Lineare Algebra

Vorlesung mit integrierten Übungen WS 12-13
Studiengang LBS Unterrichtsfach Mathematik

Reine Algebra

Algebraische Strukturen
- Halbgruppe
- Gruppe
- Halbring
- Ring
- Körper

Lineare Algebra

Vektorräume
- Vektoren
- Lineare Unabhängigkeit
- Basis, Dimension
- Skalarprodukt
- Kreuzprodukt

Teil 2 Abbildungen

- Matrizen
- Lineare Gleichungssysteme
- Abbildungen
- Eigenwerte, Eigenvektoren
- Hauptachsentransformation

Seite: Definitionen von Halbgruppe und Gruppe

Es gibt eine Menge M. Die Elemente seien mit a, b, c... bezeichnet.
Es ist eine Verknüpfung „o" unter diesen Elementen erklärt.
Axiom G1 a o b ist aus M Abgeschlossenheit
Erfüllt (M,o) dieses Axiom (Gesetz), dann ist (M,o) eine
Algebraische Struktur

Beispiele zum Überlegen: Ist (M,o) eine algebraische Struktur? j/n

1. M={Die echt positiven natürlichen Zahlen}, o ist plus-rechnen
2. M={Die negativen natürlichen Zahlen}, o ist plus-rechnen
3. M={Die geraden ganzen Zahlen}, o ist plus-rechnen
4. M={Die graden natürlichen Zahlen}, o ist mal-rechnen
5. M={Die ungeraden natürlichen Zahlen}, o ist plus-rechnen
6. M={Die ungeraden ganzen Zahlen}, o ist mal-rechnen
7. M={Die Vielfachen von 5 Zahlen}, o ist …….-rechnen
8. M={Die 2x2-Matrizen}, o ist plus-rechnen
9. M={Die Kongruenzabbildungen}, o ist hintereinanderausführen
10. Selber Beispiele suchen

Seite: Definitionen von Halbgruppe und Gruppe

Es gibt eine Menge M. Die Elemente seien mit a, b, c... bezeichnet.
Es ist eine Verknüpfung „o" unter diesen Elementen erklärt.
Axiom G1 a o b ist aus M Abgeschlossenheit
Axiom G2 Für alle a, b, c aus M gilt (a o b)o c = a o(b o c) Assoziativität
Erfüllt (M,o) diese Axiome, dann ist (M,o) eine

Halbgruppe

Beispiele zum Überlegen: Ist (M,o) eine Halbgruppe? j/n

Algebraische Strukturen
- Halbgruppe
- Gruppe

1. M={Die echt positiven natürlichen Zahlen}, o ist plus-rechnen
2. M={Die negativen natürlichen Zahlen}, o ist plus-rechnen
3. M={Die geraden ganzen Zahlen}, o ist plus-rechnen
4. M={Die geraden natürlichen Zahlen}, o ist mal-rechnen
5. *M={Die ungeraden natürlichen Zahlen}, o ist plus-rechnen*
6. M={Die ungeraden ganzen Zahlen}, o ist mal-rechnen
7. M={Die Vielfachen von 5 Zahlen}, o ist …….-rechnen
8. M={Die 2x2-Matrizen}, o ist plus-rechnen
9. M={Kongruenzabbildungen}, o ist hintereinander ausführen
10. Selber Beispiele suchen

Seite: Definitionen von Halbgruppe und Gruppe

Es gibt eine Menge M. Die Elemente seien mit a, b, c... bezeichnet.
Es ist eine Verknüpfung „o" unter diesen Elementen erklärt.
Axiom G1 a o b ist aus M Abgeschlossenheit
Axiom G2 Für alle a ,b, c aus M gilt (a o b)o c = a o(b o c) Assoziativität
Axiom G3 Es existiert ein Element e in M, so dass für alle a aus M gilt
e o a = a und a o e = a e heiß neutrales Element (Einslement, Nullelement)
Erfüllt (M,o) diese Axiome (Gesetz), dann ist (M,o) eine
Halbgruppe mit neutralem Element (Monoid)

Beispiele zum Überlegen: Ist (M,o) eine Halbruppe mit Null oder Eins?j/n

1. M={Die echt positiven natürlichen Zahlen}, o ist plus-rechnen
2. M={Die negativen natürlichen Zahlen}, o ist plus-rechnen
3. M={Die geraden ganzen Zahlen}, o ist plus-rechnen
4. M={Die graden natürlichen Zahlen}, o ist mal-rechnen
5. *M={Die ungeraden natürlichen Zahlen}, o ist plus-rechnen*
6. M={Die ungeraden ganzen Zahlen}, o ist mal-rechnen
7. M={Die Vielfachen von 5 Zahlen}, o ist …….-rechnen
8. M={Die 2x2-Matrizen}, o ist plus-rechnen
9. M={Kongruenzabbildungen}, o ist hintereinander ausführen
10. Selber Beispiele suchen

Seite: Definitionen von Halbgruppe und Gruppe

Es gibt eine Menge M. Die Elemente seien mit a, b, c... bezeichnet.
Es ist eine Verknüpfung „o" unter diesen Elementen erklärt.
Erfüllt (M,o) die Axiome einer Halbgruppe mit neutralem Element e und gilt
Axiom G4 Zu jedem a aus M existiert ein a‘ in M mit der Eigenschaft a o a‘ = e und a‘ o a = e . Es ist dann a‘ das Inverse (Element) zu a.

Ist auch G4 erfüllt, dann heißt (M,o) eine Gruppe

Beispiele zum Überlegen: Ist (M,o) eine Gruppe? j/n

1. *M={Die echt positiven natürlichen Zahlen}, o ist plus-rechnen*
2. *M={Die echt negativen natürlichen Zahlen}, o ist plus-rechnen*
3. M={Die geraden ganzen Zahlen}, o ist plus-rechnen
4. *M={Die graden natürlichen Zahlen}, o ist mal-rechnen*
5. *M={Die ungeraden natürlichen Zahlen}, o ist plus-rechnen*
6. M={Die ungeraden ganzen Zahlen}, o ist mal-rechnen
7. *M={Die Vielfachen von 5 Zahlen}, o ist …….-rechnen*
8. M={Die 2x2-Matrizen}, o ist plus-rechnen
9. M={Kongruenzabbildungen}, o ist hintereinander ausführen
10. Selber Beispiele suchen

Seite: Definitionen von Halbgruppe und Gruppe

Es gibt eine Menge M. Die Elemente seien mit a,b,c... bezeichnet.
Es ist eine Verknüpfung „o" unter diesen Elementen erklärt.
Erfüllt (M,o) die Axiome einer Halbgruppe oder einer Gruppe
und gilt
Axiom G5 Für alle a, b aus M gilt a o b = b o a,
Dann ist (M,o) eine kommutative Halbgruppe, bzw. Gruppe
Abelsche Halbgruppe bzw. abelsche Gruppe

Beispiele zum Überlegen: Ist (M,o) eine abelsche Gruppe? j/n

1. *M={Die positiven natürlichen Zahlen}, o ist plus-rechnen*
2. *M={Die negativen natürlichen Zahlen}, o ist plus-rechnen*
3. *M={Die geraden ganzen Zahlen}, o ist plus-rechnen*
4. *M={Die graden natürlichen Zahlen}, o ist mal-rechnen*
5. *M={Die ungeraden natürlichen Zahlen}, o ist plus-rechnen*
6. *M={Die ungeraden ganzen Zahlen}, o ist mal-rechnen*
7. *M={Die Vielfachen von 5 Zahlen}, o ist ....-rechnen*
8. *M={Die 2x2-Matrizen}, o ist plus-rechnen*
9. M={Kongruenzabbildungen}, o ist hintereinander ausführen
10. M={Die ganzen Zahlen}= Z , o ist plus-rechnen
11. M={Die echt positiven Bruchzahlen}, , o ist mal-rechnen
12. M={ $a+b\sqrt{2}$ mit a, b aus Q}, o ist plus-rechnen
13. M={$a+b\sqrt{2}$ mit a, b aus Q}, o ist mal-rechnen

Seite: Definitionen von Halbring, Ring, Körper

Es gibt eine Menge M. Die Elemente seien mit a, b, c... bezeichnet.
Es ist eine Verknüpfung „+" unter diesen Elementen erklärt.
Es ist eine Verknüpfung „o" unter diesen Elementen erklärt.
Axiom D Für alle a,b,c aus M gilt a o (b + c)=a o b + a o c Distributivgesetz
Erfüllt (M,+) die Axiome einer Halbgruppe
Erfüllt (M,o) die Axiome einer Halbgruppe und gilt dazu Axiom D,
Dann ist (M,+,o) ein Halbring.
Ist (M,+) abelsche Gruppe, dann ist (M,+,o) ein Ring.
Ist im Ring (M,+,o) auch (M,o) abelsche Gruppe, dann ist (M,+,o) Körper

1. M={Die ganzen Zahlen}=$\mathbb{Z}$, + ist plus-rechnen, o ist plus-rechnen
2. M={Die positiven Bruchzahlen mit 0}, + ist plus-rechnen , o ist mal-rechnen
3. M={ $a+b\sqrt{2}$ mit a, b aus Q}, o ist plus-rechnen
4. M={ $a+b\sqrt{2}$ mit a, b aus Q}, o ist mal-rechnen
5. M={Die rationalen Zahlen}= $\mathbb{Q}$, plus und mal wie üblich
6. M={Die reellen Zahlen}=$\mathbb{R}$, plus und mal wie üblich

Diese Menge heißt: Q adjungiert Wurzel 2 $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$

Seite: Definitionen von Halbring, Ring, Körper

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{N} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathbb{Z} \arrow[dr] & & \mathbb{B} \arrow[dl] \\
& \mathbb{Q} \arrow[d] & \\
& \mathbb{R} \arrow[d] & \\
& \mathbb{C} &
\end{tikzcd}$$

1. M={Die ganzen Zahlen}=$\mathbb{Z}$, + ist plus-rechnen, o ist plus-rechnen
2. M={Die positiven Bruchzahlen mit 0}, + ist plus-rechnen , o ist mal-rechnen
3. M={ $a+b\sqrt{2}$ mit a, b aus Q}, o ist plus-rechnen
4. M={ $a+b\sqrt{2}$ mit a, b aus Q}, o ist mal-rechnen
5. M={Die rationalen Zahlen}= $\mathbb{Q}$, plus und mal wie üblich
6. M={Die reellen Zahlen}=$\mathbb{R}$, plus und mal wie üblich

Diese Menge heißt:
Q adjungiert Wurzel 2 $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$

Seite: Definitionen von Halbgruppe und Gruppe

Es gibt eine Menge M. Die Elemente seien mit a, b, c... bezeichnet.
Es ist eine Verknüpfung „o" unter diesen Elementen erklärt.
Axiom G1 a o b ist aus M Abgeschlossenheit
Erfüllt (M,o) dieses Axiom (Gesetz), dann ist (M,o) eine
Algebraische Struktur

Beispiele zum Überlegen: Ist (M,o) eine algebraische Struktur? j/n

1. M={Die echt positiven natürlichen Zahlen}, o ist plus-rechnen
2. M={Die negativen natürlichen Zahlen}, o ist plus-rechnen
3. M={Die geraden ganzen Zahlen}, o ist plus-rechnen
4. M={Die graden natürlichen Zahlen}, o ist mal-rechnen
5. M={Die ungeraden natürlichen Zahlen}, o ist plus-rechnen
6. M={Die ungeraden ganzen Zahlen}, o ist mal-rechnen
7. M={Die Vielfachen von 5 Zahlen}, o ist …….-rechnen
8. M={Die 2x2-Matrizen}, o ist plus-rechnen
9. M={Die Kongruenzabbildungen}, o ist hintereinanderausführen
10. Selber Beispiele suchen

Seite: Definition eines Vektorraumes

Es gibt eine Menge V. Die Elemente seien mit v, w, u, ... bezeichnet.
Es ist eine Verknüpfung „+" unter diesen Elementen erklärt. $\mathbb{R}$
(V,+) ist abelsche Gruppe
Es gibt einen Körper K mit den Element r, s, t ... $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ldots$ **Meist ist** $K=\mathbb{R}$
Es ist eine Verknüpfung zwischen K und V erklärt, die man skalare Multiplikation nennt. Es gilt $\alpha\cdot v\in V$

$$Axiom\ (1)\quad 1\cdot v=v$$

$$Axiom\ A\quad (\alpha\cdot\beta)\cdot v=\alpha\cdot(\beta\cdot v)$$

$$Axiom\ D1\quad (\alpha+\beta)\cdot v=\alpha\cdot v+\beta\cdot v$$

$$Axiom\ D2\quad \alpha\cdot(v+w)=\alpha\cdot v+\alpha\cdot w$$

heißt $(V,+)_K$ **Vektorraum über K,** $(V,+)_{\mathbb{R}}$ **ist VR über** $\mathbb{R}$

Die Elemente von $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^n$ heißen **n-Tupel** über $\mathbb{R}$
Man schreibt sie zeilenweise $(v_1, v_2,\ldots,v_n)$ oder spaltenweise $\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}$

Die v_i heißen Komponenten.

Vom Punktraum zum Vektorraum

Der Zahlenstrahl $\mathbb{R}$, die Kooerdinatenebene $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$,

der 3-D-Raum $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^3$ sind Punkträume.

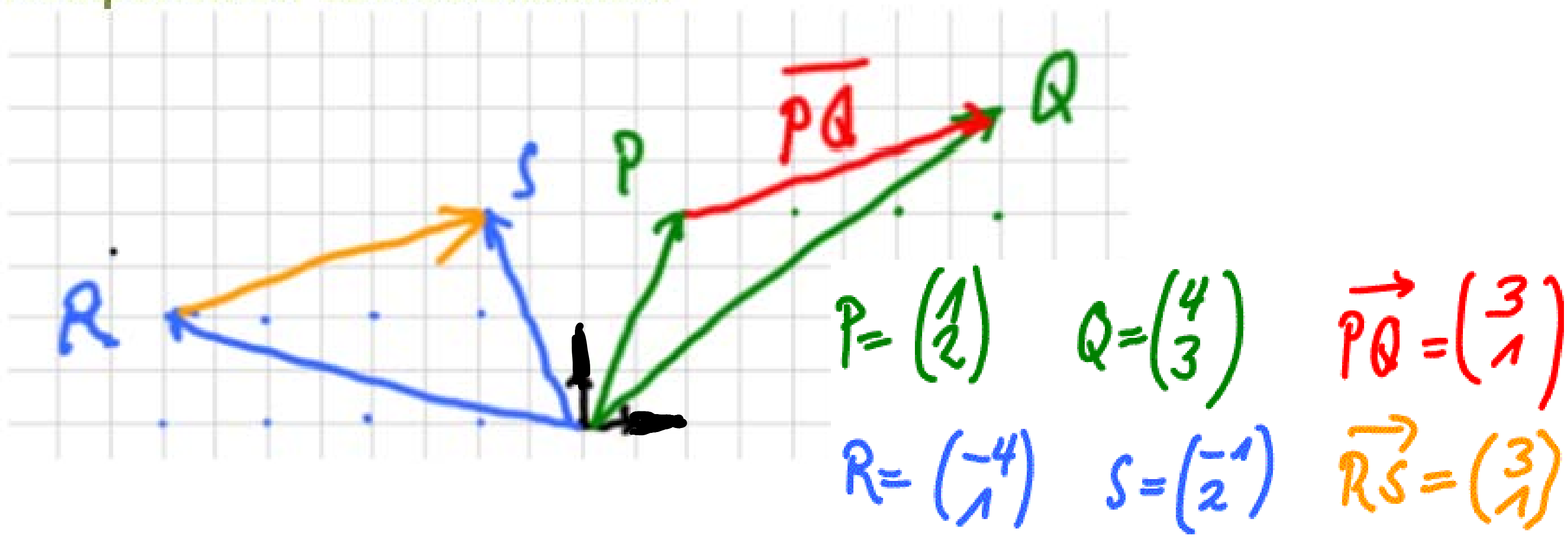
Sie sind durch reelle Zahle, Paare von Reelen Zahle und Tripel von reellen Zahlen beschreibbar.

In ihnen lassen sich Pfeile definieren:

Der Pfeil $\overrightarrow{PQ}$ hat als Komponenten die Differenzen den entsprechenden Komponenten von P und Q.

Zwischen den Pfeilen wird eine Äqivalenzrelation definiert.

Zwei Pfeile heißen äquivalent, wenn sie an jedem Platz in ihrem Komponenten übereinstimmen.



Äquivalenzrelation

Definition: Äquivalenzrelation”

Sei $M = \{a, b, c.....\}$, in der eine Relation $\cong$ erklärt ist.

Ä1 Refexivität $a \cong a$ für alle $a \in M$

Ä2 Symmetrie $a \cong b \Rightarrow b \cong a$

A3 Transitivität $a \cong b \wedge b \cong c \Rightarrow a \cong c$

Eine Äquivalenzrelation teilt M in “Äquivalenzklassen” ein, d.h. die untereinder äquivalenten Elemente bilden eine Klasse, kein Element gehört zu zwei Klassen, man sagt die Klassen sind “disjunkt”, jedes Element genört zu einer Klasse.

