

Quadrat- und Wurzelfunktion

Komplexe Funktionen Haftendorn Mai 2013

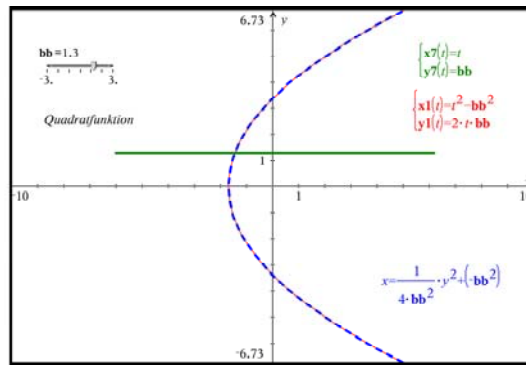
Waagerechte Geraden, Höhenlagea $z := t + i \cdot b$
 Senkrechte Geraden an der Stelle b $zz := a + i \cdot t$

Quadratfunktion $z^2 = t^2 - b^2 + 2 \cdot b \cdot t \cdot i$ $\text{real}(z^2) = t^2 - b^2$ $\text{imag}(z^2) = 2 \cdot b \cdot t$
 $zz^2 = a^2 - t^2 + 2 \cdot a \cdot t \cdot i$ $\text{real}(zz^2) = a^2 - t^2$ $\text{imag}(zz^2) = 2 \cdot a \cdot t$

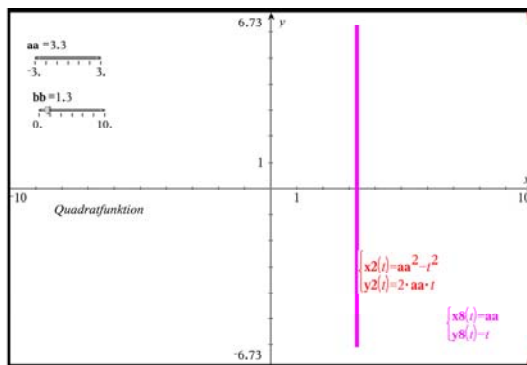
Wurzelfunktion Bild der waagerechten und der senkrechten Geraden
 $wz := \sqrt{z} = \frac{\sqrt{2 \cdot (t^2 + b^2 + t)}}{2} + \frac{\text{sign}(b) \cdot \sqrt{2 \cdot (t^2 + b^2 - t)}}{2} \cdot i$
 $wzz := \sqrt{zz} = \frac{\sqrt{2 \cdot (t^2 + a^2 + a)}}{2} + \frac{\sqrt{2 \cdot (t^2 + a^2 - a)}}{2} \cdot \text{sign}(t) \cdot i$

Hierfür auf der nächsten Seite besserer Vorschlag:

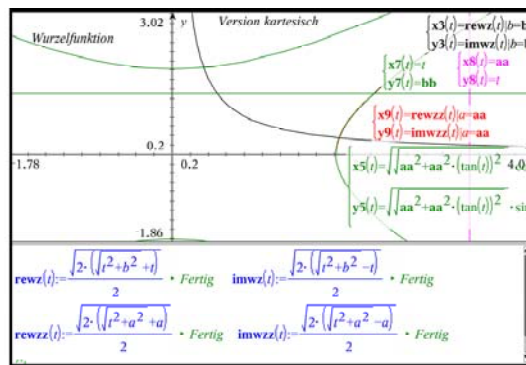
1.1



1.2



1.3



1.4

Senkrechte Gerade in Polardarstellung, Polardarstellung der Wurzelfkt.
 $x = b \cdot \cos(t)$ $y = b \cdot \sin(t)$ mit $t = \text{phi}$ = Polarwinkel als Parameter

$zzp := a + i \cdot a \cdot \tan(t) = a + a \cdot \tan(t) \cdot i$ $\text{rzz}(t) := |zzp| \cdot \text{Fertig}$ $\text{rzz}(t) = \frac{a}{|\cos(t)|}$

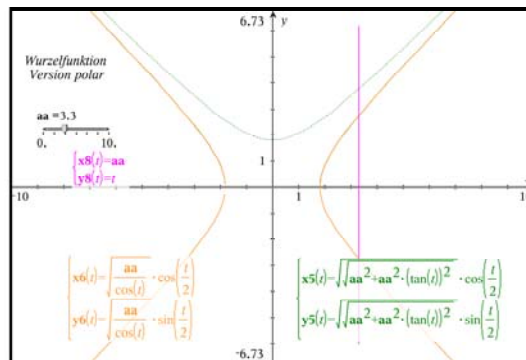
$wzpp := \sqrt{\text{rzz}(t)} \cdot \left(\cos\left(\frac{t}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{t}{2}\right) \right)$ $wzpp = e^{\frac{i \cdot t}{2}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{|\cos(t)|}}$

$\text{re}(t) := \sqrt{\text{rzz}(t)} \cdot \cos\left(\frac{t}{2}\right)$ Fertig $\text{im}(t) := \sqrt{\text{rzz}(t)} \cdot \sin\left(\frac{t}{2}\right)$ Fertig

$\text{re}(t) = \cos\left(\frac{t}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{|\cos(t)|}}$ $\text{im}(t)$ (Achtung sqrt(a) auf Zähler)

Man rechne selbst nach, dass $1 + \tan(t)^2 = \frac{1}{\cos(t)^2}$ ist. Das spielt auch bei der Ableitung von tan eine Rolle. Im nachfolgenden Bild hat die grüne Fkt. eine zu große Lösungsmenge. Die gelbe ist die hier berechnete Funktion.

