bmatrix} a-1 \\ 2 \cdot a-2 \\ 1-a \end{bmatrix} v_1 - 2 \cdot v_2 - \frac{1}{2} \cdot v_3 \Big|_{a=1} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Zunächst scheint es noch eine weitere Möglichkeit zu geben:

$a=-2$ hat $r=0$, t beliebig aus Zeile 2 und $s=2t$ aus Zeile 1 zur Folge.

$$0 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + v_3 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \cdot a-2 \\ 2 \cdot a+4 \end{bmatrix} 0 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + v_3 \Big|_{a=-2} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \det(\mathbf{a} \Big|_{a=-2}) \rightarrow 18$$

Also ist das doch keine Lösung. Beim Berechnen ist nämlich mit $(2a+4)$ multipliziert worden und das ist für $a=-2$ nicht erlaubt.

$aa a=-2$	$\begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \\ 5 & 2 & -4 \end{bmatrix}$
$mRowAdd\left(-2, \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \\ 5 & 2 & -4 \end{bmatrix}, 1, 2\right)$	$\begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & -4 \end{bmatrix}$
$mRowAdd\left(-2, \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & -4 \end{bmatrix}, 1, 3\right)$	$\begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 9 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$\det\left(\begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 9 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$	18
\square	
	4/99

2.5