Quadrat- und Wurzelfunktion

Komplexe Funktionen Haftendorn Mai 2013

Waagerechte Geraden, Höhenlage a $z:=t+i\cdot b \quad \blacktriangleright \quad t+b\cdot i$

Senkrechte Geraden an der Stelle b $zz:=a+i\cdot t \quad \blacktriangleright \quad a+t\cdot i$

Quadratfunktion $z^2 \quad \blacktriangleright \quad t^2-b^2+2\cdot b\cdot t\cdot i \qquad \operatorname{real}(z^2) \quad \blacktriangleright \quad t^2-b^2 \qquad \operatorname{imag}(z^2) \quad \blacktriangleright \quad 2\cdot b\cdot t$

$zz^2 \quad \blacktriangleright \quad a^2-t^2+2\cdot a\cdot t\cdot i \qquad \operatorname{real}(zz^2) \quad \blacktriangleright \quad a^2-t^2 \qquad \operatorname{imag}(zz^2) \quad \blacktriangleright \quad 2\cdot a\cdot t$

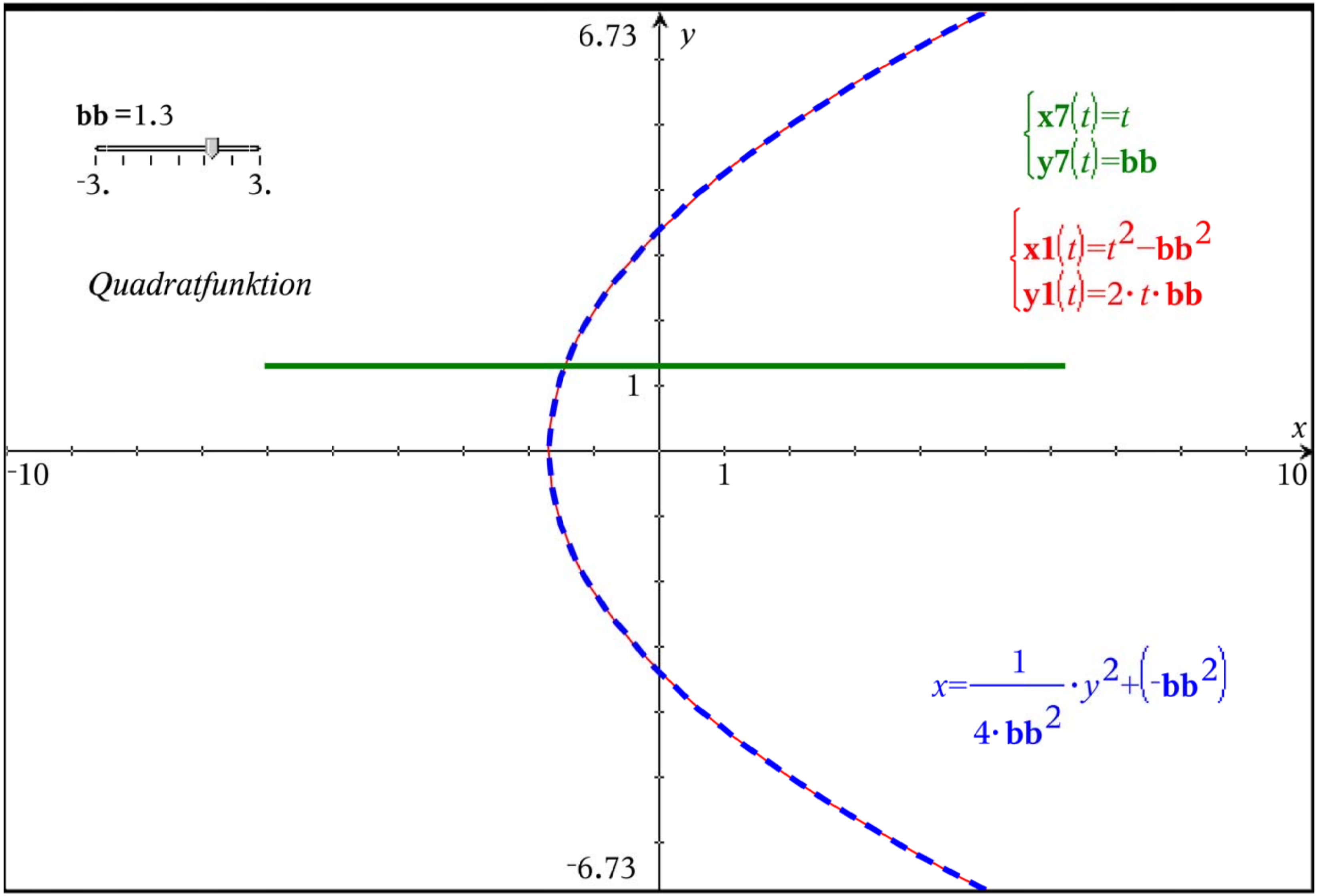
Wurzelfunktion Bild der waagerechten und der senkrechten Geraden

$$wz:=\sqrt{z} \quad \blacktriangleright \quad \frac{\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{t^2+b^2}+t\right)}}{2}+\frac{\operatorname{sign}(b)\cdot\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{t^2+b^2}-t\right)}}{2}\cdot i$$