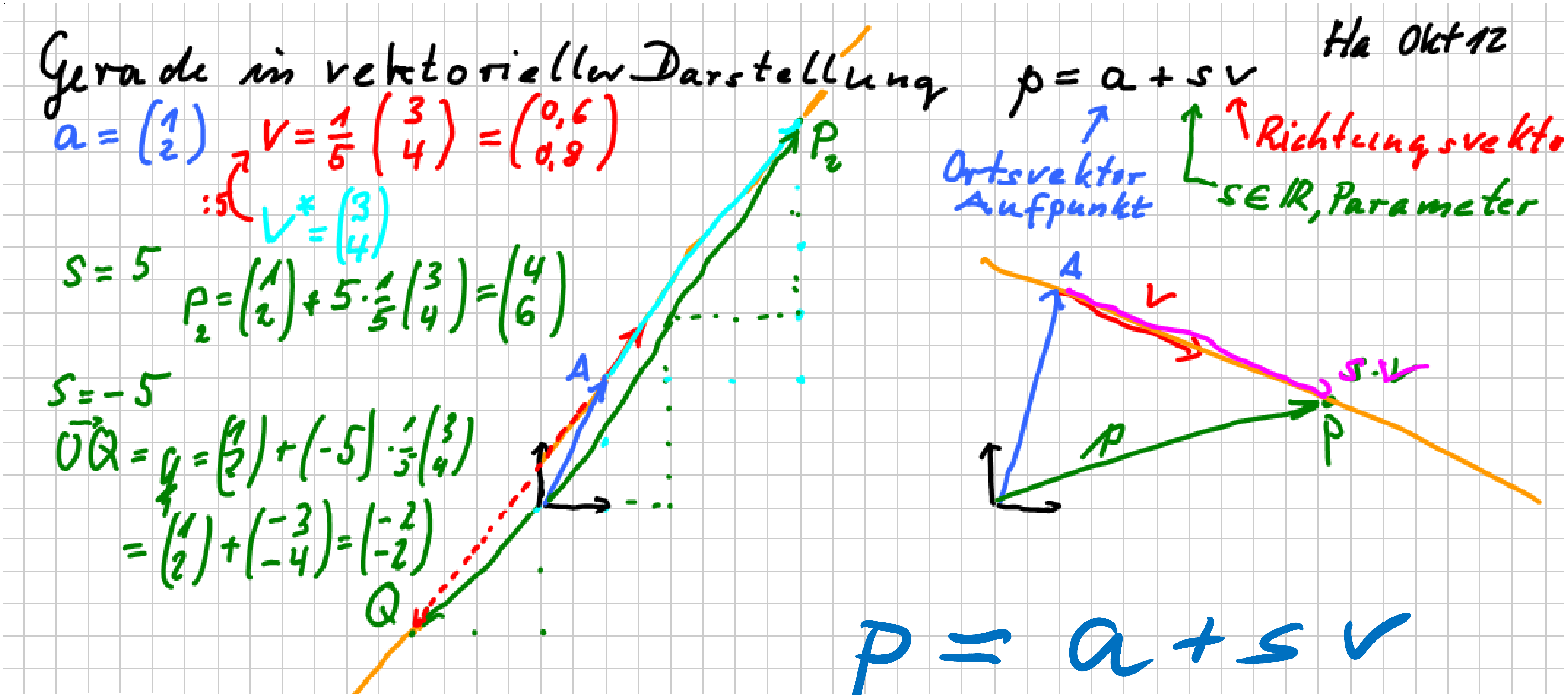
Äquivalenzrelationen dienen dazu, Objekte, die in einer Hinsicht „gleichwertig“ sind, zu identifizieren. (Das ist auch die Wortbedeutung.)
Weitere wichtige Anwendungen:

- Zwei Brüche, die durch Kürzen oder Erweitern auseinander entstehen, sind äquivalent, man schreibt sogar das =-Zeichen.
- Zwei Gleichungen, die dieselbe Lösungsmenge haben sind äquivalent, man schreibt $\Leftrightarrow$
- Zwei Terme, die für jede Wahl der Variablen gleiche Werte haben, sind äquivalent, man schreibt das =-Zeichen:

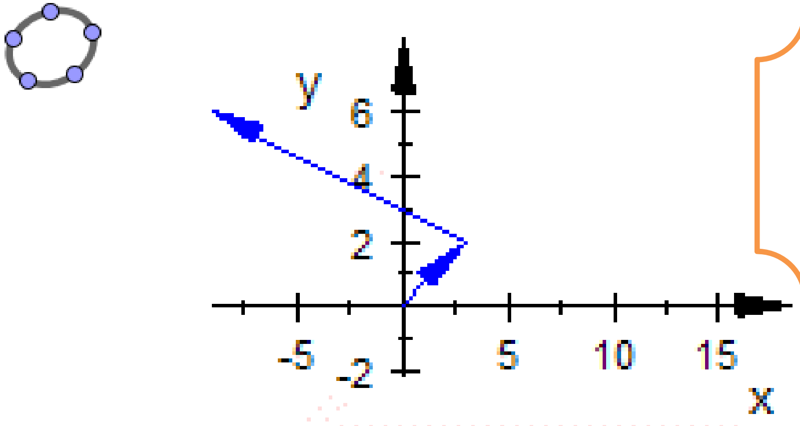
Vektoren

- Pfeile gleicher Länge und Richtung sind (mit obiger Definition) äquivalent
- Die Äquivalenzklassen nennt man (geometrische) **Vektoren**.
- *Anmerkung: Dieser Name wird gerechtfertigt ,indem später bewiesen wird, dass die Vektorraumgesetze erfüllt werden.*
- Man kann in den Punkträumen immer nur einzelne Repräsentanten eines Vektors zeichnen.
- Man sagt auch:
  Vektoren kann man frei verschieben
- Der „Hauptrepräsentant“ ist oft ein Vektor mit Startpunkt O.
- Vektoren kann man auch als n-Tupel beschreiben.
- Die **Addition von Vektoren** wird komponentenweise definiert.

Gerade in vektorieller Darstellung



$$p = a + s v$$



Für jede reelle Zahl s erhält man einen Geradenpunkt.
Jeder Geradenpunkt lässt sich durch ein passendes s erreichen.

$$\vec{p} = \vec{a} + s\,\vec{v}$$

Verschiedene Geradendarstellungen

Vektorielle Darstellung $p = a + s\,v$ oder $\vec{p} = \vec{a} + s\,\vec{v}$

$$p = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + s \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$$

Kartesische Darstellung

☺ $\boxed{y = \frac{4}{3}(x-1)+2}$ allgemein $y = \frac{v_2}{v_1}(x-a_1)+a_2$

Handwerk: Parameterdarstellung $\longrightarrow$ kart. D.

$p = a + s\,v = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0{,}6\\0{,}8\end{pmatrix}$ $\quad x = 1 + 0{,}6\,s \iff s = \frac{x-1}{0{,}6}$

$y = 2 + 0{,}8\,s$

in ② $\quad y = 2 + \frac{0{,}8}{0{,}6}(x-1) = 2 + \frac{4}{3}(x-1)$ wie oben

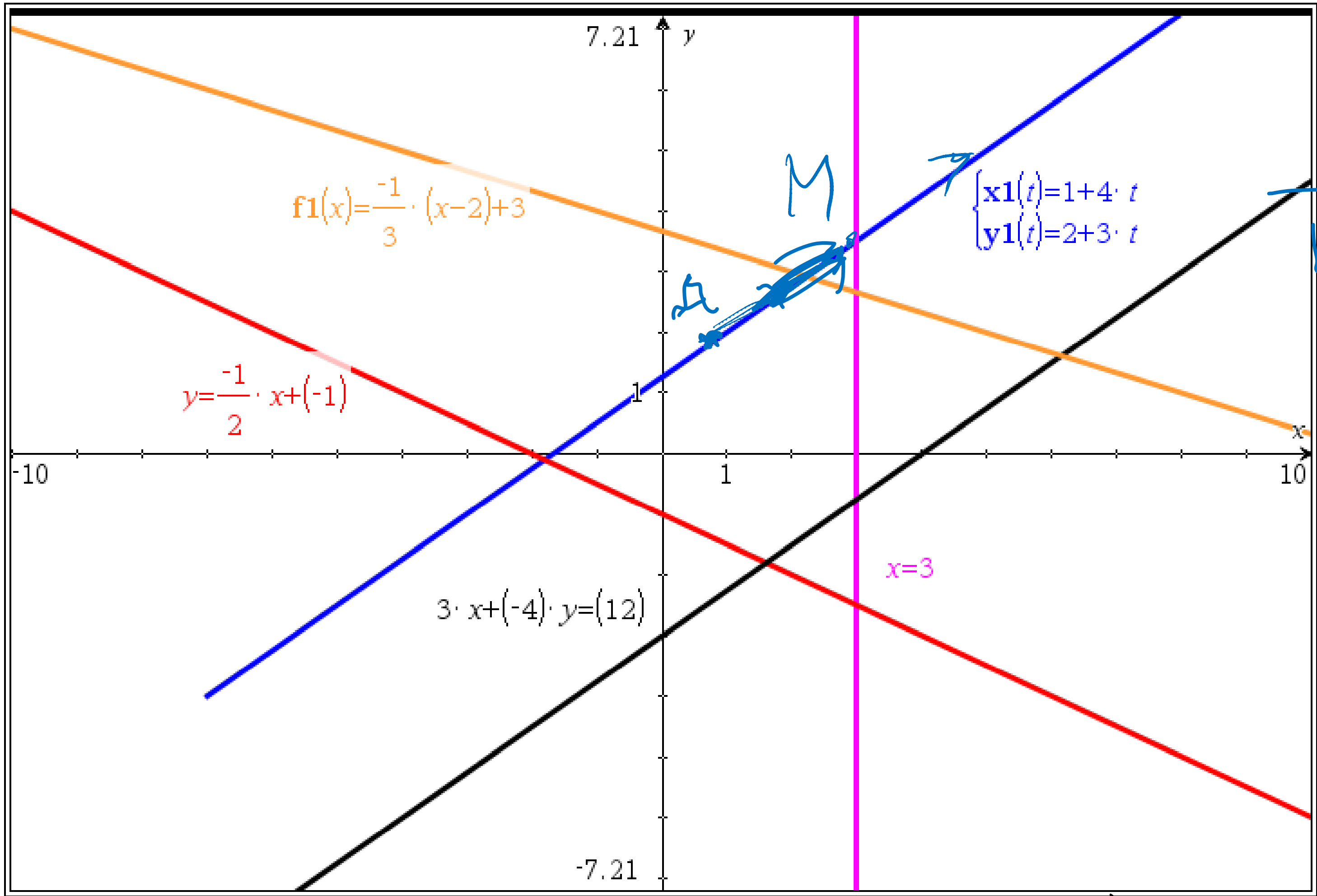
Standardform $\quad y = 2 + \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}$ $\quad \boxed{y = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}}$

Normalenform $\quad \frac{4}{3}x - y = -\frac{2}{3} \quad |\cdot 3$

$\boxed{4x - 3y = -2}$

Diese Form ist in Österreich sehr gebräuchlich.
Man kann in GeoGebra zwischen beiden umschalten.

Viele Graden



$P = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$

A

$\boxed{1+4t=3}$

$4t = 2$

$t = \frac{1}{2}$

$M(3 \mid 3\tfrac{1}{2})$

$P = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

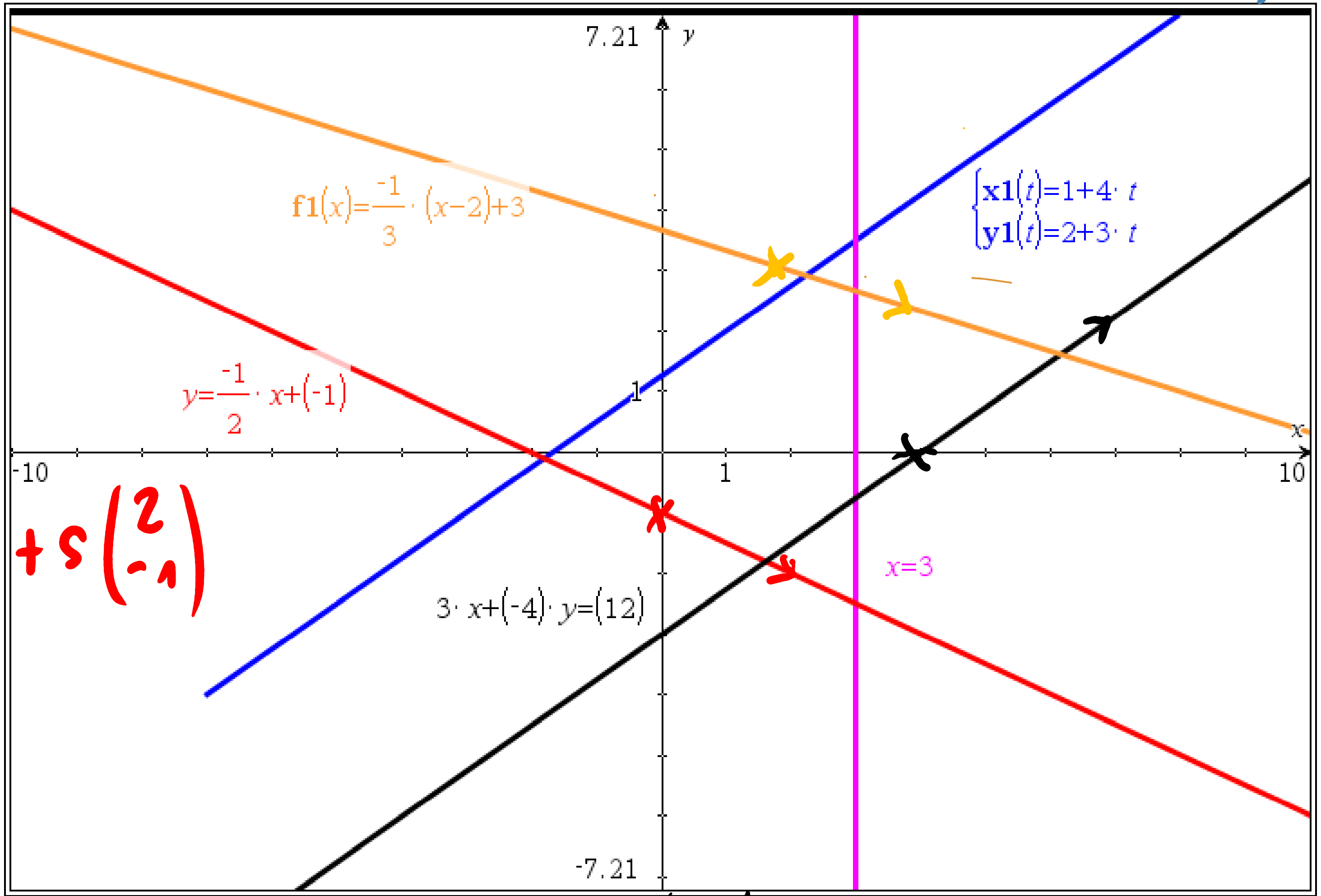
Siehe Übungsblatt

$P = \begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$

$P = \binom{2}{3} + s\binom{3}{-1}$

Viele Graden

$P = \binom{1}{2} + t\binom{4}{3}$



$P = \binom{0}{-1} + s\binom{2}{-1}$

Siehe Übungsblatt

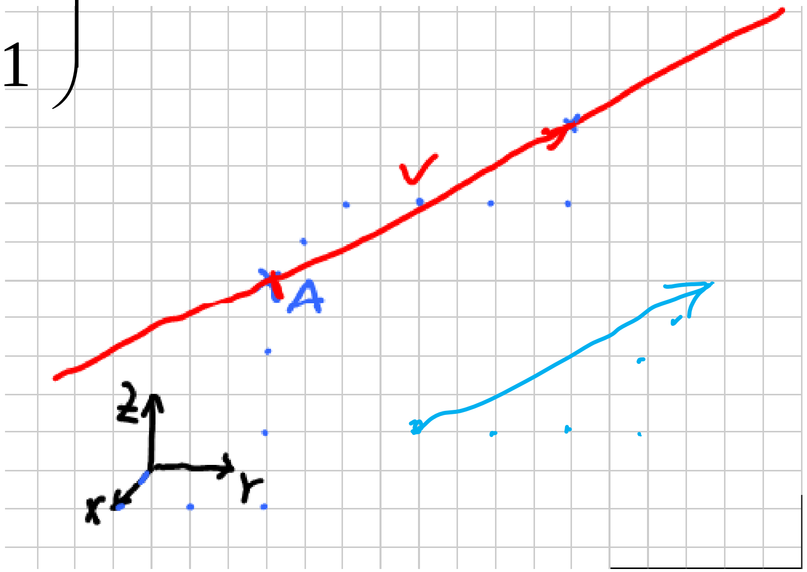
$P = \binom{4}{0} + s\binom{4}{3}$

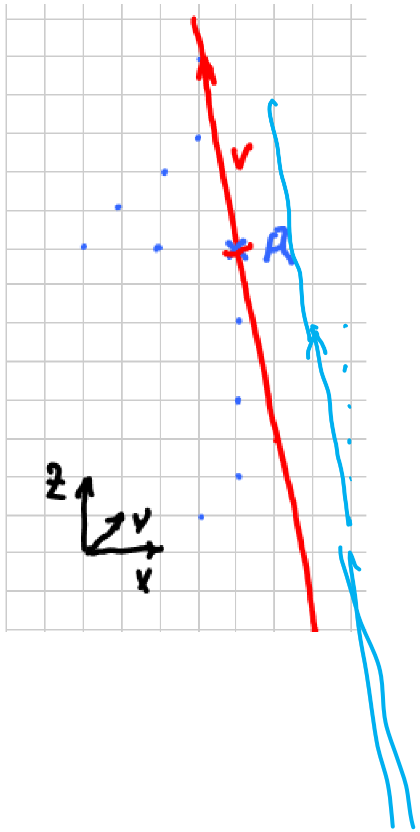
Geraden in 3D (also im R³).

