Lineare Algebra

Mathematik in wxMaxima www.mathematik-verstehen.de Haftendorn Dez 2010

0.1 Handling

Achtung: Durch Anklicken der linken Zellmarkierung kann man die Abschnitte und auch einzelne Zellen aufklappen und auch wieder zuklappen.

Endung *.wxmx ist komfortabel. Ist die Endung *.wxm muss man erst noch alle Ausgaben neu erzeugen. Mit Strg r werden alle aufgeklappten
Zum Lernen ist es besser die Zellen einzeln (mit Shift+Enter) auszuwerten.

Werte einzelne Zellen aus mit Shift-Enter.
Auswertung in einem Rutsch: Falte alle Abschnitte auf,
werte alle Zellen mit Strg r aus (auch Menu Cell Alle Zellen auswerten).

wxMaxima ist über Maxima und Macsyma ein Lisp-Abkömmling.
Die Sprache Lisp ist Listenorientiert. Daher spielt auch bei wxMaxima das Listenkonzept eine große Rolle.

0.2 Inhalt

1 Matrizen und Vektoren

1.1 Definition von Matrizen

Direkte Eingabe zeilenweise in Listen:

```
(%i1) cc:matrix([1,2,3,4],[5,6,7,8],[x,b,c,d]);
      bb:matrix([8,9],[-1,2],[3,-4]);
```

(%o1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ x & b & c & d \end{bmatrix}$

(%o2) $\begin{bmatrix} 8 & 9 \\ -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

der Doppelpunkt ist in Maxima das Zuweisungszeichen

Interaktive Eingabe,
Achtung: nach jeder Zeile shift+Enter
Erst /* und */1 löschen, eigefügt,
damit automatische Auswertung klappt

```
(%i108) /* aa:entermatrix(2,3) */1;
(%o108) 1
```

```
(%i107) aa:matrix([9,6,-6],[-3,-9,4]);
```

$$(\%o107)\quad \begin{bmatrix} 9 & 6 & -6 \\ -3 & -9 & 4 \end{bmatrix}$$

Wenn man sich bei dieser Methode verschrieben hat, markiert man die Ausgabe,
kopiert sie mit strg c

1.2 Verändern von Matrizen

Anfügen einer Zeile

```
(%i5) aaa:addrow(aa,[0,-7,8]);
```

$$(\%o5)\quad \begin{bmatrix} 9 & 6 & -6 \\ -3 & -9 & 4 \\ 0 & -7 & 8 \end{bmatrix}$$

```
(%i6) bv:transpose(matrix([9,-2,7]));
```

$$(\%o6)\quad \begin{bmatrix} 9 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

transpose sorgt für die Spaltenform

```
(%i7) aae:addcol(aaa,[9,-2,7]);
```

$$(\%o7)\quad \begin{bmatrix} 9 & 6 & -6 & 9 \\ -3 & -9 & 4 & -2 \\ 0 & -7 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

Mit addcol kann man aber auch eine einfache Liste als
Spalte anfügen, bv hätte man auch schreiben können statt [9,-2,7].

So erhält man also die erweiterte Matrix

1.3 Rechnen mit Matrizen

```
(%i8) aaa.bb;
```

$$(\%o8)\quad \begin{bmatrix} 48 & 117 \\ -3 & -61 \\ 31 & -46 \end{bmatrix}$$

Achtung, Multiplikation mit Punkt statt mit dem mal-*

Transponieren einer Matrix

(%i9) bbt:transpose(bb);

(%o9) $\begin{bmatrix} 8 & -1 & 3 \\ 9 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

(%i10) aa+5*aa;

(%o10) $\begin{bmatrix} 54 & 36 & -36 \\ -18 & -54 & 24 \end{bmatrix}$

Anfügen einer Zeile

(%i11) bbb:addrow(bbt,[1,-2,-3]);

(%o11) $\begin{bmatrix} 8 & -1 & 3 \\ 9 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

Addition, Subtraktion

(%i12) [aaa+bbb,aaa-bbb];

(%o12) $\left[\begin{bmatrix} 17 & 5 & -3 \\ 6 & -7 & 0 \\ 1 & -9 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 7 & -9 \\ -12 & -11 & 8 \\ -1 & -5 & 11 \end{bmatrix} \right]$

Wie erwartet komponentenweise, in einer Zeile notiert zum Platzsparen.

2 Gleichungssysteme

2.1 Betrachtung der Koeffizienzenmatix

Beispiel das auch am TI Nspire vewendet ist

Fassen wir aae als lineares Gleichungssystem auf.
Drei Variabe, drei Gleichungen mit rechter Seite.

(%i13) aae;

(%o13) $\begin{bmatrix} 9 & 6 & -6 & 9 \\ -3 & -9 & 4 & -2 \\ 0 & -7 & 8 & 7 \end{bmatrix}$

(%i14) triangularize(aae);

(%o14) $\begin{bmatrix} 9 & 6 & -6 & 9 \\ 0 & -63 & 18 & 9 \\ 0 & 0 & -378 & -378 \end{bmatrix}$

(%i15) echelon(aae);

(%o15) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Dieser Befehl entspricht ref(M) beim TI Nspire.

(%i16) rank(aae);

(%o16) 3

Dieses kann man dann entsprechend deuten.