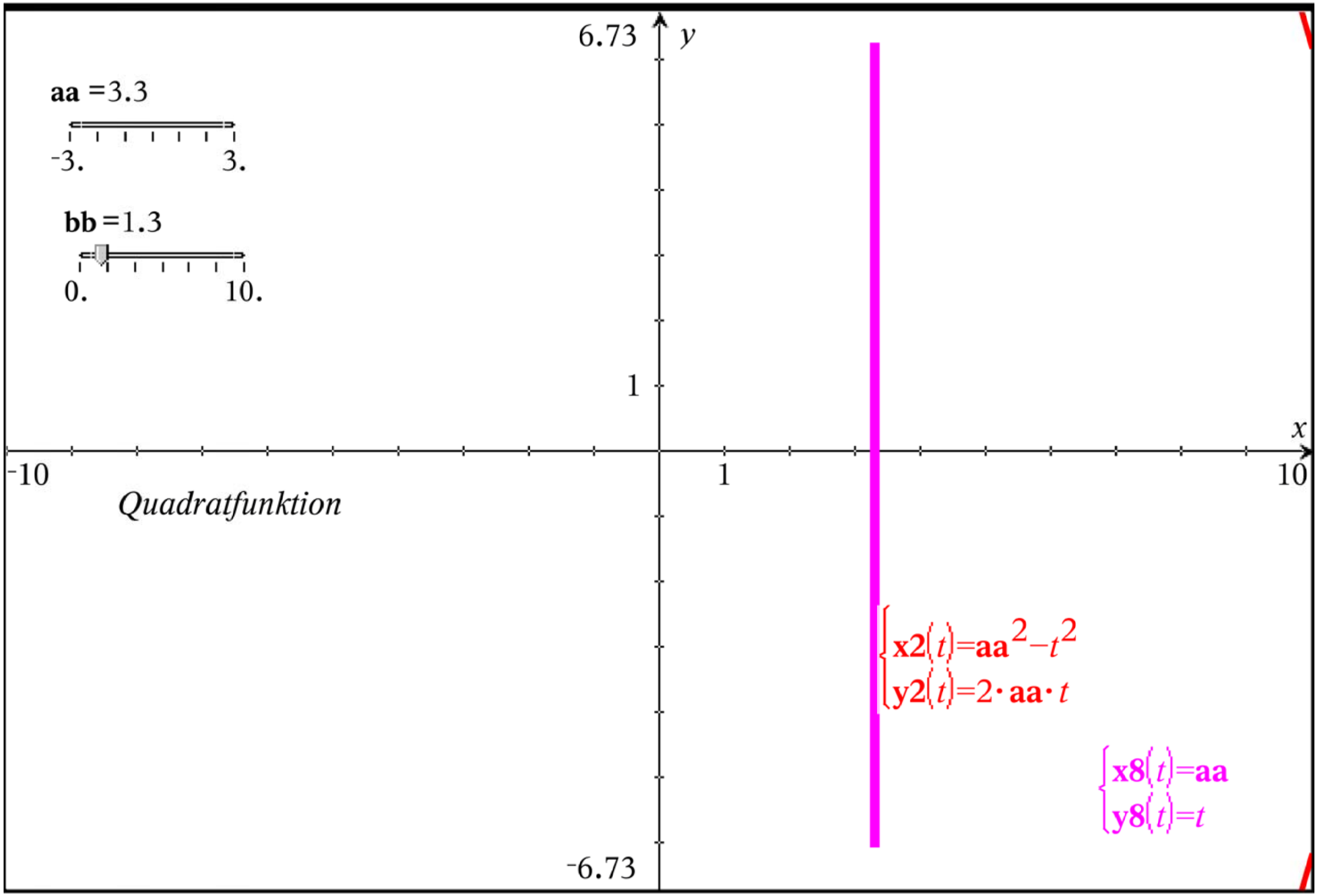
$$wzz:=\sqrt{zz} \quad \blacktriangleright \quad \frac{\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{t^2+a^2}+a\right)}}{2}+\frac{\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{t^2+a^2}-a\right)}\cdot\operatorname{sign}(t)}{2}\cdot i$$

Hierfür auf der nächsten Seite besserer Vorschlag:

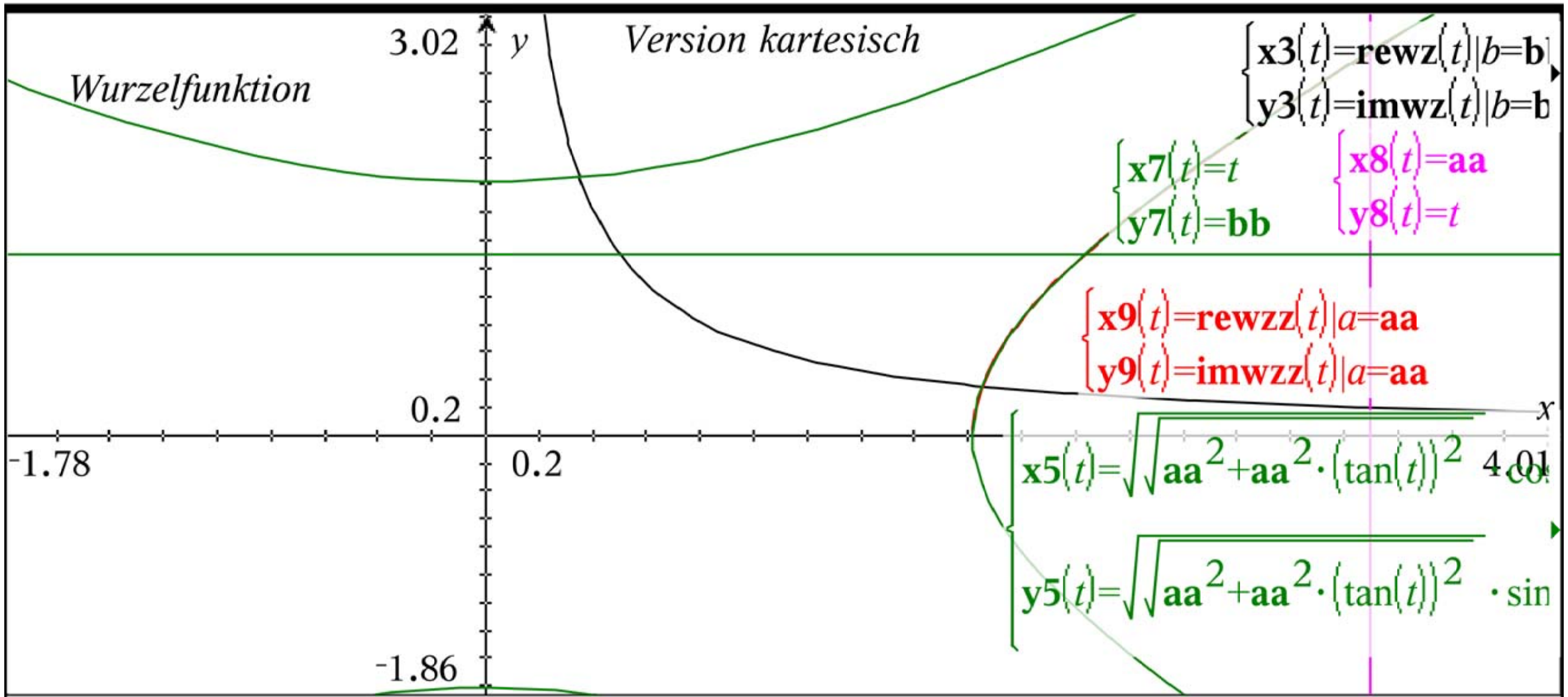
1.1


6.73
y
bb =1.3
-3.
3.
$\begin{cases} \mathbf{x7}(t)=t \\ \mathbf{y7}(t)=\mathbf{bb} \end{cases}$
$\begin{cases} \mathbf{x1}(t)=t^2-\mathbf{bb}^2 \\ \mathbf{y1}(t)=2\cdot t\cdot \mathbf{bb} \end{cases}$
Quadratfunktion
1
x
-10
1
10
$x=\frac{1}{4\cdot \mathbf{bb}^2}\cdot y^2+(-\mathbf{bb}^2)$
-6.73

1.2


aa =3.3
-3.
3.
bb =1.3
0.
10.
6.73
y
1
x
-10
1
10
Quadratfunktion
x2(t)=aa^2−t^2
y2(t)=2·aa·t
x8(t)=aa
y8(t)=t
-6.73

1.3



$$\mathbf{rewz}(t):=\frac{\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{t^2+b^2}+t\right)}}{2} \quad \text{▸ } \textit{Fertig} \qquad \mathbf{imwz}(t):=\frac{\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{t^2+b^2}-t\right)}}{2} \quad \text{▸ } \textit{Fertig}$$

$$\mathbf{rewzz}(t):=\frac{\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{t^2+a^2}+a\right)}}{2} \quad \text{▸ } \textit{Fertig} \qquad \mathbf{imwzz}(t):=\frac{\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{t^2+a^2}-a\right)}}{2} \quad \text{▸ } \textit{Fertig}$$

1.4

Senkrechte Gerade in Polardarstellung, Polardarstellung der Wurzelfkt.