$p = a + s \cdot v$ Dies ist die allgemeine Geradengleichung.

$$p = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad mit \ \ a_i, v_i, s \in \mathbb{R}$$

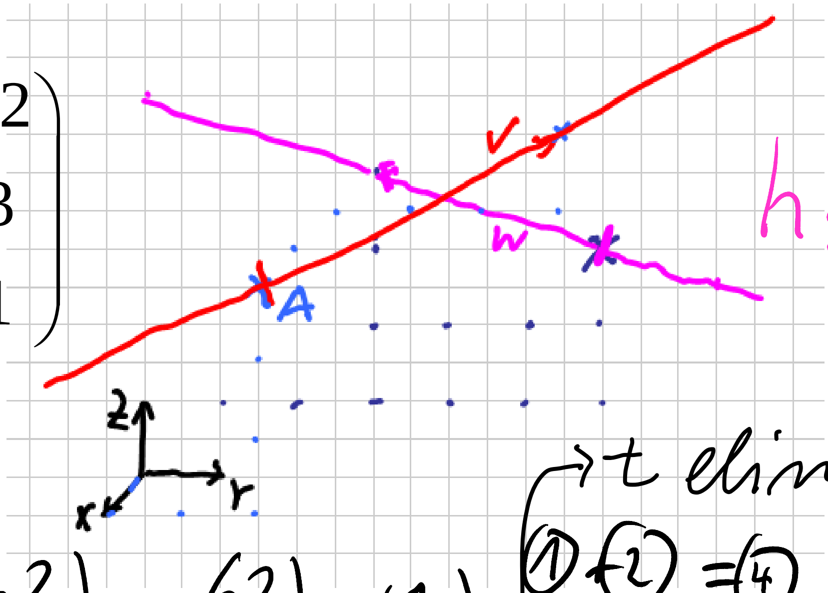
$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$





Schnitt zweier Geraden $g \cap h$

$g:\quad p = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$



$h:\quad p = \begin{pmatrix}-2\\5\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}$

t

$g \nparallel h$

$$s\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix} - t\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\5\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

(1) $-2s + 2t = -3$

(2) $3s - 2t = 3$

(3) $s - 2t = -1$

→ t eliminieren

(1)+(2) = (4) $s + 0 = 0 \Rightarrow s = 0$

in (3) = (5) $-2t = -1$

$t = \frac{1}{2}$

(2) nicht verwendet

(4),(5) in (2) $0 - 1 = 3$ f.A. ↯ Wid.

$g \cap h = \emptyset$

Das LGS hat keine Lösung, die Geraden schneiden sich nicht. g und h sind windschief

Schnitt zweier Geraden $g \cap h$

Allgemeines Vorgehen beim Schnitt von zwei Geraden:

$$g:\ p = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix} \qquad h:\ p = \begin{pmatrix}-2\\5\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}$$

1. Die Richtungsvektorensind parallel.
   D.h. Es existiert ein Faktor für den einen so, dass der andere herauskommt: Die Geraden sind parallel.
   a) Der eine Aufpunkt liegt auf der anderen Geraden: Die Geraden fallen zusammen. $g = h$
   b) Der eine Aufpunkt liegt nicht auf der anderen Geraden: Die Geraden sind parallel und getrennt liegend. (echt parallel) $g \parallel h$
2. Die Richtungsvektoren sind nicht parallel. Berechnung: Rechte Seiten gleichsetzen. Aus zwei Gleichungen s und t bestimmen. In die dritte einsetzen.
   a) Es ergibt sich eine wahre Aussage (w.A.): Die Geraden haben den Schnittpunkt, der sich aus s und t ergibt. $g \cap h = S$
   b) Es ergibt sich eine falsche Aussage (f.A.): Die Geraden sind windschief. $g \nparallel h \wedge g \cap h = \emptyset$

Graden in 3D

Geraden 3D

$\mathbf{g}:=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}+r\cdot\begin{bmatrix}2\\-2\\4\end{bmatrix}$ $\mathbf{h}:=\begin{bmatrix}3\\0\\3\end{bmatrix}+s\cdot\begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\end{bmatrix}$ $\mathbf{k}:=\begin{bmatrix}3\\3\\3\end{bmatrix}+t\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$ $\mathbf{d}:=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}+t\cdot\begin{bmatrix}4\\4\\4\end{bmatrix}$

$\text{solve}(\mathbf{g}=\mathbf{h},\{r,s\}) \blacktriangleright r=1 \text{ and } s=0$ $\text{solve}(\mathbf{g}=\mathbf{k},\{r,t\}) \blacktriangleright r=\frac{1}{4} \text{ and } t=\frac{-3}{2}$

$\text{solve}(\mathbf{h}=\mathbf{k},\{t,s\}) \blacktriangleright \text{false}$ $\text{solve}(\mathbf{h}=\mathbf{d},t,s) \blacktriangleright t=\frac{-(\mathbf{c2}-2)}{4} \text{ and } s=\mathbf{c2}$

$\mathbf{g}|r=1 \blacktriangleright \begin{bmatrix}3\\0\\3\end{bmatrix}$ $\mathbf{h}|s=0 \blacktriangleright \begin{bmatrix}3\\0\\3\end{bmatrix}$ $\mathbf{g}|r=\frac{1}{4} \blacktriangleright \begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}\\0\end{bmatrix}$ $\mathbf{k}|t=\frac{-3}{2} \blacktriangleright \begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}\\0\end{bmatrix}$ $\text{solve}\left(\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}=\mathbf{h},s\right) \blacktriangleright s=2$

dies sind der Schnittpunkt von g und h und der Schnittpunkt von g und k. h und k sind nicht parallel: $-1\cdot f=1$ und $-1\cdot f=2$ ist nicht gleichzeitig erfüllbar.Da sie außerdem keinen gemeinsamen Punkt haben, sind sie windschief. h und d sind parallel und zusammenfallend, denn s ist frei wählbar, t folgt dann. Alternativ ist mit s=2 ad auf der Geraden h.

Graden in 3D

Geraden 3D

$\mathbf{g}:=\begin{bmatrix}3\\2\\-1\end{bmatrix}+r\cdot\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{h}:=\begin{bmatrix}2\\0\\3\end{bmatrix}+s\cdot\begin{bmatrix}-1\\1\\-1\end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{k}:=\begin{bmatrix}1\\-3\\0\end{bmatrix}+t\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$

$\text{solve}(\mathbf{g}=\mathbf{h},\{r,s\}) \blacktriangleright \text{false}$ $\quad \text{solve}(\mathbf{g}=\mathbf{k},\{r,s\}) \blacktriangleright \text{false}$ $\quad \text{solve}(\mathbf{h}=\mathbf{k},\{t,s\}) \blacktriangleright s=-1 \text{ and } t=2$

$\mathbf{h}|s=-1 \blacktriangleright \begin{bmatrix}3\\-1\\4\end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{k}|t=2 \blacktriangleright \begin{bmatrix}3\\-1\\4\end{bmatrix}$ dies ist der Schnittpunkt von h und k.

Ersichtlich sind g und h parallel, denn −vg=vh, da es außderdem keinen gemeinsamen Punkt gibt, sind sie parallel und getrennt liegend (echt parallel).

g und k sind nicht parallel: $1\cdot f=1$ und $-1\cdot f=1$ ist nicht gleichzeitig erfüllbar.

Da sie außerdem keinen gemeinsamen Punkt haben, sind sie windschief.

Graden in 3D

Geraden 3D

$\mathbf{g}:=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}+r\cdot\begin{bmatrix}6\\-2\\4\end{bmatrix}$ $\quad\mathbf{h}:=\begin{bmatrix}3\\0\\3\end{bmatrix}+s\cdot\begin{bmatrix}-1\\-1\\2\end{bmatrix}$ $\quad\mathbf{k}:=\begin{bmatrix}3\\3\\3\end{bmatrix}+t\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}$

$\text{solve}(\mathbf{g}=\mathbf{h},\{r,s\}) \blacktriangleright r=\frac{1}{2} \text{ and } s=-1$ $\quad\text{solve}(\mathbf{g}=\mathbf{k},\{r,t\}) \blacktriangleright \text{false}$ $\quad\text{solve}(\mathbf{h}=\mathbf{k},\{t,s\}) \blacktriangleright \text{false}$

$\mathbf{g}|r=\frac{1}{2} \blacktriangleright \begin{bmatrix}4\\1\\1\end{bmatrix}$ $\quad\mathbf{h}|s=-1 \blacktriangleright \begin{bmatrix}4\\1\\1\end{bmatrix}$ dies ist der Schnittpunkt von g und h.

Ersichtlich sind k und h parallel, denn −vk=vh, da es außerdem keinen gemeinsamen Punkt gibt, sind sie parallel und getrennt liegend (echt parallel).

g und k sind nicht parallel: $6\cdot f=1$ und $-2\cdot f=1$ ist nicht gleichzeitig erfüllbar.

Da sie außerdem keinen gemeinsamen Punkt haben, sind sie windschief.

Lösen eines LGS, linearen Gleichungssystems

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Universität Lüneburg, Mathematik Lehramt   24. Juni 2006

Lineares Gleichungssystem (Kl. 8, 9)

(1)	$4x - 3y + 2z = -13$	Gls. I — 3 Gl. 3 Variable
(2)	$2x + 5y - 6z = 5$	
(3)	$-x - 2y + 4z = 3$	

x eliminieren

(1) + 4·(3) = (4)	$0 - 11y + 18z = -1$	Gls II — 2 Gl 2 Variable
(2) + 2(3) = (5)	$0 \quad y + 2z = 11$	

y eliminieren

(4) + 11·(5) = (6) $0 + 40z = 120 \quad |:40$ 1 Gl. 1. Variable

(6') $\underline{z = 3}$

in Gls. II, in (5) $y = -2 \cdot 3 + 11$, $\underline{y = 5}$

in Gls. I, in (3) $-x = 2y - 4z + 3 = 2 \cdot 5 - 4 \cdot 3 + 3$

$-x = 1$

$\underline{x = -1}$

Lösung
$x = -1$
$y = 5$
$z = 3$
eindeutig

Pdf bei Algebra/ Gleichungen

Lösen eines LGS, linearen Gleichungssystems

Weiteres Beispiel:

$$
\begin{aligned}
(1)\quad & -2x + 6y - 20z = -22 \\
(2)\quad & 7x + 2y + z = 31 \\
(3)\quad & 5x + 8y - 19z = 9
\end{aligned}
$$

y eliminieren

$(1) - 3(2) = (4)$ $\quad -23x + 0 - 23z = -115$

$(3) - 4(2) = (5)$ $\quad -23x + 0 - 23z = -115$

x elimin. $\quad \ominus \quad 0 \qquad 0 = 0$

z bleibt.

eine Variable unbestimmbar

$x = -z + 5$

in (2)

$2y = -7x - z + 31$

$2y = +7z - 35 - z + 31$

$2y = 6z - 4$

$y = 3z - 2$

Lösung

$x = -z + 5$

$y = 3z - 2$

Pdf bei Algebra/ Gleichungen

Lösen eines LGS, linearen Gleichungssystems

Lineare Algebra Gleichungssystem 2D mit Matrizen (Ha 2010)

$\mathbf{aa}:=\begin{bmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{bmatrix}$

Diese Definition ist nun im ganzen "Problem" bekannt. Es ist nicht nötig, sie im Caculator nochmal vorzunehmen.

$\begin{bmatrix} bx \\ by \end{bmatrix} \to \mathbf{bv} \blacktriangleright \begin{bmatrix} bx \\ by \end{bmatrix}$ ist der gesuchte Vektor und die rechte Seite ist $\begin{bmatrix} cx \\ cy \end{bmatrix} \to \mathbf{cv} \blacktriangleright \begin{bmatrix} cx \\ cy \end{bmatrix}$

Dann ist das Gleichungssystem $\mathbf{aa} \cdot \mathbf{bv}=\mathbf{cv} \blacktriangleright \begin{bmatrix} a11 \cdot bx+a12 \cdot by=cx \\ a21 \cdot bx+a22 \cdot by=cy \end{bmatrix}$

Die Lösung: $\text{solve}(\mathbf{aa} \cdot \mathbf{bv}=\mathbf{cv},\{bx,by\}) \blacktriangleright bx=\frac{-(a12 \cdot cy-a22 \cdot cx)}{a11 \cdot a22-a12 \cdot a21}$ and $by=\frac{a11 \cdot cy-a21 \cdot cx}{a11 \cdot a22-a12 \cdot a21}$

Man sieht, dass die Lösung auf diese Weise nur existiert, wenn der Nenner der Brüche nicht Null ist. Darum bekommt dieser Nenner den Namen

Determinante $\det(\mathbf{aa}) \blacktriangleright a11 \cdot a22-a12 \cdot a21$ ⚠

Hier sind die Variablen nicht belegt, dieses "Problem" ist also für die Theorie zuständig. Für konkrete Beipiele mache man sich in dieser Datei eine neues "Problem", hier 2 auf. Es folgt Seite −2−

*.tns bei Lin.Alg.

Lösen eines LGS, linearen Gleichungssystems

Gleichungssysteme Seite −2−

Im konkreten Fall kann man auch $\mathbf{aa}^{-1}$ ▸ $\begin{bmatrix} \frac{a22}{a11\cdot a22-a12\cdot a21} & \frac{-a12}{a11\cdot a22-a12\cdot a21} \\ \frac{-a21}{a11\cdot a22-a12\cdot a21} & \frac{a11}{a11\cdot a22-a12\cdot a21} \end{bmatrix}$ ⚠ bilden,

die inverse Matrix, falls sie existiert, mit $\mathbf{aa}^{-1}\cdot \mathbf{cv}$ ▸ $\begin{bmatrix} \frac{-(a12\cdot cy-a22\cdot cx)}{a11\cdot a22-a12\cdot a21} \\ \frac{a11\cdot cy-a21\cdot cx}{a11\cdot a22-a12\cdot a21} \end{bmatrix}$ ⚠ hat man die

Lösung.

Man könnte dieses den "algebraischen Weg" nennen.

Es wäre nun heute Unsinn, soeine Formel zu lernen, denn dann kannn man es gleich vom CAS lösen lassen. Also: entweder ganz von Hand −was mitunter sehr fix geht− oder mit CAS.

Übrigens lösen der Computer die linearen Gleichnungssysteme genau mit diesem Prinzip.

(Zumindest wenn eine eindeutige Lösung existiert.)

Auch die GTR können das heute.

*.tns bei Lin.Alg.

Lösen eines LGS, linearen Gleichungssystems

\---

Es folgt Seite −3− mit den anderen Fällen, die beim Lösen auftreten können.

Die Lösung ist ein 2D−Punkt, wenn beide Geraden sich schneiden. Siehe Seite −1− und −2−.

Wenn beide Geraden parallel sind, dann gilt in der Darstellung

$\mathbf{aa} \cdot \mathbf{bv} = \mathbf{cv} \blacktriangleright \begin{bmatrix} a11 \cdot bx + a12 \cdot by = cx \\ a21 \cdot bx + a22 \cdot by = cy \end{bmatrix}$

$k \cdot \mathbf{aa}[1] = \mathbf{aa}[2] \blacktriangleright [k \cdot a11 = a21 \quad k \cdot a12 = a22]$, also: die zweite Zeile von aa ist das k−fache der ersten Zeile von aa. Dann ist $\mathbf{aa3} := \begin{bmatrix} a11 & a12 \\ k \cdot a11 & k \cdot a12 \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} a11 & a12 \\ k \cdot a11 & k \cdot a12 \end{bmatrix}$ und $\det(\mathbf{aa3}) \blacktriangleright 0$ ⚠

Wenn jetzt auch noch gilt $\mathbf{cv3} := \begin{bmatrix} cx \\ k \cdot cx \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} cx \\ k \cdot cx \end{bmatrix}$ fallen die parallelen Geraden zusammen.

Anderenfalls folgt ein Widerspruch des Typs 0=Zahl mit einer nicht verschwindenden Zahl.

Dann sind die parallelen Geraden getrennt.

Dieses kann man nur von Hand oder konkret untersuchen

*.tns bei Lin.Alg.

Lösen eines LGS, linearen Gleichungssystems

$aa:=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$
$bv:=\begin{bmatrix}bx\\by\end{bmatrix}:\ cv:=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$
$gls:=aa\cdot bv=cv$	$\begin{bmatrix}bx+2\cdot by=-1\\3\cdot bx+4\cdot by=2\end{bmatrix}$
$\mathrm{solve}(gls,\{bx,by\})$	$bx=4$ and $by=\frac{-5}{2}$
$\det(aa)$	-2
aa^{-1}	$\begin{bmatrix}-2 & 1\\\frac{3}{2} & \frac{-1}{2}\end{bmatrix}$
$aa^{-1}\cdot cv$	$\begin{bmatrix}4\\\frac{-5}{2}\end{bmatrix}$
©Dieselbe Lösung mit der Inversen Matrix erzeugt.	
	7/99

*.tns bei Lin.Alg.