1.5



1.6

e- und In-Funktion

Komplexe Funktionen Haftendorn Mai 2013

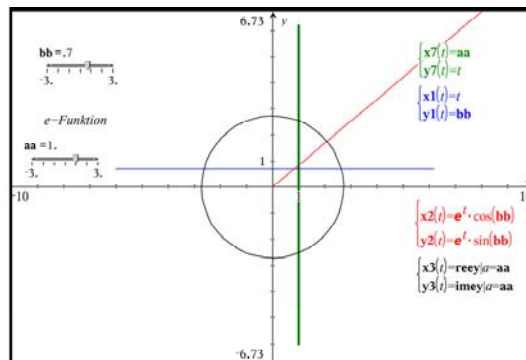
Waagerechte Geraden, Höhenlagea $z := t + i \cdot b$
 Senkrechte Geraden an der Stelle b $zz := a + i \cdot t$

e-Funktion $e^z = e^t \cdot e^{i \cdot b} = e^t \cdot (\cos(b) + i \cdot \sin(b))$ $\text{real}(e^z) = e^t \cdot \cos(b)$ $\text{imag}(e^z) = e^t \cdot \sin(b)$
 $e^{yz} = e^{a \cdot t} \cdot e^{i \cdot t} \cdot e^{a \cdot b} = e^{a \cdot t} \cdot (\cos(t) + i \cdot \sin(t)) \cdot e^{a \cdot b}$ $\text{re}(yz) = \text{real}(e^{yz}) = e^{a \cdot t} \cdot \cos(t) \cdot e^{a \cdot b}$ $\text{im}(yz) = \text{imag}(e^{yz}) = e^{a \cdot t} \cdot \sin(t) \cdot e^{a \cdot b}$

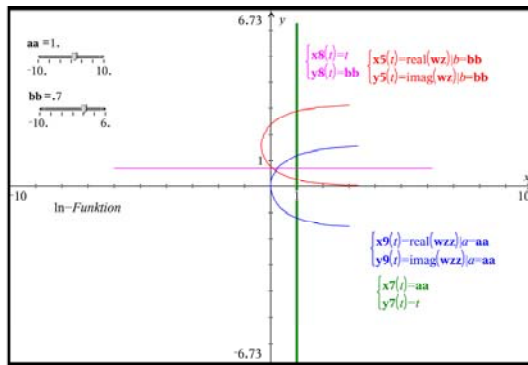
In-Funktion Bild der waagerechten und der senkrechten Geraden
 $wz := \ln(z) = \frac{\ln(t^2 + b^2)}{2} + \frac{\text{sign}(b) \cdot \pi - \tan^{-1}\left(\frac{t}{b}\right)}{2} \cdot i$
 $wzz := \ln(zz) = \frac{\ln(t^2 + a^2)}{2} + \frac{\pi \cdot \text{sign}(t) - \tan^{-1}\left(\frac{t}{a}\right)}{2} \cdot i$

Hierfür auf der nächsten Seite besserer Vorschlag:

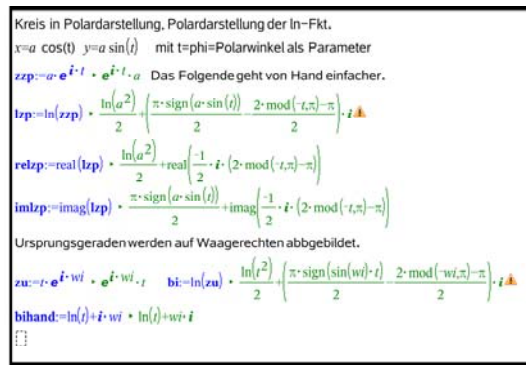
2.1



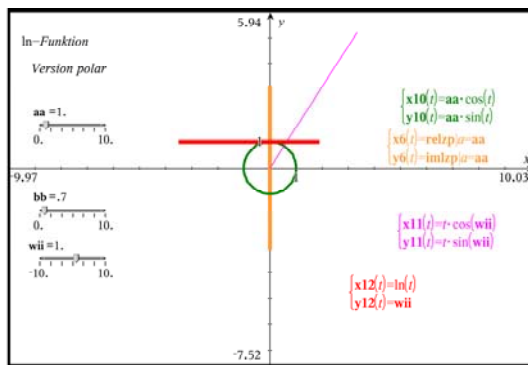
2.2



2.3



2.4



2.5