$x=b \quad y=b\tan(t)$ mit t=phi=Polarwinkel als Parameter

$\mathbf{zzp}:=a+\boldsymbol{i}\cdot a\cdot\tan(t)$ ▸ $a+a\cdot\tan(t)\cdot\boldsymbol{i}$ ⚠ $\mathbf{rzz}(t):=|\mathbf{zzp}|$ ▸ *Fertig* $\mathbf{rzz}(t)$ ▸ $\left|\frac{a}{\cos(t)}\right|$ ⚠

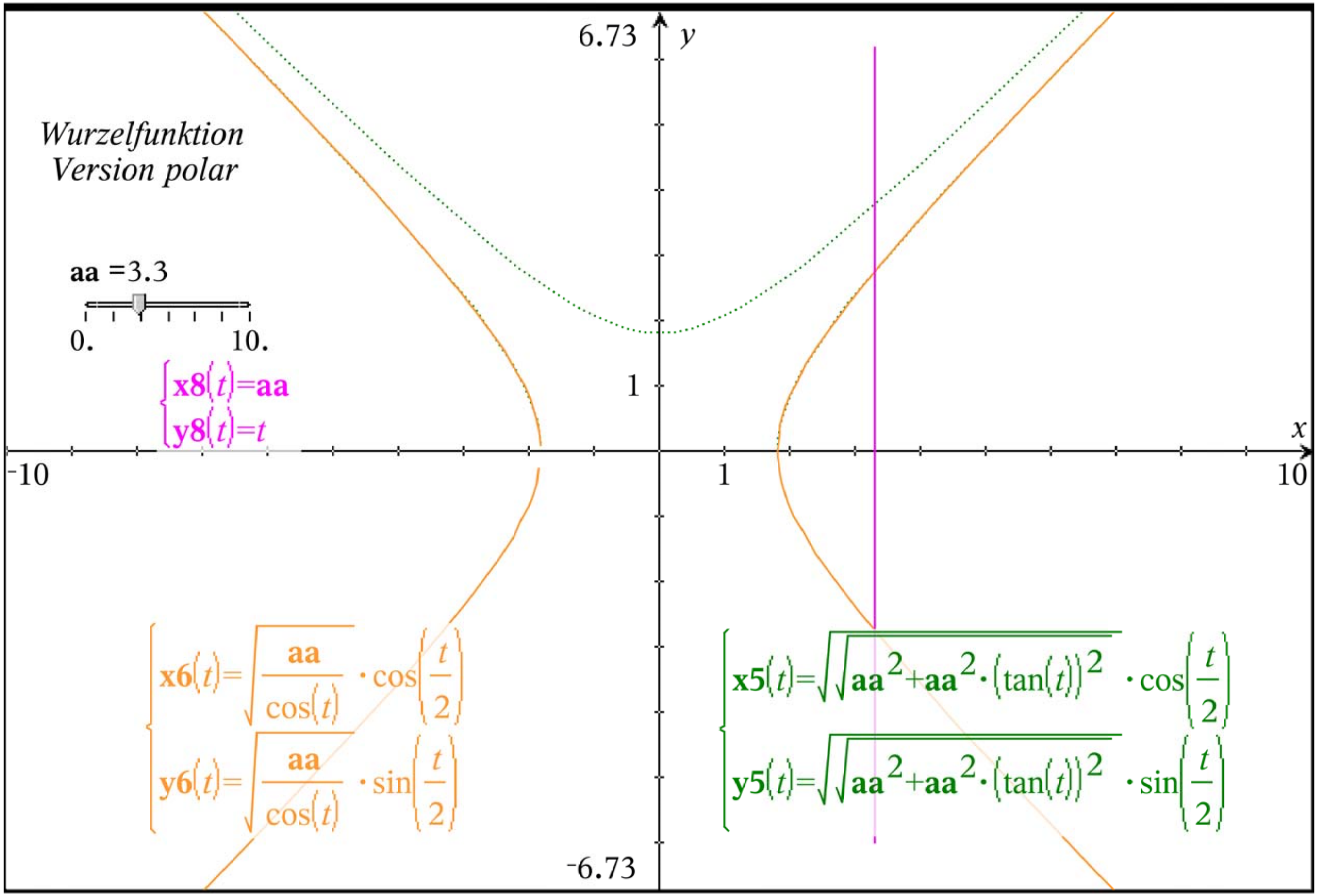
$wzzp=\sqrt{\mathbf{rzz}(t)}\cdot\left(\cos\left(\frac{t}{2}\right)+\boldsymbol{i}\cdot\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)$ ▸ $wzzp=\boldsymbol{e}^{\frac{\boldsymbol{i}\cdot t}{2}}\cdot\left|\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\cos(t)}}\right|$ ⚠