Lösen eines LGS, linearen Gleichungssystems

©Die besonderen Lösungsmengen

$aa3:=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & -6\end{bmatrix}$ $\qquad\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & -6\end{bmatrix}$

$aa3\cdot bv=cv$ $\qquad\begin{bmatrix}bx+2\cdot by=-1\\ -3\cdot bx-6\cdot by=2\end{bmatrix}$

$\text{solve}(aa3\cdot bv=cv,\{bx,by\})$ $\qquad$ false

©Dies sind also zwei Geraden, die parallel sind und getrennt liegen,

$cv3:=\begin{bmatrix}cx\\ 3\cdot cx\end{bmatrix}$ $\qquad\begin{bmatrix}cx\\ 3\cdot cx\end{bmatrix}$

$aa3\cdot bv=cv3$ $\qquad\begin{bmatrix}bx+2\cdot by=cx\\ -3\cdot bx-6\cdot by=3\cdot cx\end{bmatrix}$

©Man sieht schon, dass die zweite Zeile insgeamt das 3–fache der ersten ist.

$\text{solve}(aa3\cdot bv=cv3,\{bx,by\})$ $\qquad bx=-2\cdot \mathbf{c3}$ and $by=\mathbf{c3}$ and $cx=0$

©Eine Freiheit bleibt drin, Lösung ist die ganze Gerade aus der ersten Zeile,

10/99

*.tns bei Lin.Alg.

Erzeugen eines LGS, linearen Gleichungssystems

Gleichungssysteme erzeugen, die dann lösbar sind

$\mathbf{aa}:=\begin{bmatrix}1 & 3 & -1\\ 4 & -2 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}$ gewünschte Lösung $\mathbf{lo}:=\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 1\end{bmatrix}$ allg. Lösungsvektor $\mathbf{p}:=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$

$\mathbf{aa}^{-1} \blacktriangleright \begin{bmatrix}\frac{1}{7} & \frac{8}{35} & \frac{-1}{35}\\ \frac{2}{7} & \frac{-1}{7} & \frac{1}{7}\\ 0 & \frac{-1}{5} & \frac{2}{5}\end{bmatrix}$ dies sichert die Lösbarkeit $\mathbf{bb}:=\mathbf{aa}\cdot\mathbf{lo} \blacktriangleright \begin{bmatrix}-2\\ 11\\ 8\end{bmatrix}$

$\mathrm{rowDim}(\mathbf{aa}) \blacktriangleright 3$ wenn hier 3 steht, ist das lGls eindeutig lösbar.

$\mathbf{aa}^{-1}\cdot\mathbf{bb} \blacktriangleright \begin{bmatrix}2\\ -1\\ 1\end{bmatrix}$ ist auch eine Probe. Also

solve(aa·p=bb,x,y,z) ▸ $x=2$ and $y=-1$ and $z=1$

Erzeugen eines LGS, linearen Gleichungssystems

Gleichungssysteme erzeugen, die dann lösbar sind

$\mathbf{aa}:=\begin{bmatrix}1 & 3 & -1\\ 4 & -2 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}$ gewünschte Lösung $\mathbf{lo}:=\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 1\end{bmatrix}$ allg. Lösungsvektor $\mathbf{p}:=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$

$\mathbf{aa}^{-1} \blacktriangleright \begin{bmatrix}\frac{1}{7} & \frac{8}{35} & \frac{-1}{35}\\ \frac{2}{7} & \frac{-1}{7} & \frac{1}{7}\\ 0 & \frac{-1}{5} & \frac{2}{5}\end{bmatrix}$ dies sichert die Lösbarkeit $\mathbf{bb}:=\mathbf{aa}\cdot\mathbf{lo} \blacktriangleright \begin{bmatrix}-2\\ 11\\ 8\end{bmatrix}$

$\mathrm{rowDim}(\mathbf{aa}) \blacktriangleright 3$ wenn hier 3 steht, ist das lGls eindeutig lösbar.

$\mathbf{aa}^{-1}\cdot\mathbf{bb} \blacktriangleright \begin{bmatrix}2\\ -1\\ 1\end{bmatrix}$ ist auch eine Probe. Also

solve(aa·p=bb,x,y,z) ▸ $x=2$ and $y=-1$ and $z=1$

Mehrdeutige Lösungen kann man erhalten, wenn man zwei Zeilen frei wählt und die dritte linear kombiniert.

Erzeugen eines LGS, linearen Gleichungssystems

Gleichungssystem erzeugen, das dann eine „vernünftige 1-dimensionale Lösung hat.

Weiteres Beispiel

① $-2x+6y-20z=-22$
② $7x+2y+z=31$
③ $5x+8y-19z=9$

y eliminieren
①−3②=④ $-23x+0-23z=-115$
③−4②=⑤ $-23x+0-23z=-115$
x elimin. ⊖ $0 \quad 0 = 0$

z bleibt;
$x=-z+5$
in ② $2y=-7x-z+31$
$2y=+7z-35-z+31$
$2y=6z-4$
$y=3z-2$

eine Variable unbestimmter Lösung
$x=-z+5$
$y=3z-2$

Erstellung dieser Aufgabe: $x=5-z$, $y=3z-2$ ausdenken, Faktoren ausdenken, 2 Gl. bilden mit x, y, 2 Gl. ⊕

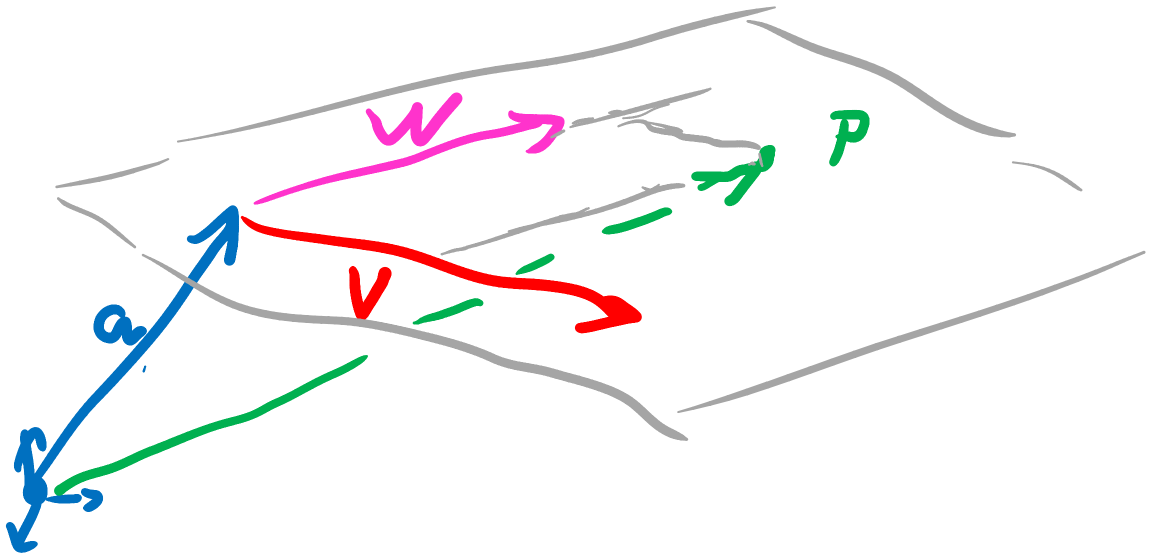
$-2x+6y=+2z-10+18z-12=20z-22$ | um z nach links
$7x+2y=-7z+35-4+6z \quad =-z+31$

Die 3. Gl. ist die Summe ⇒ Eine Variable bleibt drin.

Ändert man rechts eine Zahl, erzeugt man ein Widerspruch, $\mathbb{L}=\emptyset$.

Pdf bei Algebra/ Gleichungen

Ebene in vektorieller Darstellung



$$p = a + s v + t w$$

*.geosave

Neue Datei

Für alle reelle Zahl s und t erhält man einen Ebenenpunkt.
Jeder Ebenenpunkt lässt sich durch ein passendes Paar s und t erreichen.

$$\vec{p} = \vec{a} + s\,\vec{v} + t\,\vec{w}$$

Ebene in Parameterform

*.geosave

Neue Datei

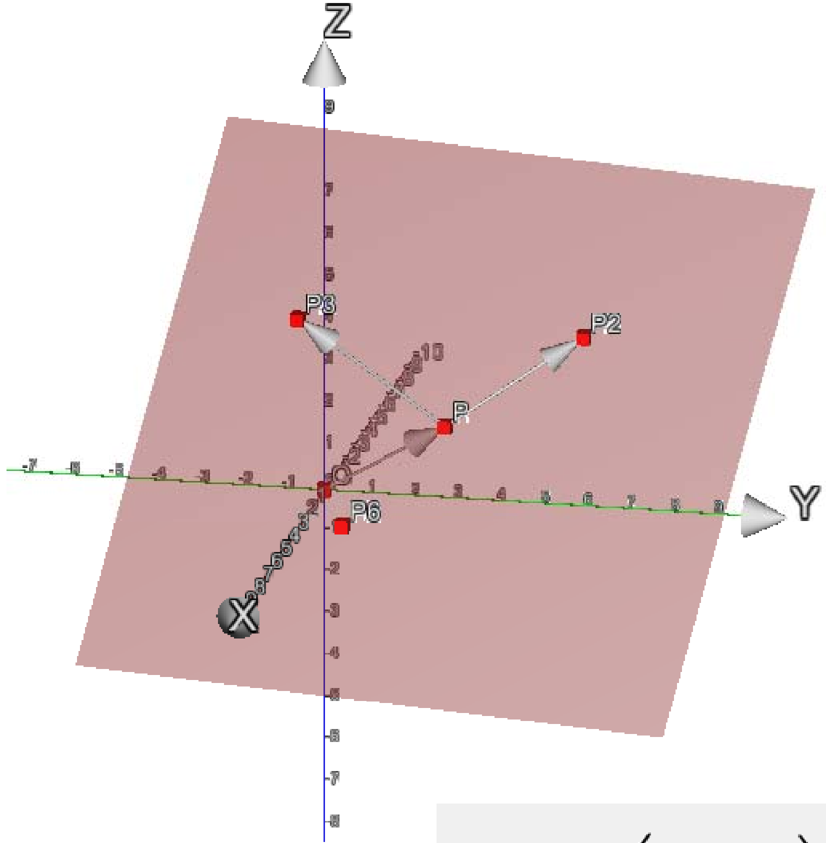
ArchimedesGeo3D
In mystudy

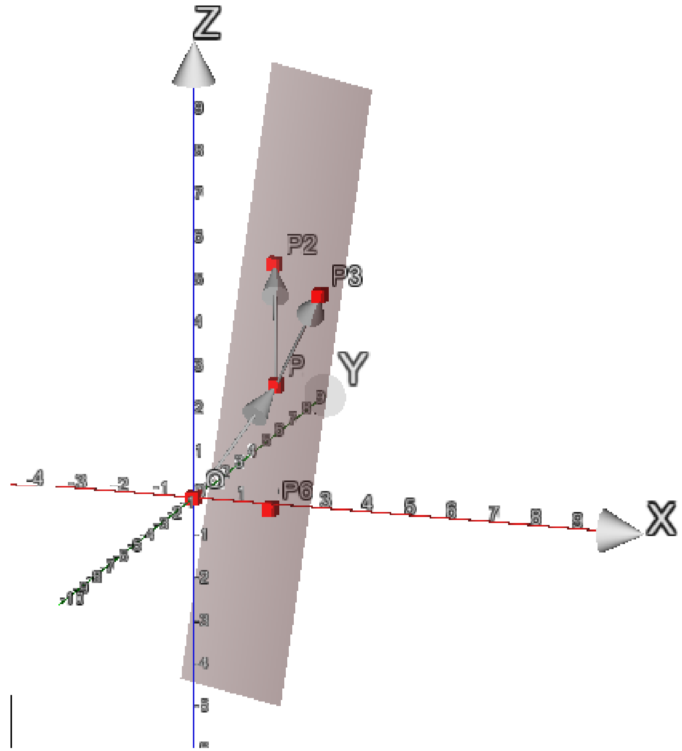
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1{,}0 \\ 3{,}0 \\ 2{,}0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1{,} \\ 3{,}0 \\ 2{,}0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2{,}0 \\ -3{,} \\ 3{,}0 \end{pmatrix}$$

*.geosave

Ebene mit Geraden

Lösen eines LGS, linearen Gleichungssystems





ArchimedesGeo3D
In mystudy

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1,0 \\ 3,0 \\ 2,0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1,0 \\ 3,0 \\ 2,0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2,0 \\ -3,0 \\ 3,0 \end{pmatrix}$$

Zentraler Begriff: Linear unabhängig

$(VR,+)_{\mathbb{R}},\ v_i \in VR,\ \alpha_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

Dann heißt $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot v_i$ **eine Linearkombination** der v_i

Kann die Gleichung $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot v_i = 0$ nur erfüllt werden,

wenn alle $\alpha_i = 0$ sind, dann heißen die v_i **linear unabhängig**.

$M = \{v_1, \ldots, v_n\}$ heißt dann **linear unabhängige Menge** in VR

$$[\![v_i, \ldots, v_n]\!] = \left\{ w \;\middle|\; w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot v_i \;, \alpha_i \in \mathbb{R} \right\}$$

51

Die Menge $[\![v_i]\!]$ aller Linearkombinationen heißt **lineare Hülle** der v_i

Prüfen, ob eine Menge linear unabhängig ist.

6 Zeige, daß je zwei der folgenden drei Vektoren linear unabhängig sind und stelle jeden Vektor als Linearkombination der beiden anderen dar.

a) $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\11\end{pmatrix}$

7 Untersuche die folgenden Vektoren auf Komplanarität.

a) $\begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\6\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}10\\6\\0\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-4\\1\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}7\\1\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\1\\-2\end{pmatrix}$

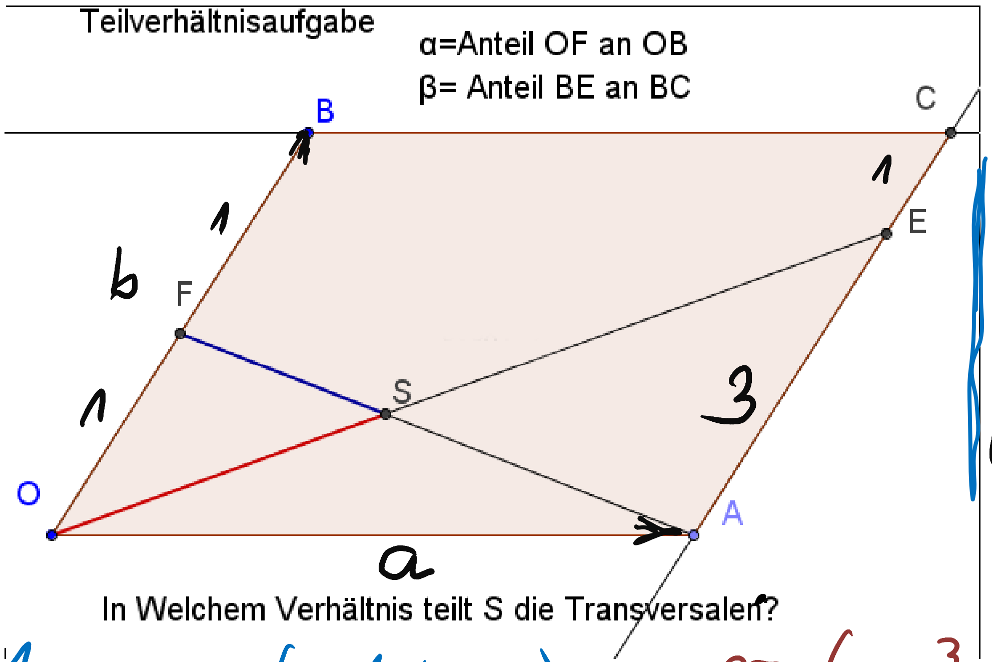
e) $\begin{pmatrix}4\\1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-4\\1\end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1{,}5\\1\\-0{,}5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\-1\\-4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

8 Für welche Werte des Parameters a sind die folgenden Vektoren linear abhängig?

a) $\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\\3\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\a\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\\1\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}a\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2a\\5\end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\3\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\\3\\2\end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix}a\\-3\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-a\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-2\\2a\end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix}3\\1\\a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\\2\\1\end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix}0\\a\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a^2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Teilverhältnis-Aufgabe mit „linear unabhängig“.



$a := \vec{OA} \quad b = \vec{OB}$

$\vec{OF} = \frac{1}{2} b \qquad \vec{OS} = r\,\vec{OE}$

$\vec{FA} = -\frac{1}{2} b + a \qquad \vec{OE} = a + \frac{3}{4} b$

$\vec{OS} = \frac{1}{2} b + t\,\vec{FA}$

OS wird sowohl mithilfe der einen Transversale FA und der anderen Transversale OE ausgedrückt. Beide Terme werden dann gleichgesetzt.

$$\frac{1}{2} b + t\left(-\frac{1}{2} b + a\right) = r \cdot \left(a + \frac{3}{4} b\right)$$

$$\frac{1}{2} b - \frac{1}{2} t b - \frac{3}{4} r b = r a - t a$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} t - \frac{3}{4} r\right) b = (r - t)\, a$$

Da a und b linear unabhängig sind, kann diese Gleichung nur gelten, wenn beide Klammern verschwinden.

