Lineare Algebra www.mathematik−verstehen.de Haftendorn 2012

Für Lehrer: Gleichungssystemeerzeugen, die dann lösbar sind

$\mathbf{aa}:=\begin{bmatrix}1 & 3 & -1\\ 4 & -2 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}$ gewünschte Lösung $\mathbf{lo}:=\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 1\end{bmatrix}$ allg.Lös−Vektor $\mathbf{p}:=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$

Das folgende bb sichert die Lösbarkeit $\mathbf{bb}:=\mathbf{aa}\cdot\mathbf{lo}$ ▸ $\begin{bmatrix}-2\\ 11\\ 8\end{bmatrix}$

Probe $\text{solve}(\mathbf{aa}\cdot\mathbf{p}=\mathbf{bb},x,y,z)$ ▸ $x=2$ and $y=-1$ and $z=1$

Weitere Prüfung: $\mathbf{aa}^{-1}\cdot\mathbf{bb}$ ▸ $\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 1\end{bmatrix}$ Anstelle der Bestimmung von von aa^{-1} ▸ $\begin{bmatrix}\frac{1}{7} & \frac{8}{35} & \frac{-1}{35}\\ \frac{2}{7} & \frac{-1}{7} & \frac{1}{7}\\ 0 & \frac{-1}{5} & \frac{2}{5}\end{bmatrix}$

kann man auch $\text{rowDim}(\mathbf{aa})$ ▸ 3 prüfen. Da muss 3 stehen, wenn man eine eindeutige Lösung will.

Ausführliches Vorgehen (analog dem von Hand) im Calculator−Fenster.

1.1

GleichungssystemLösen

$\mathbf{aae}:=\text{augment}(\mathbf{aa},\mathbf{bb}) \blacktriangleright \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & 1 & 11 \\ 2 & -1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$ Dies ist die erweiterte Matrix.

$\text{ref}(\mathbf{aae}) \blacktriangleright \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{11}{4} \\ 0 & 1 & \frac{-5}{14} & \frac{-19}{14} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ Hier schließt man von unten nach oben: z=1

$y-\frac{5}{14}\cdot z=\frac{-19}{14} \blacktriangleright y-\frac{5\cdot z}{14}=\frac{-19}{14}$ also y=−1 und $x-\frac{1}{2}\cdot y+\frac{1}{4}\cdot z=\frac{11}{4} \blacktriangleright x-\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=\frac{11}{4}$ also x=2

Das hat man dierekt mit $\text{rref}(\mathbf{aae}) \blacktriangleright \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *Also x=2, y=−1 z=1*

Aber auch mit $\text{solve}(\mathbf{aa}\cdot\mathbf{p}=\mathbf{bb},x,y,z) \blacktriangleright x=2 \text{ and } y=-1 \text{ and } z=1$

Auch $\text{solve}(\{x+3\cdot y-z=-2,4\cdot x-2\cdot y+z=11,2\cdot x-y+3\cdot z=8\},x,y,z) \blacktriangleright x=2 \text{ and } y=-1 \text{ and } z=1$

Letzteres ist natürlich nur sinnvoll, wenn man die Matrix nicht aufgestellt hat.

Nachfolgender Befehl funktioniert nur im Calculatorfenster. (Achtung: Bibliotheksbenutzung)

1.2

linalgcas\gaussstep (aae)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & 1 & 11 \\ 2 & -1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

$zeile2=zeile2-4\cdot zeile1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -14 & 5 & 19 \\ 2 & -1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

$zeile3=zeile3-2\cdot zeile1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -14 & 5 & 19 \\ 0 & -7 & 5 & 12 \end{bmatrix}$$

$zeile3=zeile3-\frac{zeile2}{2}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -14 & 5 & 19 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

1/1

1.3