$\mathbf{re}(t):=\sqrt{\mathbf{rzz}(t)}\cdot\cos\left(\frac{t}{2}\right)$ ▸ *Fertig* $\mathbf{im}(t):=\sqrt{\mathbf{rzz}(t)}\cdot\sin\left(\frac{t}{2}\right)$ ▸ *Fertig*

$\mathbf{re}(t)$ ▸ $\cos\left(\frac{t}{2}\right)\cdot\left|\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\cos(t)}}\right|$ ⚠ $\mathbf{im}(t)$ (Achtung sqrt(a) auf Zähler)

Man rechne selbst nach, dass $1+\tan(t)^2=\frac{1}{\cos(t)^2}$ ist. Das spielt auch bei der Ableitung von tan eine Rolle. Im nachfolgenden Bild hat die grüne Fkt. eine zu große Lösungsmenge. Die gelbe ist die hier berechnete Funktion.

1.5


6.73
y
Wurzelfunktion
Version polar
aa =3.3
0.
10.
$\begin{cases} x8(t)=aa \\ y8(t)=t \end{cases}$
1
x
-10
1
10
$\begin{cases} x6(t)=\sqrt{\frac{aa}{\cos(t)}}\cdot\cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ y6(t)=\sqrt{\frac{aa}{\cos(t)}}\cdot\sin\left(\frac{t}{2}\right) \end{cases}$
$\begin{cases} x5(t)=\sqrt{\sqrt{aa^2+aa^2\cdot(\tan(t))^2}}\cdot\cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ y5(t)=\sqrt{\sqrt{aa^2+aa^2\cdot(\tan(t))^2}}\cdot\sin\left(\frac{t}{2}\right) \end{cases}$
-6.73

1.6

Komplexe Funktionen Haftendorn Mai 2013

Waagerechte Geraden, Höhenlage a $z:=t+i\cdot b$

Senkrechte Geraden an der Stelle b $zz:=a+i\cdot t$

----

e−Funktion $e^{z} ▸ e^{i\cdot b}\cdot e^{t}$ $\mathrm{real}(e^{z}) ▸ \cos(b)\cdot e^{t}$ $\mathrm{imag}(e^{z}) ▸ \sin(b)\cdot e^{t}$

$ey:=e^{zz} ▸ e^{i\cdot t}\cdot e^{a}$ $reey:=\mathrm{real}(e^{zz}) ▸ e^{a}\cdot\cos(t)$ $imey:=\mathrm{imag}(e^{zz}) ▸ e^{a}\cdot\sin(t)$