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} t - \frac{3}{4} r = 0 \quad \wedge \quad r - t = 0$$

$\Rightarrow r = t$

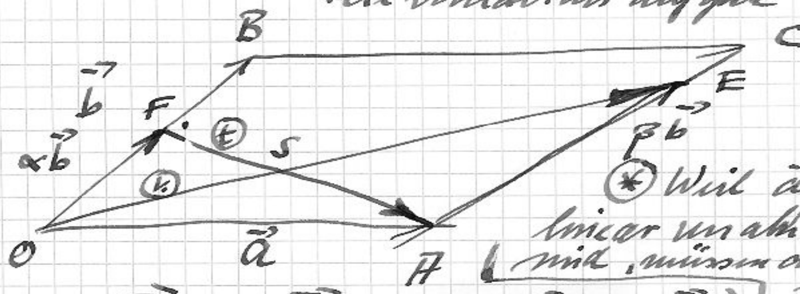
$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} t - \frac{3}{4} t = 0$

$\frac{5}{4} t = \frac{1}{2}$

$t = \frac{2}{5} \qquad r = \frac{2}{5}$

Also: S teilt OE im Verhältnis 2:3.
Also: S teilt FA im Verhältnis 2:3.

Teilverhältnisaufgabe



(*) Weil $\vec a$ und $\vec b$ linear unabhängig sind, müssen die Faktoren einzeln Null sein.

$\vec{OS} = k\,\vec{OE} = k(\vec a + \beta\vec b)$

$\vec{OS} = \alpha\vec b + t\cdot\vec{FA} = \alpha\vec b + t(\vec a - \alpha\vec b)$

Also $k(\vec a + \beta\vec b) = \alpha\vec b + t(\vec a - \alpha\vec b)$

$k\vec a + k\beta\vec b = \alpha\vec b + t\vec a - t\alpha\vec b$

$(k - t)\,\vec a = (\alpha - t\alpha - k\beta)\,\vec b$

(*) $k - t = 0 \;\wedge\; \alpha - t\alpha - k\beta = 0$

$k = t \;\wedge\; \alpha - t\alpha - k\beta = 0$

$\alpha - k\alpha - k\beta = 0$

$k\alpha + k\beta = \alpha$

$k(\alpha + \beta) = \alpha$

$\boxed{k = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = t}$

S teilt OE im Verh. k:(1-k)

$$\frac{k}{1-k} = \frac{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}{1-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta-\alpha} = \frac{\alpha}{\beta} = \alpha:\beta$$

$\alpha = \frac12 \quad \beta = \frac34 \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\frac12}{\frac34} = \frac23 = 2:3$

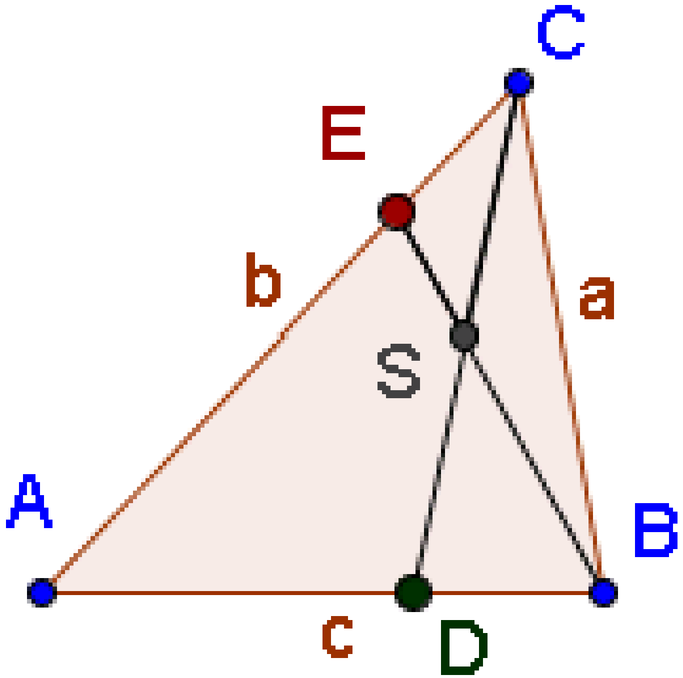
$t = \frac{\frac12}{\frac12+\frac34} = \frac{1}{2+3} = \frac25$ t teilt $\overline{OE}$ im Verh. 2:3

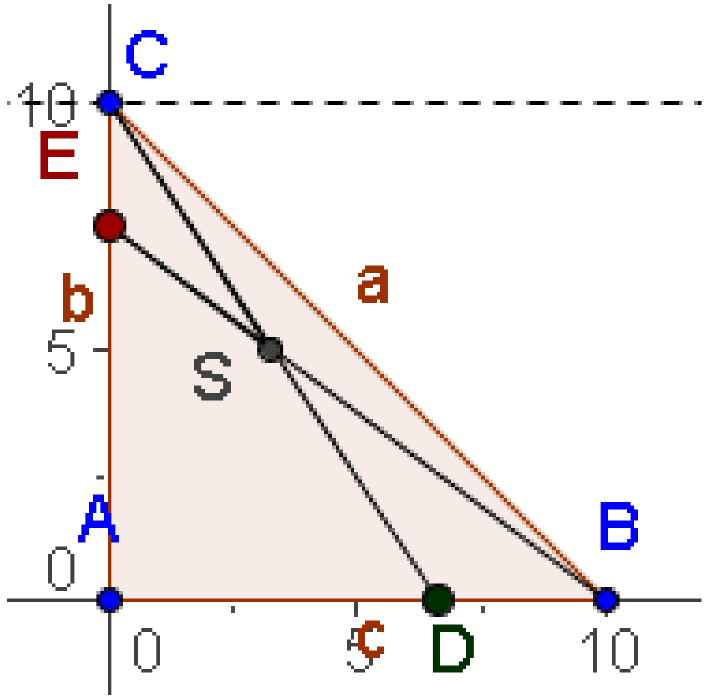
k " " " 2:3

$t = k$

Teilverhältnis-Aufgabe mit „linear unabhängig“.

Teilverhältnis-Aufgabe mit „linear unabhängig“.





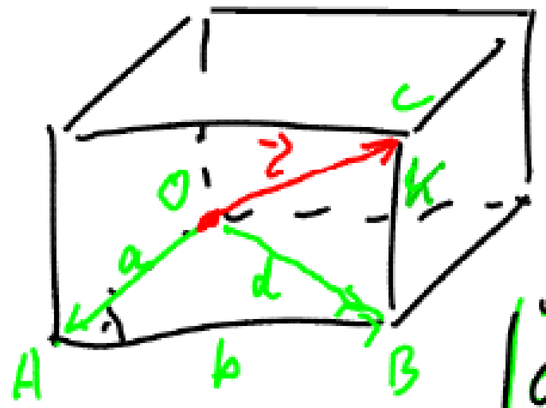
Überlegen Sie, dass das gescherte Dreieck rechts dasselbe Problem löst, wie das Dreieck links.
Für das Rechte Dreieck könnte man S auch mit analytischen Methoden Berechnen, also durch Aufstellen von Geradengleichungen und Schnittpunktberechnung.
Versuchen Sie hier beide Methoden.

Skalarprodukt

Lin. Alg: Skalarprodukt

Eine Herleitung, die erst eine Motivation über die Längenberechnung im Raum liefert. (Blatt 1).

$\boxed{1}$



$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b}$

Länge von d

$|\vec{d}| = \sqrt{a^2 + b^2} = d$

$|\vec{c}| = \sqrt{d^2 + k^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + k^2}$

Vorschlag "Selbstprodukt" $\vec{c} \cdot \vec{c} := c_x^2 + c_y^2 + c_z^2$

"Fremdprodukt" $\vec{c} \cdot \vec{p} := c_x \cdot p_x + c_y \cdot p_y + c_z \cdot p_z$

Ziel Skalarprodukt ↗ $\in \mathbb{R}$

2. Motivation

Skalarprodukt

$$waren = \begin{pmatrix} Gleis\ gerade \\ Gleis\ gebogen \\ Anschluss \\ Weiche\ \ li \\ Weiche\ \ re \\ Weichen\ Antrieb \\ \end{pmatrix} \quad Stück = \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad Preise = \begin{pmatrix} 2,40 \\ 2,70 \\ 6,29 \\ 17,98 \\ 17,98 \\ 12,98 \end{pmatrix}$$

$$Kosten := Preise \bullet Stück$$

Dafür nimmt man das Skalarprodukt.

$$Kosten := Preise \bullet Stück =$$

$$15 \cdot 2,40 + 8 \cdot 2,70 + 1 \cdot 6,29 + 2 \cdot 17,98 + 2 \cdot 17,98 + 4 \cdot 12,98$$

$$187,73$$

Skalarprodukt

Gegeben ist ein Vektorraum VR über einem Körper K (hier K=$\mathbb{R}$) und eine Basis B. Vektoren a und b haben Darstellung ihre Darstellung mit den Komponenten a_i und b_i aus K bzgl. der Basis B.
Dann ist durch

$$\vec{a}\bullet\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} := a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_n \cdot b_n \quad \in K$$

ein Skalarprodukt definiert. Handelt es sich um den Körper der reellen Zahlen, dann heißt der VR nun euklidischer VR .

Dieses Skalarprodukt wird auch **Standard-Skalarprodukt** genannt.
Es erfüllt die Axiome einer **positiv-definiten Bilinearform**.

Bilinearform

Gegeben ist ein Vektorraum VR über einem Körper K .
Eine Abbildung f : VxV --> K, die also jedem Paar von Vektoren ein Element aus K (z.B. eine reelle Zahl) zuordnet , so dass die folgenden Eigenschaften gelten

$$f(u+v,w) = f(u,w) + f(v,w) \qquad f(u,v+w) = f(u,v) + f(u,w)$$

$$f(r \cdot v,w) = r \cdot f(v,w) \qquad f(v,r \cdot w) = r \cdot f(v,w)$$

heißt Bilinearform

Gilt dazu noch

$$f(v,w) = f(w,v)$$

heißt die Funktion symmetrische Bilinearform .

Gilt dazu noch

$$\forall v \neq 0: \quad f(v,v) > 0$$

heißt die Funktion positiv definite Bilinearform .

Positiv definite symmetrische Bilinearform

$$f(u+v,w)=f(u,w)+f(v,w) \qquad f(u,v+w)=f(u,v)+f(u,w)$$

$$f(r\cdot v,w) \ =r\cdot f(v,w) \qquad f(v,r\cdot w) \ =r\cdot f(v,w)$$

$$f(v,w)=f(w,v) \qquad \forall v\neq 0: \ \ f(v,v)>0$$

Das Standard-Skalarprodukt erfüllt alle diese Gesetze.

$f(v,w):=v\bullet w$ s.o. ; alternative Schreibweisen $v.w$ $<v,w>$ $u.a.$

Alternative Namen: Punktprodukt, dot-product, inneres Produkt, euklidisches Produkt

Beweis:

$$u\bullet(v+w)=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{pmatrix}\bullet\left(\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\\vdots\\w_n\end{pmatrix}\right):=u_1\cdot(v_1+w_1)+\ldots+u_n\cdot(v_n+w_n)\underset{D}{=}$$

$$u_1\cdot v_1+u_1\cdot w_1+\ldots+u_n\cdot v_n+u_n\cdot w_n=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\\vdots\\w_n\end{pmatrix}$$

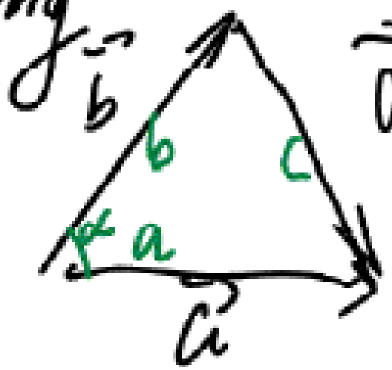
Auf diese Weise werden die ersten fünf Gesetze direkt aus den reellen Zahlen übertragen.

Das letzte Gesetz bedeutet: Vektorlänge(nquadrat) ist Positive (außer Nullvektor)

Skalarprodukt

$\boxed{2}$ Bedeutung

elementar



$\vec a - \vec b = \vec c$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\alpha$

$a = |\vec a|$

muss

$\vec a \cdot \vec b = a \cdot b \cdot \cos\alpha$

$$\vec c \cdot \vec c = (\vec a - \vec b)\cdot(\vec a - \vec b)$$
$$= \vec a \cdot \vec a - 2\,\vec a\,\vec b + \vec b \cdot \vec b$$

Blatt 2 knüpft daran die vektrorielle Dastellung einer Länge an und stellt die Forderung!!!! auf, dass sich das gesuchte Skalarprodukt wie ein übliches Produkt verhalten soll. Durch Vergleich mit dem Kosinussatz ergibt sich die übliche geometrische Definition des Skalarproduktes.

In unserem Aufbau ist der Algebrateil schon bewiesen und die (lila) Kosinus-Aussage ist wegen des el.geometrischen Kosinussatzes eine Folgerung.

Skalarprodukt

Skalarprodukt -2-
Blatt 3 sichert nochmal ab, dass die Längenberechnung mit der Schuldefinition wie erwartet klappt.
Blatt 4 zeigt eine wesentliche Eigenschaft des Skalarproduktes

$$\vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \text{ orthogonal } \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \text{ senkrecht } \vec{b}$$

Schule: $\vec{a}.\vec{b} := |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\measuredangle(\vec{a},\vec{b})$

$\boxed{3}$ Probe für $\vec{a}.\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0$

$= |\vec{a}|\cdot|\vec{a}| = a^2$

$= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

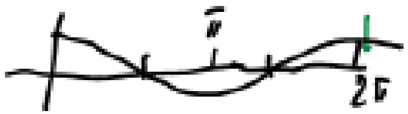
Beweis:

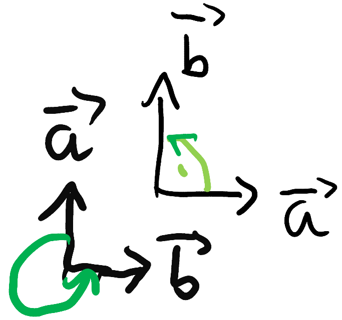
„$\Leftarrow$" $\boxed{4}$ $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = |a|\cdot|b|\cdot\cos 90° = 0 \vee \vec{a}\,\vec{b} = |a||b|\cos 270° = 0$

„$\Rightarrow$" $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Rightarrow \underbrace{|a|}_{\neq 0}\cdot\underbrace{|b|}_{\neq 0}\cdot\cos\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = 0$

$\alpha = 90° \vee \alpha = 270°$

$\vec{a} \perp \vec{b}$





Skalarprodukt

$\boxed{5}$ Zusammen Koordinaten

$$\vec a = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = a_x \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec e_x} + a_y \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec e_y} + a_z \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec e_z}$$

$\vec b$ .... ebenso

$$\vec a . \vec b = \left(a_x(\,) + (\,) + (\,)\right) \cdot \left(b_x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (\,) + (\,)\right)$$

$$= a_x \vec e_x \cdot b_x \cdot \vec e_x + a_x \cdot \vec e_x \cdot b_y \vec e_y + ,,,$$

$$= a_x \cdot b_x \, \vec e_x \cdot e_x + a_x b_y \cdot \vec e_x \cdot \vec e_y + ,,,$$

$$= a_x b_x \cdot 1 + 0 + a_y b_y + a_z b_z + ,,,$$

$$\vec a . \vec b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = \sum_i a_i b_i$$

Darstellung in der Standard-Basis. Es ist eine ONB, Ortho-Normal-Basis, also senkrecht und Länge 1.

Sie kann man in der Schule aus der Kosinus-Def. des Skalarproduktes die Standardform herleiten.

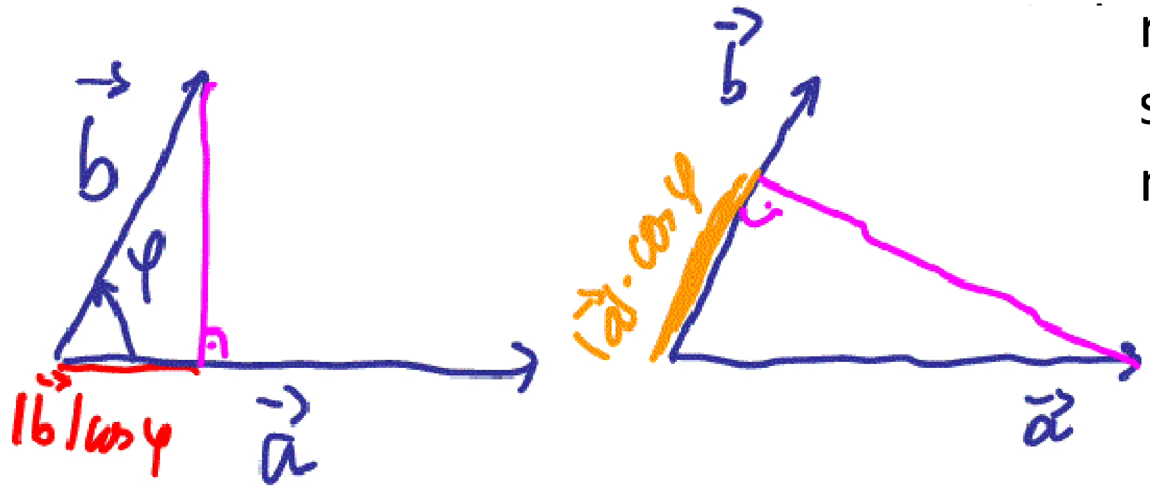
Allgemeine Definition des Skalarproduktes:

$$\vec a . \vec b := a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_n \cdot b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i$$

skalarprodukt.docx

Geometrische Deutung des Skalarproduktes

Das Skalarprodukt hängt
r Projektion des einen
s auf den anderen
men.