2.2 Gleichungen, bei denen die Varablen genannt werden

(%i20) g1:9*r+6*s-6*t=9;
g2:-3*r-9*s+4*t=-2;
g3:-7*s+8*t=7;

(%o20) $-6\,t+6\,s+9\,r=9$

(%o21) $4\,t-9\,s-3\,r=-2$

(%o22) $8\,t-7\,s=7$

Den nachfolgenden Eintrag erhält man interaktiv mit dem Menü
Gleichunegen->löse lineares System. Man trägt dann g1, g2 und g3 ein,
bei Variablen trägt man r,s,t ein, mit Kommata getrennt.

(%i23) linsolve([g1, g2, g3], [r,s,t]);

(%o23) $[r=\frac{11}{7},s=\frac{1}{7},t=1]$

(%i24) linsolve([g1,g2,g3],[r,s,t]);

(%o24) $[r=\frac{11}{7},s=\frac{1}{7},t=1]$

(%i25) [r,s,t];

(%o25) $[r,s,t]$

Hier werden die Ergebnisse nur angezeigt.

2.3 Gleichungen, bei deren Lösung Variable belegt werden

(%i26) globalsolve:true$

(%i27) linsolve([g1,g2,g3],[r,s,t]);

(%o27) $[r:\frac{11}{7},s:\frac{1}{7},t:1]$

(%i28) [r,s,t];

(%o28) $[\frac{11}{7},\frac{1}{7},1]$

Nun sind r,s und t belegt und nicht mehr frei.

(%i29) [g1, g2,g3];

(%o29) $[-6\,t+6\,s+9\,r=9,4\,t-9\,s-3\,r=-2,8\,t-7\,s=7]$

(%i30) linsolve([g1,g2,g3],[r,s,t]);

Unacceptable variable to `solve': $\frac{11}{7}$

-- an error. To debug this try: debugmode(true);

Man kann das Gls nicht mehr lösen.
Darum stelle ich leber wieder die Globale Option zurück auf den voreingestellten Wert false

(%i31) globalsolve:false$

(%i48) remvalue(r,s,t)$ [r,s,t];

(%o49) $[r,s,t]$

Die Variablen sollen wieder freigegeben werden

2.4 Lineare Gleichungen mit Matrizen lösen

(%i32) xv:transpose(matrix([xx,yy,zz]));

(%o32) $\begin{bmatrix} xx \\ yy \\ zz \end{bmatrix}$

(%i33) aaa;

(%o33) $\begin{bmatrix} 9 & 6 & -6 \\ -3 & -9 & 4 \\ 0 & -7 & 8 \end{bmatrix}$

Wenn die Koeefizientenmatrix ein Inverses hat,
dann ist die Lösung ds Sytem aaa.xv=bv zu haben:

(%i34) ainv:invert(aaa);

(%o34) $\begin{bmatrix} \frac{22}{189} & \frac{1}{63} & \frac{5}{63} \\ -\frac{4}{63} & -\frac{4}{21} & \frac{1}{21} \\ -\frac{1}{18} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$

(%i35) xv=ainv.bv;

(%o35) $\begin{bmatrix} xx \\ yy \\ zz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{7} \\ \frac{1}{7} \\ 1 \end{bmatrix}$

(%i36) xv[1,1];

(%o36) xx

```
Hier finden keine Zuweisungen statt
```

2.5 Automatisches Aufstellen des Gleichungssystems

(%i60) angl:3 /*Anzahl der Glaichungen*/$

(%i61) glsli:makelist((aaa.xv) [i,1]=bv[i,1],i,1,angl);

(%o61) $[-6\,zz+6\,yy+9\,xx=9, 4\,zz-9\,yy-3\,xx=-2, 8\,zz-7\,yy=7]$

(%i62) linsolve(glsli,[xx,yy,zz]);

(%o62) $[xx=\frac{11}{7}, yy=\frac{1}{7}, zz=1]$

(%i63) solve(glsli,[xx,yy,zz]);

(%o63) $[[xx=\frac{11}{7}, yy=\frac{1}{7}, zz=1]]$

3 Affine Abbildungen, rechnerisch

(%i100) aaa;

(%o100) $\begin{bmatrix} 9 & 6 & -6 \\ -3 & -9 & 4 \\ 0 & -7 & 8 \end{bmatrix}$

(%i101) tx:1$ ty:2$ tz:-1$

(%i104) tv:transpose(matrix([tx,ty,tz]));

(%o104) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

(%i105) f(xv):=aaa.xv+tv;

(%o105) $\mathrm{f}(xv) := aaa\ .\ xv + tv$

(%i96) f(xv);

(%o96) $\begin{bmatrix} -6\,zz+6\,yy+9\,xx+1 \\ 4\,zz-9\,yy-3\,xx+2 \\ 8\,zz-7\,yy-1 \end{bmatrix}$

(%i72) aaa.aaa;

(%o72) $\begin{bmatrix} 63 & 42 & -78 \\ 0 & 35 & 14 \\ 21 & 7 & 36 \end{bmatrix}$

(%i71) aaa;

(%o71) $\begin{bmatrix} 9 & 6 & -6 \\ -3 & -9 & 4 \\ 0 & -7 & 8 \end{bmatrix}$

(%i97) tvm(tv):=addcol(tv,tv,tv);

(%o97) $\mathrm{tvm}(tv):=\mathrm{addcol}(tv,tv,tv)$

(%i98) fm(xv):=aaa.xv+tvm(tv);

(%o98) $\mathrm{fm}(xv):=aaa\ .\ xv+\mathrm{tvm}(tv)$

(%i99) fm(aaa);

(%o99) $\begin{bmatrix} 64 & 43 & -77 \\ 2 & 37 & 16 \\ 20 & 6 & 35 \end{bmatrix}$