----

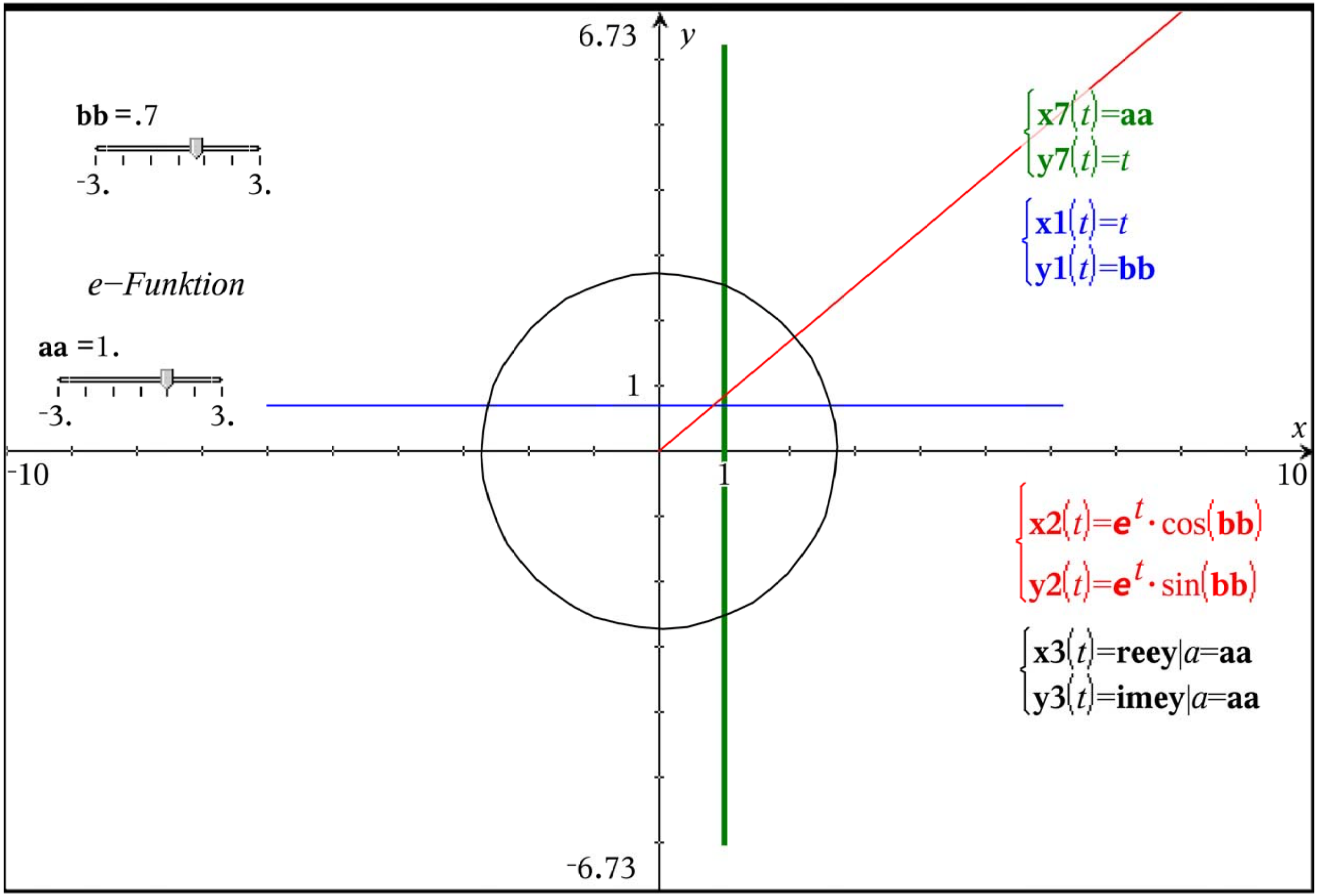
ln−Funktion Bild der waagerechten und der senkrechten Geraden

$$wz:=\ln(z) ▸ \frac{\ln(t^{2}+b^{2})}{2}+\left(\frac{\mathrm{sign}(b)\cdot\pi}{2}-\tan^{-1}\left(\frac{t}{b}\right)\right)\cdot i$$

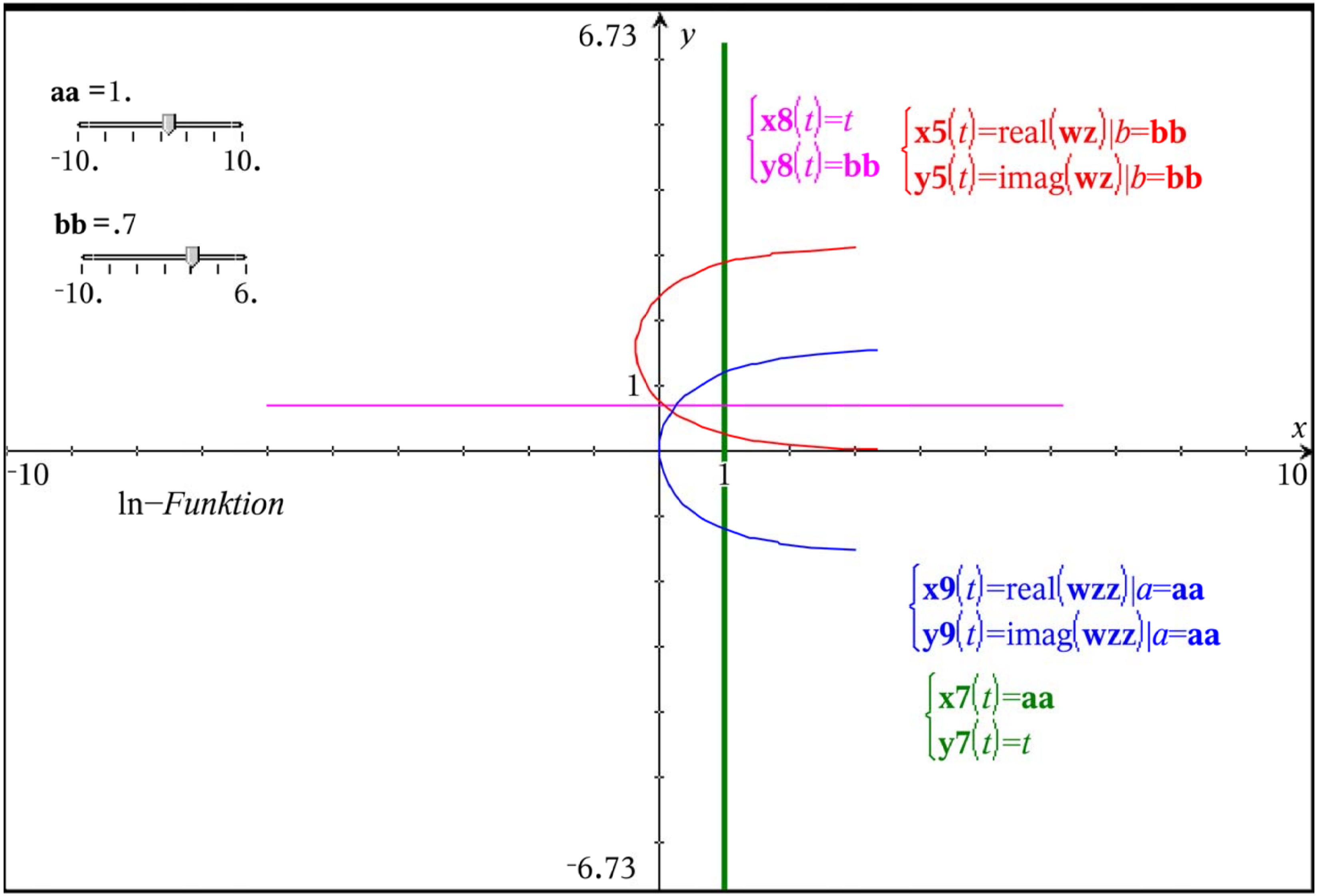
$$wzz:=\ln(zz) ▸ \frac{\ln(t^{2}+a^{2})}{2}+\left(\frac{\pi\cdot\mathrm{sign}(t)}{2}-\tan^{-1}\left(\frac{a}{t}\right)\right)\cdot i$$