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi = |\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos\varphi$$

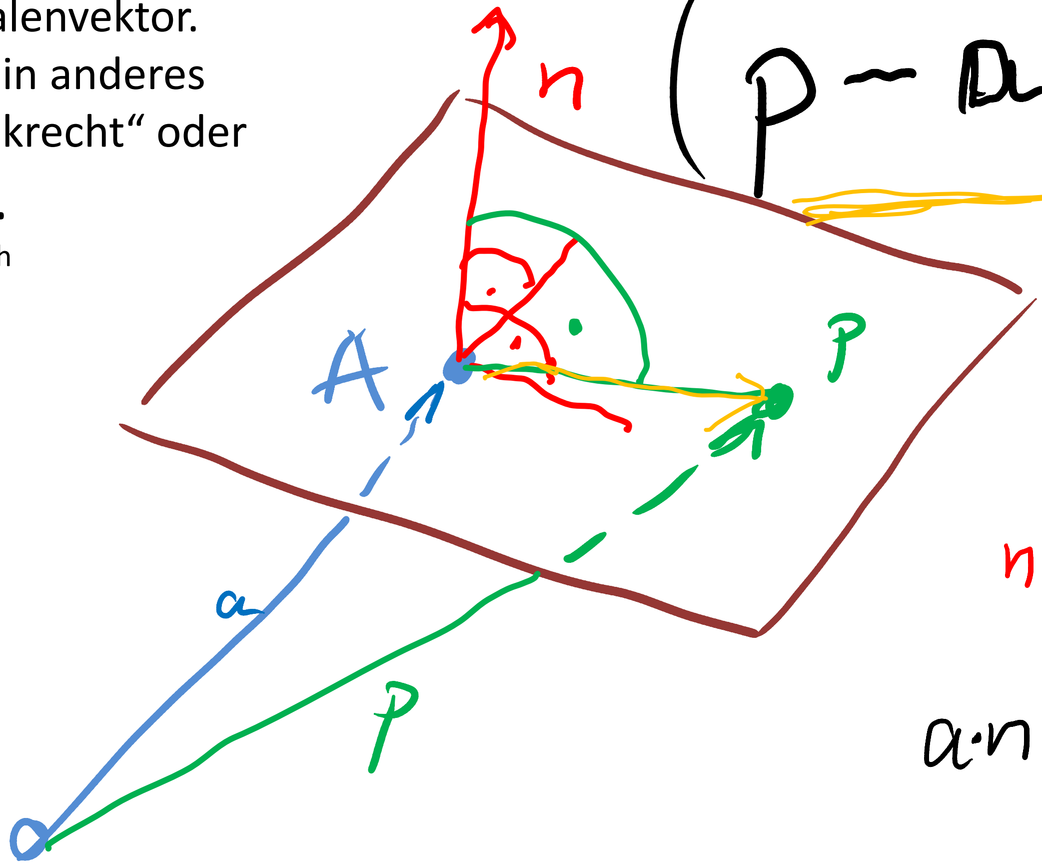
Hat ein Vektor die Länge 1, dann ist das Skalarprodukt die Länge der Projektion des anderen Vektors auf diesen.

Physik: Kraftvektor mal Wegvektor =
Kraft in Wegrichtung mal Weg= durch die Kraft verrichtete Arbeit.

Ebenendarstellung in Normalenform

n heißt Normalenvektor.
„Normal“ ist ein anderes Wort für „senkrecht“ oder „orthogonal“ .
Latein bzw. Griechisch

$$(p-a)\cdot n = 0$$



zB $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$n = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$a\cdot n = 1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 2\cdot 3 = 1 + 2 + 6 = 9$$

$$n_x\, x + n_y \cdot y + n_z \cdot z = a\cdot n$$

$$1\cdot x + 2\cdot y + 2\cdot z = 9$$

Zwei Ebenen in Normalenform

Zwei Ebenen

Notiztitel 11.11.2012

E_1: $x + 2y + 2z = 9$ $\quad n = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad a$ erfüllt $x + 2y + 2z = 9$ mgl $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

E_2: $\left(p - \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \iff -x - y + 2z = 0 + 3 + 2 = 5$

Schnittgerade:

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 9 \\ + \quad -x - y + 2z &= 5 \\ y + 4z &= 14 \\ y &= -4z + 14 \end{aligned}$$

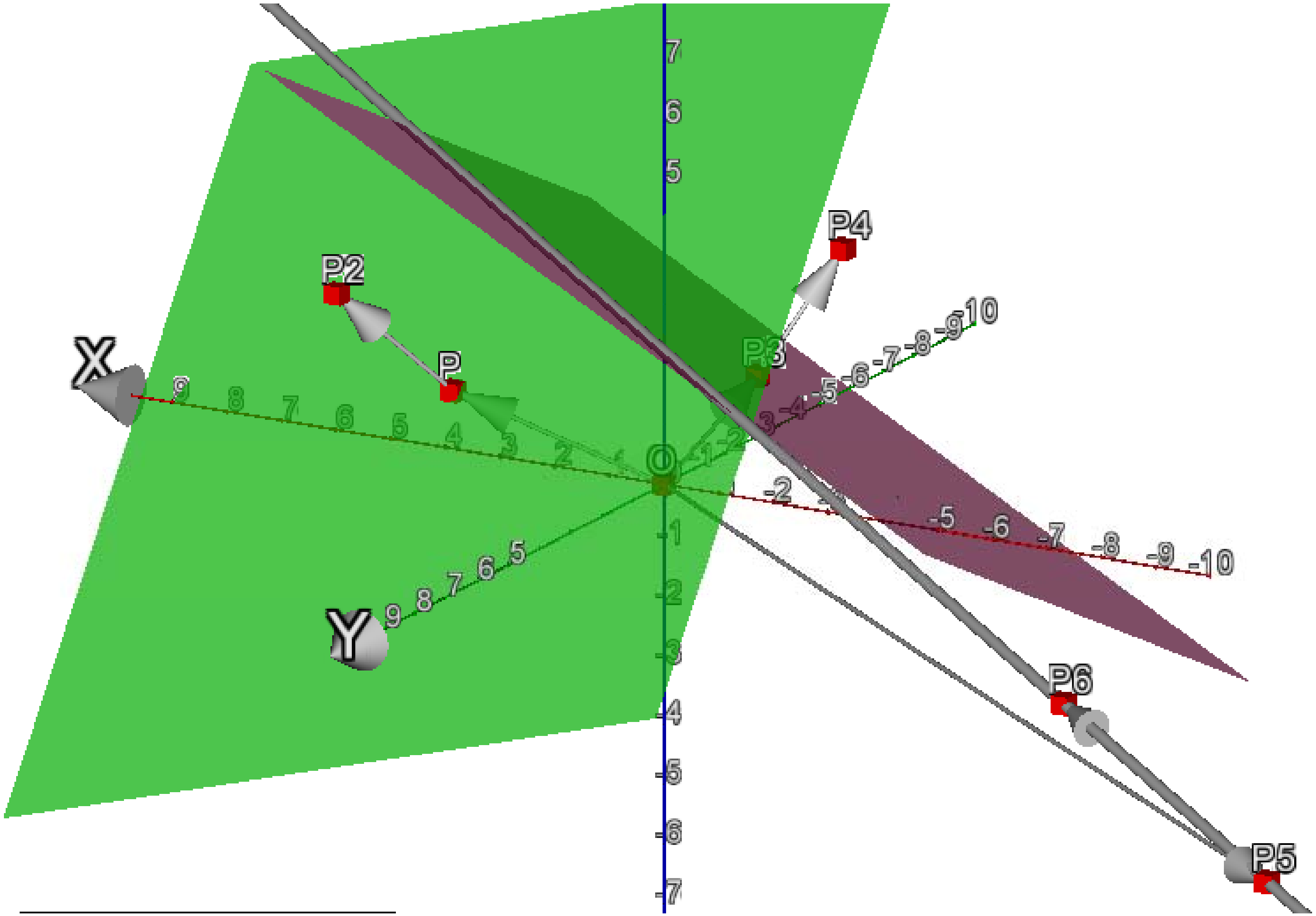
$$\begin{aligned} \rightarrow x &= -2(-4z + 14) - 2z + 9 \\ x &= 8z - 28 - 2z + 9 \\ x &= 6z - 19 \end{aligned}$$

Schnittgerade $\quad p = \begin{pmatrix} -19 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

1 / 1

Geben Sie zur Übung auch je eine Parameterdarstellung der Ebenen an.

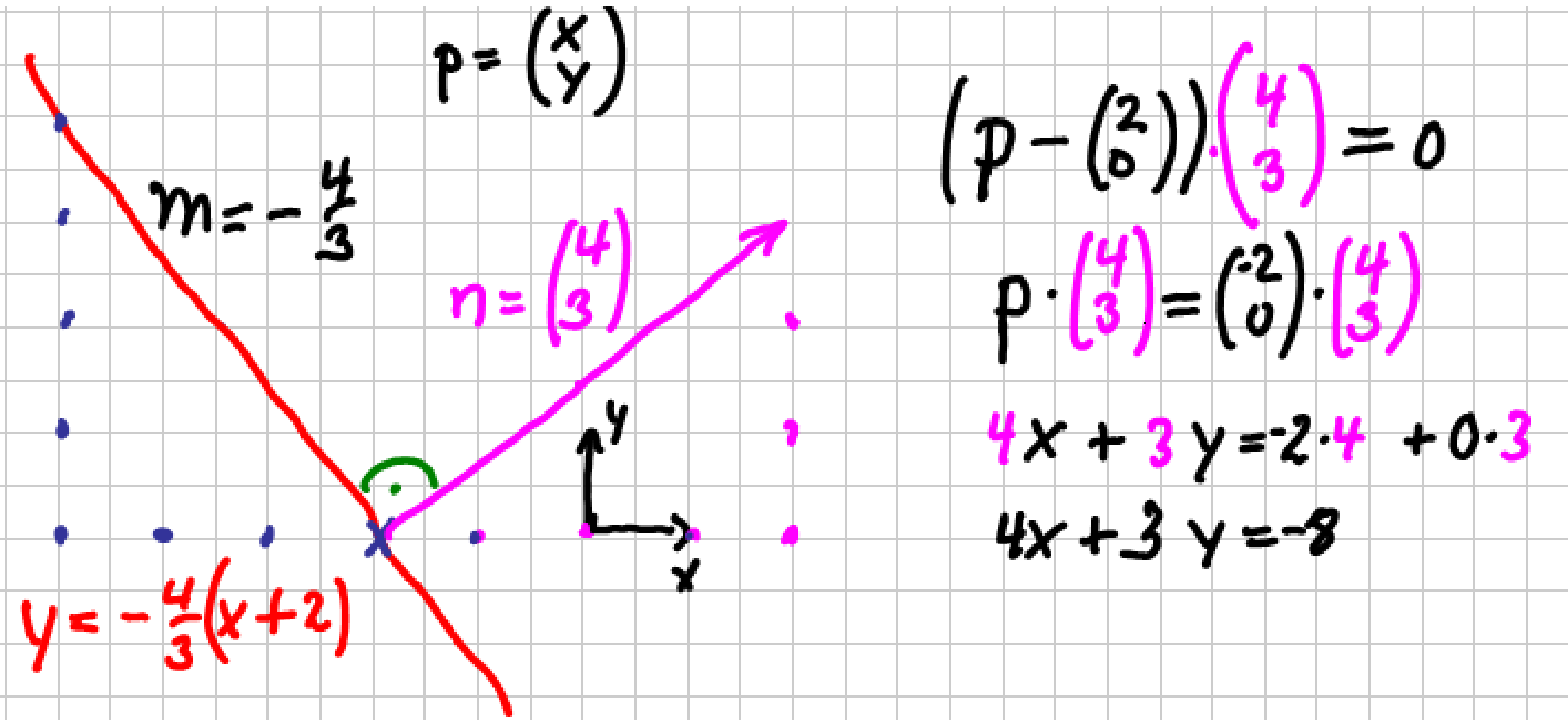
Zwei Ebenen in Normalenform



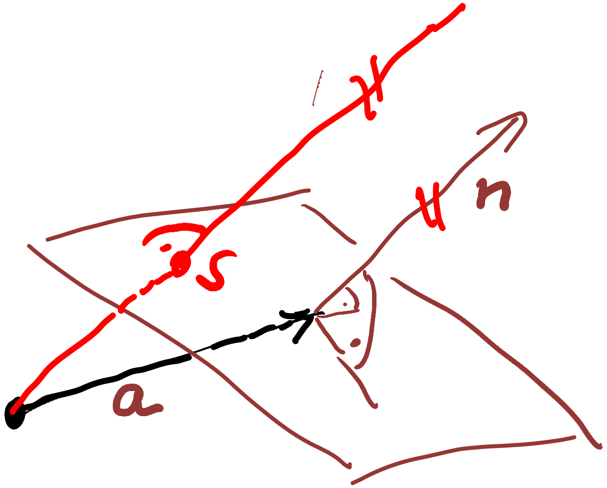
Warum heißt diese Geradengleichung Normalenform?

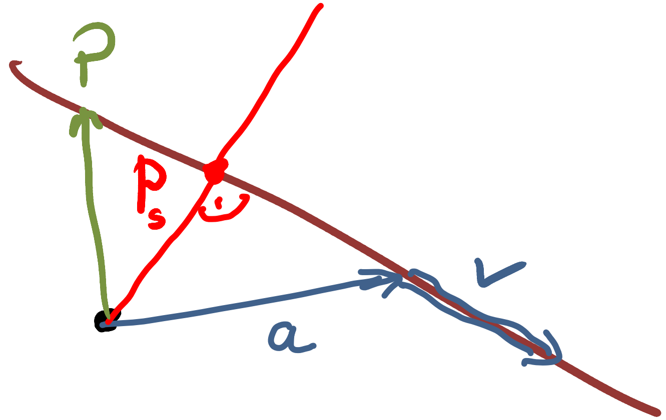
$a\,x + b\,y = c$ Dies ist die **Normalenform** der Geradengleichung.

Im Beispiel ist $4\,x + 3\,y = -8$ die Normalenform der Geraden $y = -\frac{4}{3}(x+2)$ Die Deutung ist ganz analog zu den Ebenen.



Abstand vom Ursprung





Abstand von E_1 zum Ursprung O

Gerade durch O mit Richtung n $\quad p = r\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ schneidet die Ebene E_1 in S:

$$r\cdot 1 + 2\cdot r\cdot 2 + 2\cdot r\cdot 2 = 9$$
$$r + 4r + 4r = 9$$
$$9r = 9$$
$$r = 1$$

$\vec{OS} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$

Abstand

$|\vec{OS}|^2 = 1+4+4 = 9$

gesuchter Abstand $|\vec{OS}| = 3$

Abstand der Geraden vom Ursprung

$\vec{OP_s} \perp v$

Ansatz $\left(\begin{pmatrix}-19\\14\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}6\\-4\\1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}6\\-4\\1\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-19+6s)\cdot 6 + (14-4s)(-4) + (0+s)\cdot 1 = 0$

$$36s + 16s + s = 114 + 52$$
$$s = \frac{166}{53} = 3,\ldots \quad \text{passt.}$$

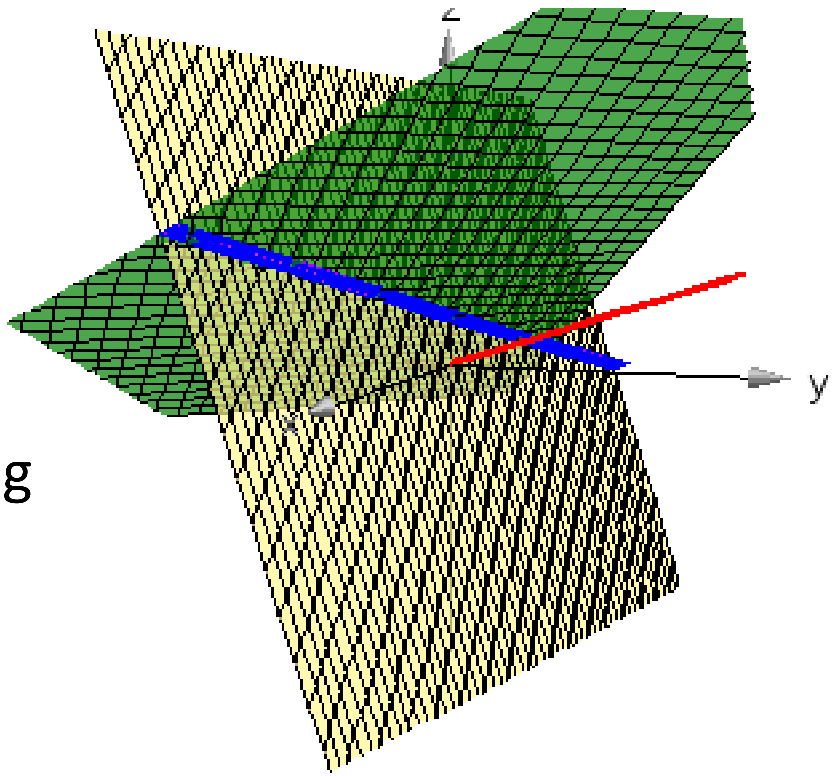
Zwei Ebenen in unterschiedlicher Darstellung

Lineare Algebra Zwei Ebenen in verschiedenen Darstellungen, Haftendorn 2012

Ebene 1 $\mathbf{eb1}:=x+3\cdot y+z=0 \blacktriangleright x+3\cdot y+z=0$ Ebene in Hessescher Normalenform

Ebene 2 $\mathbf{eb2}:=\begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix}+t\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+u\cdot\begin{bmatrix}2\\-2\\0\end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix}t+2\cdot u+3\\t-2\cdot u-1\\t+2\end{bmatrix}$ Ebene in Parameterdarstellung

In der TI-Datei ist beschrieben,
wie man diese Zeichnungen
erstellt.
Die Gleichung von Ebene 1 löst
man nach z auf, die andere gibt
man direkt als Parameterdarstellung
ein.



Zwei Ebenen in unterschiedlicher Darstellung

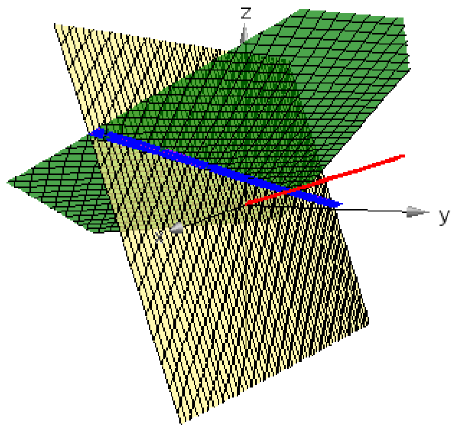
Schnittgerade der beiden Ebenen:

$$\mathbf{eb1} \blacktriangleright x+3\cdot y+z=0 \qquad \mathbf{eb2} \blacktriangleright \begin{bmatrix} t+2\cdot u+3 \\ t-2\cdot u-1 \\ t+2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{gl}:=\begin{bmatrix} x \\ y \\ -x-3\cdot y \end{bmatrix}=\mathbf{eb2} \blacktriangleright \begin{bmatrix} x=t+2\cdot u+3 \\ y=t-2\cdot u-1 \\ -x-3\cdot y=t+2 \end{bmatrix}$$

Es ergibt sich direkt ein Gleichungssystem.

$$\mathbf{lo}:=\text{solve}(\mathbf{gl},t,u,x) \blacktriangleright t=\frac{-2\cdot (y+2)}{3} \text{ and } u=\frac{-(5\cdot y+7)}{6} \text{ and } x=\frac{-(7\cdot y+2)}{3}$$

$$\mathbf{ger}:=\mathbf{eb2}|\mathbf{lo} \blacktriangleright \begin{bmatrix} \frac{-7\cdot y}{3}-\frac{2}{3} \\ y \\ \frac{2}{3}-\frac{2\cdot y}{3} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{eb1}|\mathbf{lo} \blacktriangleright \frac{2\cdot y}{3}+z-\frac{2}{3}=0$$



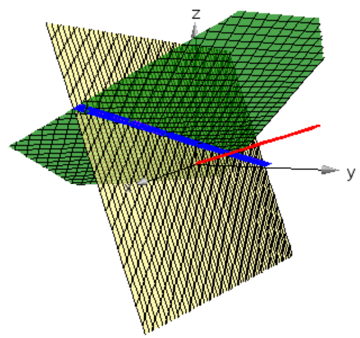
Seine Lösung lo in Ebene 2 verwendet ergibt die Schnittgerade direkt in Parameterform.

Umwandlung von Ebenengleichungen

Umrechnung von Ebenen in verschiedenen Darstellungen, Haftendorn 2012

Ebene 1 $\mathbf{eb1} := x+3\cdot y+z=0$ Ebene in Hessescher Normalenform

Ebene 2 $\mathbf{eb2} := \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + t\cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + u\cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ Ebene in Parameterdarstellung



Zeichnen der Ebenen und Schnittgerade sind im vorigen Problem.

Aufgabe 1 Hessesche Normalenform in Parameterdarstellung umwandeln.

Der Normalenvektor ist direkt ablesbar. $\mathbf{eb} := n_x\cdot x+n_y\cdot y+n_z\cdot z=d$

611x431

$\mathbf{n} := \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}$ man braucht nun zwei Vektoren v und w, die auf n senkrecht stehen.

ein Vorschlag ist: $\mathbf{v} := \begin{bmatrix} n_z \\ 0 \\ -n_x \end{bmatrix}$ und $\mathbf{w} := \begin{bmatrix} 0 \\ n_z \\ -n_y \end{bmatrix}$, als Aufpunkt kommt $\mathbf{ap} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{d}{n_z} \end{bmatrix}$ infrage,

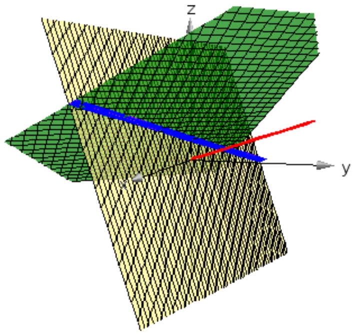
wenn (o.B.d.A.) n_z nicht 0 ist.

Umwandlung von Ebenengleichungen

Sie erfüllen dotP$(\mathbf{n},\mathbf{v})$ ▸ 0 , dotP$(\mathbf{n},\mathbf{w})$ ▸ 0 und $\mathbf{eb}|x=0$ and $y=0$ and $z=\frac{d}{n_z}$ ▸ true⚠

Damit nimmt man den Durchstoßpunkt der Ebene durch die z−Achse aus Aufpunkt.

Eine Komponente von n ist sicher ungleich 0, sonst wäre n kein Normalenvektor.



$\mathbf{eb1}$ ▸ $x+3\cdot y+z=0$ n1:= $\begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}$ ▸ $\begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}$ $\mathbf{eb1p}:=t\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}+u\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\-3\end{bmatrix}$ ▸ $\begin{bmatrix}t\\u\\-t-3\cdot u\end{bmatrix}$

Aufgabe 2 Parameterdarstellung in Hessesche Normalenform umwandeln.

$\mathbf{eb2}:=\begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix}+t\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+u\cdot\begin{bmatrix}2\\-2\\0\end{bmatrix}$ ▸ $\begin{bmatrix}t+2\cdot u+3\\t-2\cdot u-1\\t+2\end{bmatrix}$ allgemein $\mathbf{ebp}:=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}+t\cdot\begin{bmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{bmatrix}+u\cdot\begin{bmatrix}w_x\\w_y\\w_z\end{bmatrix}$

Man braucht einen Vektor, der auf beiden Richtungvektoren senkrecht steht.

Den kann man aus einen Gleichungssystem finden oder durch das Kreuzpodukt.

S.u. Wenn man einen solchen hat, er heiße np, dann kann man die Hessesche

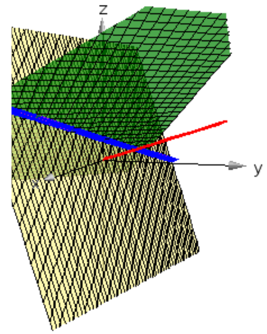
Normalenform mit dotP(p,np)=dotP$(\mathbf{a2},np)$ finden.

Das Kreuzprodukt von Vektoren, Vektorprodukt

Definition: Im R^3 ist das Kreuzprodukt k – auch Vektorprodukt genannt – zweier Vektoren v und w definiert durch:

$$\mathbf{k}:=\mathrm{crossP}\left(\begin{bmatrix}vx\\vy\\vz\end{bmatrix},\begin{bmatrix}wx\\wy\\wz\end{bmatrix}\right) \blacktriangleright \begin{bmatrix}vy\cdot wz-vz\cdot wy\\vz\cdot wx-vx\cdot wz\\vx\cdot wy-vy\cdot wx\end{bmatrix}$$

von Hand schreibt man eine Hilfszeile



$$\begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}w_x\\w_y\\w_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_x & w_x\\v_y & w_y\\v_z & w_z\\ v_x & w_x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_y w_z - w_y v_z\\v_z w_x - w_z v_x\\v_x w_y - w_x v_y\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{crossP}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-2\\0\end{bmatrix}\right) \blacktriangleright \begin{bmatrix}2\\2\\-4\end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\ 1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\-2\\0\\ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot 0-(-2)\cdot 1\\1\cdot 2-0\cdot 1\\1\cdot(-2)-2\cdot 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\-4\end{pmatrix}$$

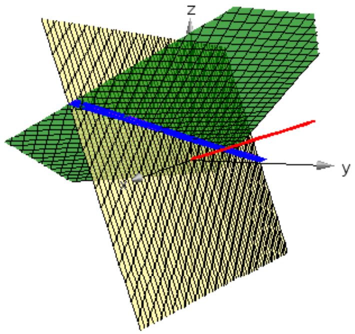
Proben $\mathrm{dotP}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\2\\-4\end{bmatrix}\right) \blacktriangleright 0$ $\mathrm{dotP}\left(\begin{bmatrix}2\\-2\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\2\\-4\end{bmatrix}\right) \blacktriangleright 0$

Umwandlung von Ebenengleichungen

Der Normalenvektor ist also im Beispiel $\mathbf{np2}:=\begin{bmatrix}2\\2\\-4\end{bmatrix}$ ▸ $\begin{bmatrix}2\\2\\-4\end{bmatrix}$ der Aufpunkt $\mathbf{a2}:=\begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix}$ ▸ $\begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix}$

Die Hessesche Normalenform ist $2\cdot x+2\cdot y-4\cdot z=\mathrm{dotP}(\mathbf{a2},\mathbf{np2})$ ▸ $2\cdot x+2\cdot y-4\cdot z=-4$

oder $x+y-2\cdot z=-2$ ▸ $x+y-2\cdot z=-2$



Allgemein: $\mathbf{k}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\mathbf{k}\cdot\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$ mit Skalarprodukt. AmTI

$\mathrm{dotP}\left(\mathbf{k},\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)=\mathrm{dotP}\left(\mathbf{k},\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\right)$ ▸ $(vy\cdot wz-vz\cdot wy)\cdot x+(vz\cdot wx-vx\cdot wz)\cdot y+(vx\cdot wy-vy\cdot wx)\cdot z$
$=a\cdot(vy\cdot wz-vz\cdot wy)+b\cdot(vz\cdot wx-vx\cdot wz)+c\cdot(vx\cdot wy-vy\cdot wx)$

Das sieht ja nicht so übersichtlich aus. Darum lohnen sich die Schreibweisen der linearen Algebra.

Basis und Dimension

37 Hier wird Folie 37 fortgeführt

Wichtig

$$(VR,+)_{\mathbb{R}},\ v_i \in VR,\ \alpha_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

$M = \{v_1,\ldots,v_n\}$ Sei eine linear unabhängige Menge von Vektoren.

Dann ist auch jede Teilmenge U von M eine linear unabhängige Menge.

Wenn M eine **maximale linear unabhängige Menge in VR** ist,
d. h. wenn durch Hinzufügen eines Vektors immer eine
linear abhängige Menge entsteht, dann **heißt M eine Basis von VR**

Mit den Vektoren einer Basis kann man also jeden anderen Vektor aus VR als Linearkombination erhalten.

Die lineare Hülle einer Basis ist also der ganze VR.

Eine Basis spannt den ganzen VR auf.

Wird ein Vektor aus M herausgenommen, so wird VR nicht aufgespannt.

Dimension eines Vektorraumes

$(VR,+)_{\mathbb{R}},\ v_i \in VR,\ \alpha_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

Satz: Alle Basen eine VR haben gleich viele Elemente.

Def.: Die **Dimension eines VR** ist die Anzahl der Basiselemente.

Beweis $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und $C = \{w_1, \ldots, w_n, \ldots w_m\}$

seien zwei verschiedene Basen des VR.

Da B Basis ist, gibt es für w_1 eine LK mit den v_i O.B.d.A. sei $a_1 \neq 0$

Dann ist: $v_1 = \frac{1}{a_1} w_1 - \sum_{i=2}^{n} v_2$ In allen LK der v_i ersetzt man v_1 durch dieses.

$B_1 = \{w_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ist damit auch eine Basis.

Das kann man fortsetzen, bis man alle Basisvektoren v_i ausgetauscht hat. $B_n = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ ist also eine Basis. (Basis-Austausch-Satz)

Dann ist aber C keine linear unabhängige Menge, die überzähligen

$w_{n+1}, \ldots, w_m$ lassen sich durch die $B_n = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ ausdrücken.

q.e.d.

Beispiele für Vektorräume und ihre Basen

- $M=\{v\}$ Die lineare Hülle vom M ist ein eindimensionaler Raum.
- $[\![\{v\}]\!]$ ist in der geometrischen Deutung eine Gerade . Diese Deutung ist nur möglich, wenn die Vektoren aus $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ sind. Abstrakt sagt man „linearer Unterraum"

Im Folgenden seien die genannten Vektoren linear unabhängig.

- $M=\{v,w\}$, lineare Hülle vom M ist ein zweidimensionaler Raum.
- $[\![\{v,w\}]\!]$ ist eine Ebene in der geometrischen Deutung.
- $M=\{v,w,u\}$, lineare Hülle vom M ist ein dreidimensionaler Raum.
- $[\![\{v,w,u\}]\!]$ ist in geometrischen Deutung <u>der</u> $\mathbb{R}^3$.

$$v=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-1\\3\end{pmatrix},\ w=\begin{pmatrix}0\\2\\0\\-1\\3\end{pmatrix},\ u=\begin{pmatrix}1\\4\\1\\-1\\3\end{pmatrix},\qquad M=\{v,w,u\}$$

- Diese Vektoren spannen einen 3-dimensionalen Unterraum des $\mathbb{R}^5$ auf.

Beispiele für Vektorräume und ihre Basen

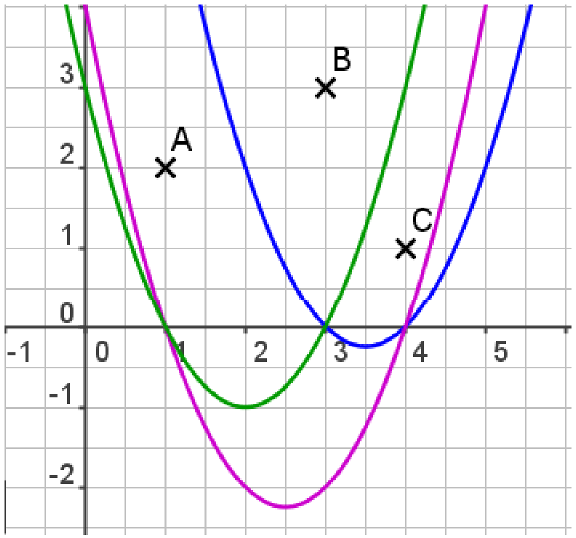
$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

Die Polynome bis zum Grad n bilden einen (n+1)-dimensionalen Vektorraum VP_n.