Hierfür auf der nächsten Seite besserer Vorschlag:

2.1


6.73
y
bb =.7
-3.
3.
e−Funktion
aa =1.
-3.
3.
1
x
-10
1
10
-6.73
x7(t)=aa
y7(t)=t
x1(t)=t
y1(t)=bb
x2(t)=e^t · cos(bb)
y2(t)=e^t · sin(bb)
x3(t)=reey|a=aa
y3(t)=imey|a=aa

2.2


aa =1.
-10. 10.
bb =.7
-10. 6.
6.73
y
x8(t)=t
y8(t)=bb
x5(t)=real(wz)|b=bb
y5(t)=imag(wz)|b=bb
1
x
-10
1
10
ln−Funktion
x9(t)=real(wzz)|a=aa
y9(t)=imag(wzz)|a=aa
x7(t)=aa
y7(t)=t
-6.73

2.3

Kreis in Polardarstellung, Polardarstellung der ln−Fkt.

$x=a$ cos(t) $y=a\sin(t)$ mit t=phi=Polarwinkel als Parameter

$\mathbf{zzp}:=a\cdot \mathbf{e}^{\boldsymbol{i}\cdot t} \blacktriangleright \mathbf{e}^{\boldsymbol{i}\cdot t}\cdot a$ Das Folgende geht von Hand einfacher.

$\mathbf{lzp}:=\ln(\mathbf{zzp}) \blacktriangleright \frac{\ln(a^2)}{2}+\left(\frac{\pi\cdot \text{sign}(a\cdot \sin(t))}{2}-\frac{2\cdot \text{mod}(^-t,\pi)-\pi}{2}\right)\cdot \boldsymbol{i}$ ⚠

$\mathbf{relzp}:=\text{real}(\mathbf{lzp}) \blacktriangleright \frac{\ln(a^2)}{2}+\text{real}\left(\frac{^-1}{2}\cdot \boldsymbol{i}\cdot (2\cdot \text{mod}(^-t,\pi)-\pi)\right)$