VP hat die Standard-Basis

Warum ist auch
Eine Basis?

$$l_1(x) = (x-3)(x-4)$$
$$l_2(x) = (x-1)(x-4)$$
$$l_3(x) = (x-1)(x-3)$$



Linearkombination

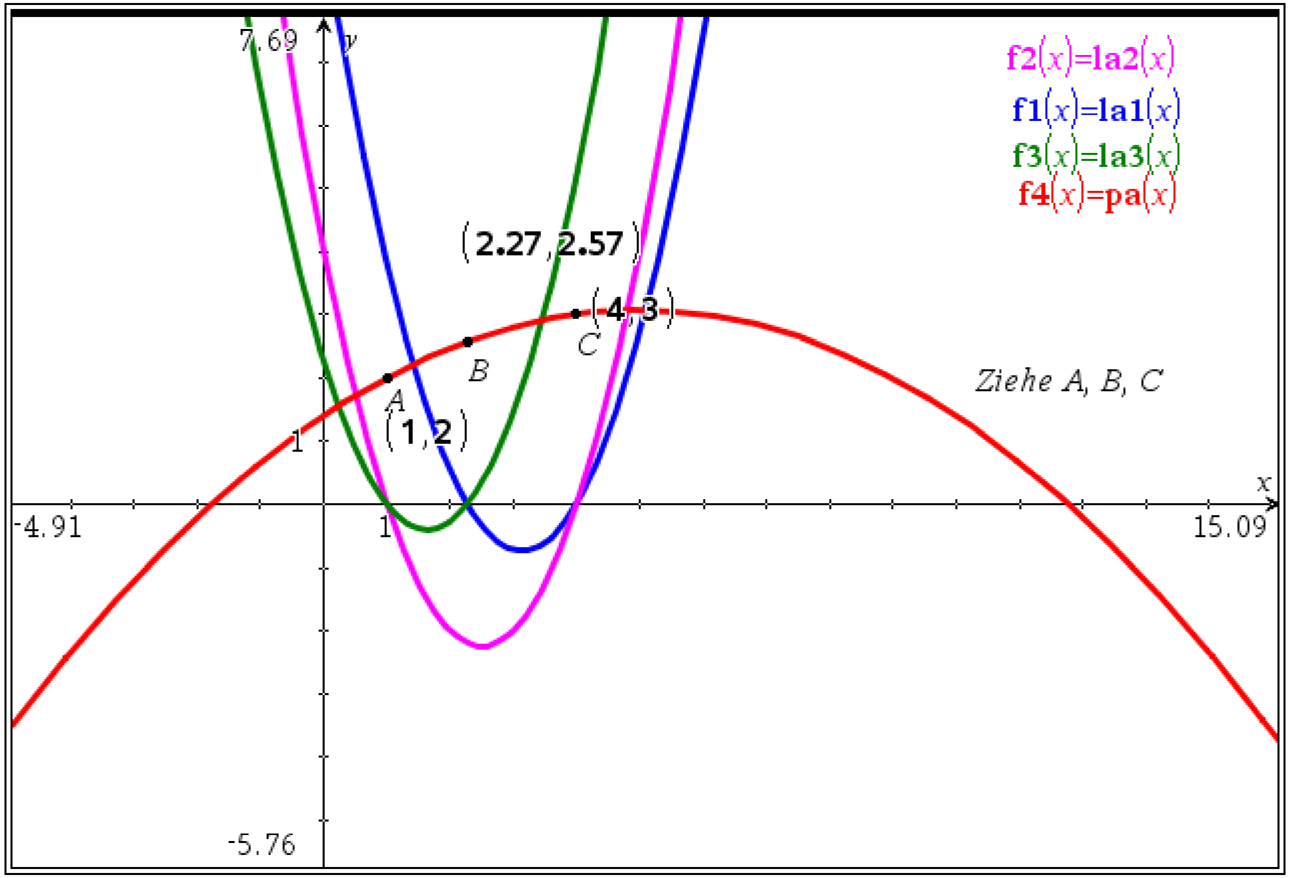
$$p(x) = c_1 l_1(x) + c_2 l_2(x) + c_3 l_3(x)$$

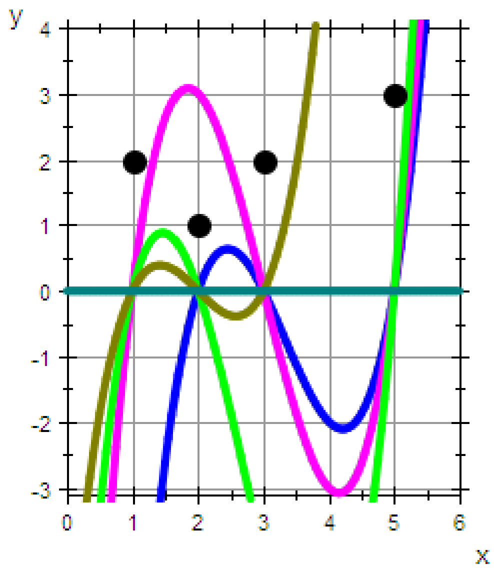
Aus $p(x) \equiv 0$ identisch 0, die x-Achse

folgt……………………………………………

Jede Parabel und jede Gerade lässt sich durch Wahl der ci darstellen.

Lagrange Interpolation





Basis und Dimension

Alle Lagrange-Polynome haben an genau einer Stützstelle keine Nullstelle, während sie an allen anderen Stützstellen Nullstellen haben.

$\mathbf{la1}(x):=(x-\mathbf{bpx})\cdot(x-\mathbf{cpx}) \blacktriangleright \mathit{Fertig}$ $\mathbf{la1}(x) \blacktriangleright (x-4)\cdot(x-2)$ $\mathbf{c1}:=\dfrac{\mathbf{apy}}{\mathbf{la1}(\mathbf{apx})} \blacktriangleright \dfrac{2}{3}$

$la2(x):=(x-\mathbf{apx})(x-\mathbf{cpx}) \blacktriangleright \mathit{Fertig}$ $\mathbf{la2}(x) \blacktriangleright (x-4)\cdot(x-1)$ $\mathbf{c2}:=\dfrac{\mathbf{bpy}}{\mathbf{la2}(\mathbf{bpx})} \blacktriangleright \dfrac{-5}{2}$

$la3(x):=(x-\mathbf{apx})(x-\mathbf{bpx}) \blacktriangleright \mathit{Fertig}$ $\mathbf{la3}(x) \blacktriangleright (x-2)\cdot(x-1)$ $\mathbf{c3}:=\dfrac{\mathbf{cpy}}{\mathbf{la3}(\mathbf{cpx})} \blacktriangleright \dfrac{1}{2}$

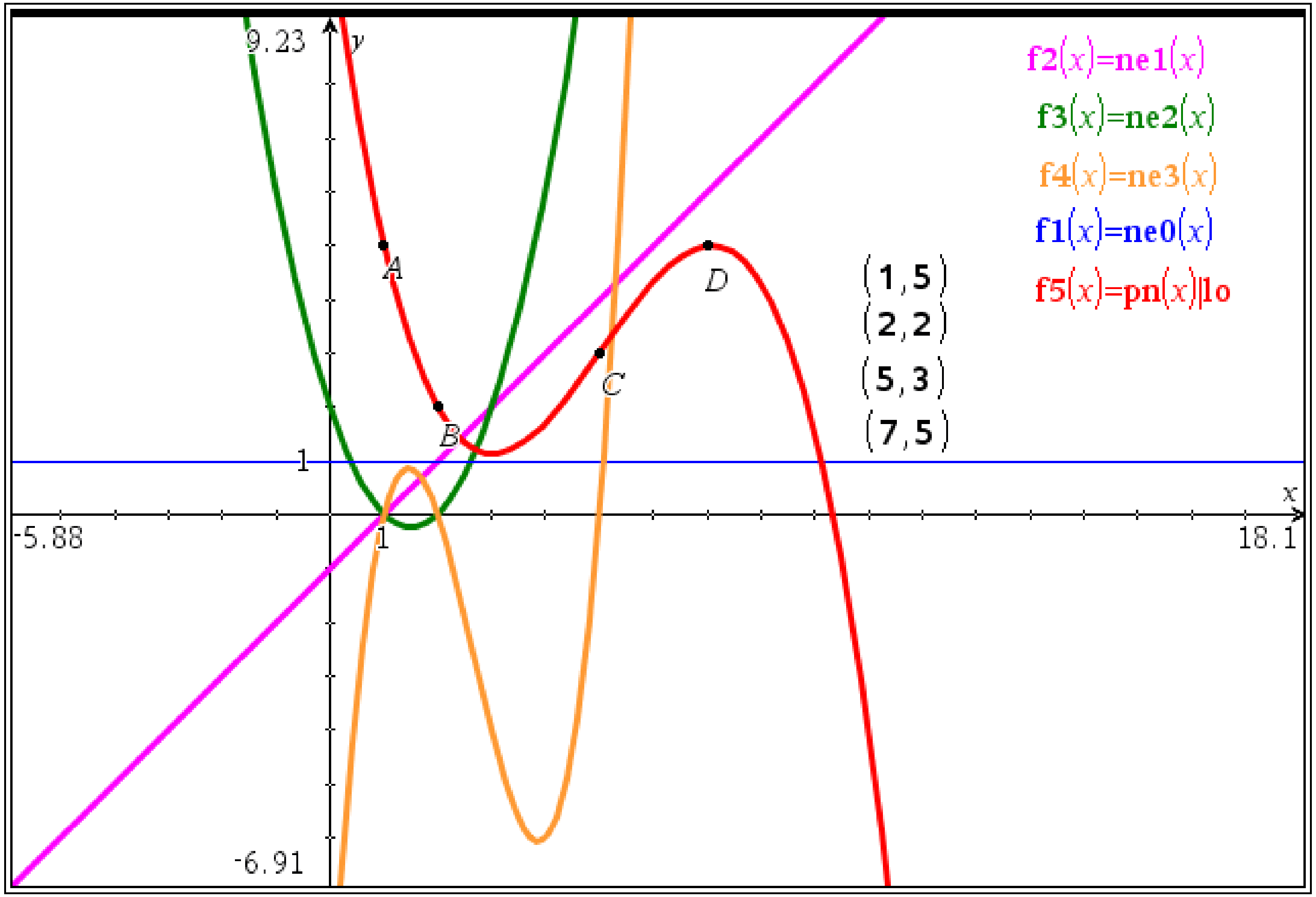
Die Polynome la1, la2 und la3 sind linear unabhängig, wie man sich eicht überlegt.

Da es die Standandbasis $\begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \end{bmatrix}$ in diesem Vektorraum gibt, daher spannen auch die drei Lagrange−Polynom diesen VP2 auf.

$\mathbf{pa}(x):=\mathbf{c1}\cdot\mathbf{la1}(x)+\mathbf{c2}\cdot\mathbf{la2}(x)+\mathbf{c3}\cdot\mathbf{la3}(x) \blacktriangleright \mathit{Fertig}$ $\mathbf{pa}(x) \blacktriangleright \dfrac{-4\cdot x^2}{3}+7\cdot x-\dfrac{11}{3}$

Jedes andere Polynom ist einen Linearkomination aus ihnen.

Newton Interpolation



Basis und Dimension

$\mathbf{ne0}(x):=1$ ▸ *Fertig* $\mathbf{ne1}(x):=x-\mathbf{apx}$ ▸ *Fertig* $\mathbf{ne2}(x):=(x-\mathbf{apx})\cdot(x-\mathbf{bpx})$ ▸ *Fertig*

$\mathbf{ne3}(x):=(x-\mathbf{apx})\cdot(x-\mathbf{bpx})\cdot(x-\mathbf{cpx})$ ▸ *Fertig*

$\mathbf{pn}(x):=c1\cdot\mathbf{ne0}(x)+c2\cdot\mathbf{ne1}(x)+c3\cdot\mathbf{ne2}(x)+c4\cdot\mathbf{ne3}(x)$ ▸ *Fertig*

Das gesuchte Polynom muss eine Linearkombination der vier Newtonpolynome sein. (Deren lineare Unabhängigkeit siehe unten)

Lineare Unabhängigkeit der Newtonpolynome

$\text{solve}(\{\mathbf{pn}(1)=0,\mathbf{pn}(2)=0,\mathbf{pn}(5)=0,\mathbf{pn}(7)=0\},\{c1,c2,c3,c4\})$

▸ $c1=0$ and $c2=0$ and $c3=0$ and $c4=0$

erzwingt die triviale Lösung. das sieht man auch von Hand ganz schnell,

wenn mann die Klammerform der Definition betrachtet.

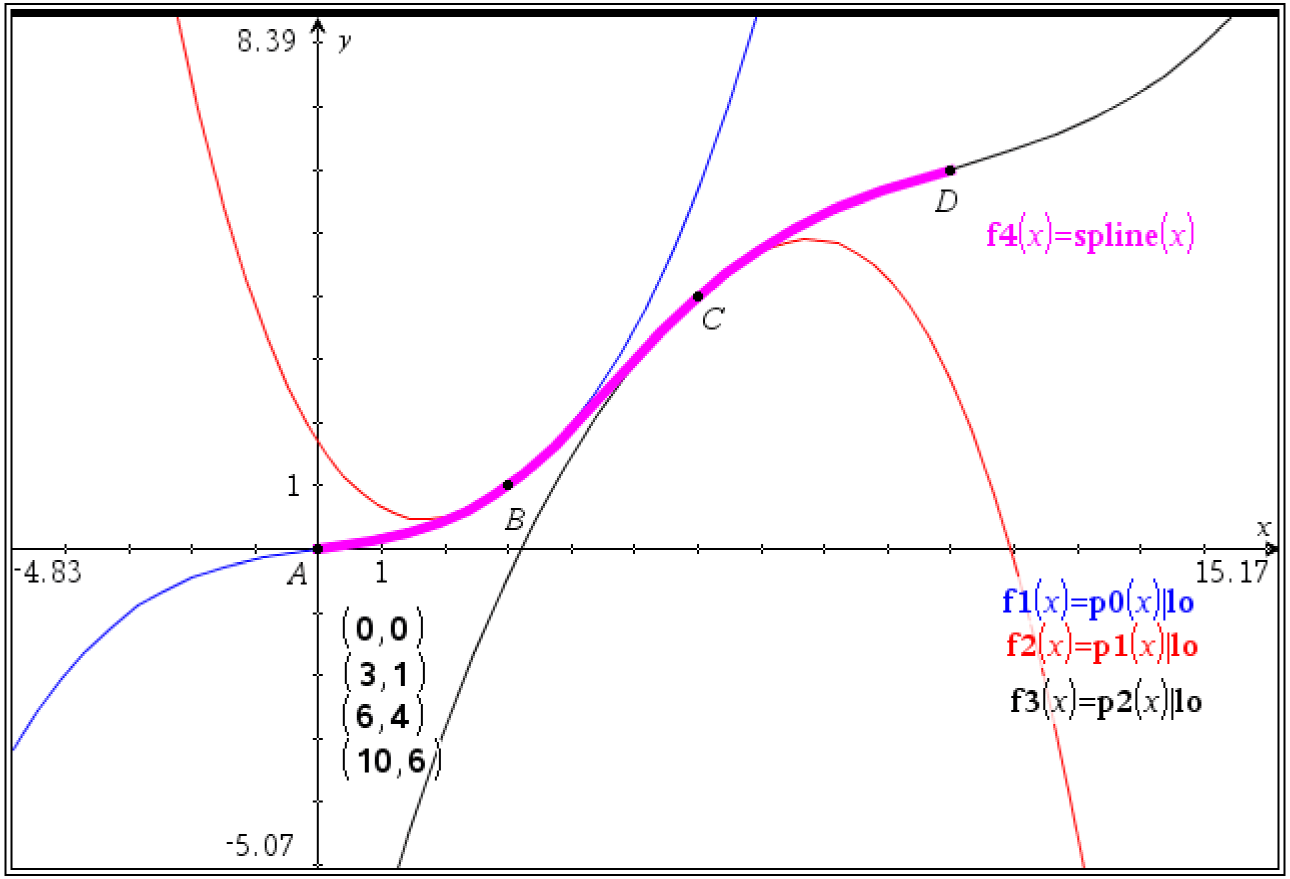
$\mathbf{pn}(1)=0$ ▸ $c1=0$

$\mathbf{pn}(2)=0$ ▸ $c1+c2=0$

$\mathbf{pn}(5)=0$ ▸ $c1+4\cdot c2+12\cdot c3=0$

$\mathbf{pn}(7)=0$ ▸ $c1+6\cdot c2+30\cdot c3+60\cdot c4=0$

Kubische Splines



Jedes Spline-Polynom ist einer an das Problem angepassten eigenen Basis dargestellt.

Es ist bezogen auf seinen „linken Nagel“ definiert.

Kubische Splines mit 4 Punkten

Prof. Dr. Dörte Haftendorn 2012 Definition eines kubischen Spines, der durch 4 frei ziehbare Punkte verläuft. A=[1,2]; B=[3,5]; C=[4,3]; D=[6,4] Die Punkte kann man sich als Nägel vorstellen, durch die der Spline laufen soll.

$\mathbf{apx}:=0 \blacktriangleright 0$ $\mathbf{bpx}:=3 \blacktriangleright 3$ $\mathbf{cpx}:=6 \blacktriangleright 6$ $\mathbf{dpx}:=10 \blacktriangleright 10$

$\mathbf{apy}:=0 \blacktriangleright 0$ $\mathbf{bpy}:=1 \blacktriangleright 1$ $\mathbf{cpy}:=4 \blacktriangleright 4$ $\mathbf{dpy} \blacktriangleright 6$

Das Handwerk zum Punktesetzen und "zugfest" machen ist auf Seite 2 des zweiten Problems der Datei lagrange-ti.tns beschrieben.

$\mathbf{p0}(x):=\mathbf{apy}+b0\cdot(x-\mathbf{apx})+\mathbf{c0}\cdot(x-\mathbf{apx})^2+d0\cdot(x-\mathbf{apx})^3 \blacktriangleright \mathit{Fertig}$ Durch (apx, apy)

$\mathbf{p1}(x):=\mathbf{bpy}+b1\cdot(x-\mathbf{bpx})+c1\cdot(x-\mathbf{bpx})^2+d1\cdot(x-\mathbf{bpx})^3 \blacktriangleright \mathit{Fertig}$ Durch (bpx, bpy)

$\mathbf{p2}(x):=\mathbf{cpy}+b2\cdot(x-\mathbf{cpx})+c2\cdot(x-\mathbf{cpx})^2+d2\cdot(x-\mathbf{cpx})^3 \blacktriangleright \mathit{Fertig}$ Durch (cpx, cpy)

Damit erreicht jedes Polynom seinen "Startnagel".

Für einen kubischen Spline durch n+1 Punkte braucht man n Spline-Polynome 3. Grades

- Sie haben 4*n Koeffizienten.
- Sie treffen ihren linken Nagel, n Bedingungen
- Sie treffen ihren rechten Nagel, n Bedingungen
- An (n-1) inneren Nägeln wird die Steigung übergeben, (n-1) Bedingungen
- An (n-1) inneren Nägeln wird die Krümmung übergeben, (n-1) Bedingungen

Um das entstehende Gleichungssystem eindeutig lösen zu können, Muss man noch Anfangs und Endbedingung hinzufügen.
Beim **natürlichen Spline** wählt man am ersten und letzten Nagel Krümmung 0. Der Spline entspricht dann etwa der Form, die ein elastischer Stab, der durch die Nägel geführt wird, einnimmt.
Er hat dann minimale Biegeenergie.