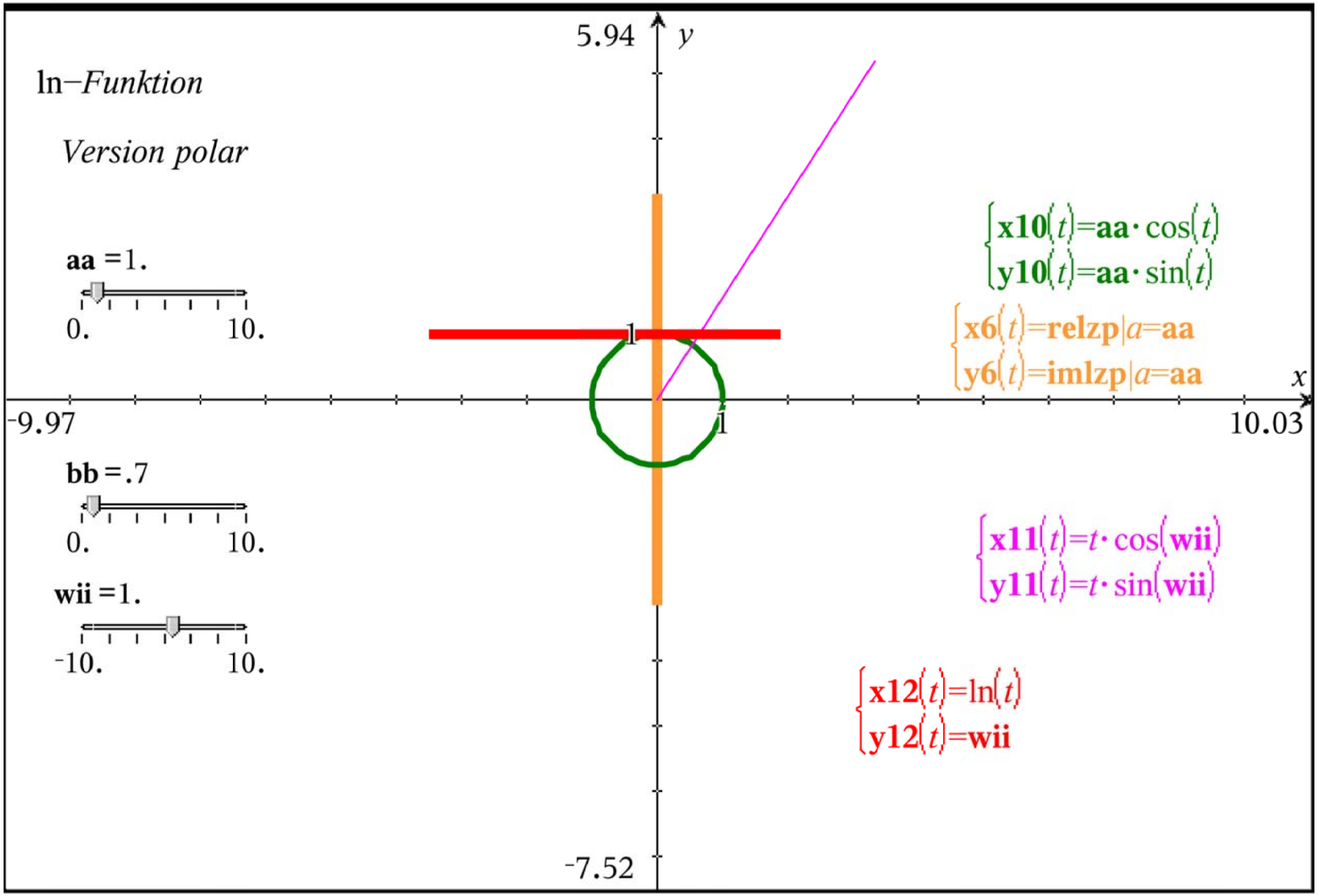
$\mathbf{imlzp}:=\text{imag}(\mathbf{lzp}) \blacktriangleright \frac{\pi\cdot \text{sign}(a\cdot \sin(t))}{2}+\text{imag}\left(\frac{^-1}{2}\cdot \boldsymbol{i}\cdot (2\cdot \text{mod}(^-t,\pi)-\pi)\right)$

Ursprungsgeraden werden auf Waagerechten abbgebildet.

$\mathbf{zu}:=t\cdot \mathbf{e}^{\boldsymbol{i}\cdot wi} \blacktriangleright \mathbf{e}^{\boldsymbol{i}\cdot wi}\cdot t$ $\mathbf{bi}:=\ln(\mathbf{zu}) \blacktriangleright \frac{\ln(t^2)}{2}+\left(\frac{\pi\cdot \text{sign}(\sin(wi)\cdot t)}{2}-\frac{2\cdot \text{mod}(^-wi,\pi)-\pi}{2}\right)\cdot \boldsymbol{i}$ ⚠

$\mathbf{bihand}:=\ln(t)+\boldsymbol{i}\cdot wi \blacktriangleright \ln(t)+wi\cdot \boldsymbol{i}$

2.4


ln−Funktion
Version polar
aa =1.
0. 10.
bb =.7
0. 10.
wii =1.
-10. 10.
5.94
y
x
-9.97
10.03
-7.52
1
1
x10(t)=aa·cos(t)
y10(t)=aa·sin(t)
x6(t)=relzp|a=aa
y6(t)=imlzp|a=aa
x11(t)=t·cos(wii)
y11(t)=t·sin(wii)
x12(t)=ln(t)
y12(t)=wii

2.5