e-Funktion und ln-Funktion in der komplexen Ebene

Hier sind vor allem die Rechnungen dargestellt, Bilder sind im Internet reichhaltiger.

Exponentialfunktion

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x\, e^{i\,y} = e^x \cos(y) + i\, e^x \sin(y)$$

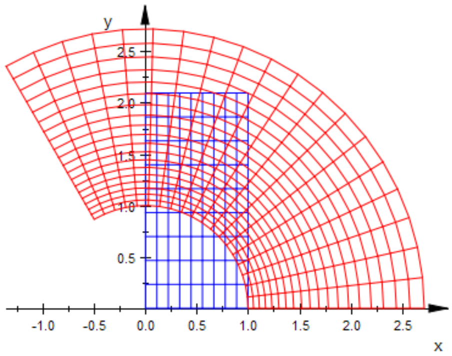
Beschreibung: Der Imaginärteil wird als Winkel aufgefasst, der Realteil wird als Exponent von *e* für den Radius genommen.

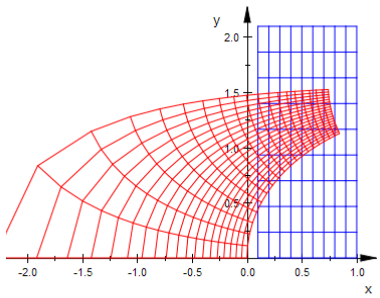
Rechteckgitter, **waagerechte Gerade** $x = t,\ y = c$ parametrisiert.

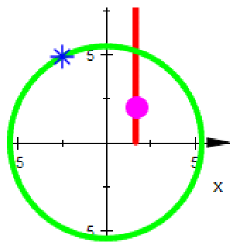
Bild der Geraden $z = e^t e^{ic}$ Ursprungsstrahl mit Winkel c, ohne den Ursprung selbst.

Rechteckgitter, **senkrechte Gerade** $x = c,\ y = t$ parametrisiert.

Bild der Geraden sind $z = e^c e^{it}$ Ursprungs-Kreise, dabei erzeugt ein Abschnitt $0 \le t < 2\pi$ auf der senkrechten Geraden schon einen ganzen Kreis. Durchläuft t die gesamte Gerade, wird der Kreis unendlich oft durchlaufen.







Logarithmusfunktion

$$f(z) = \ln(z) = \ln\left(r\, e^{i\,\varphi}\right) = \ln(r) + i\,\varphi$$

Beschreibung: Der Winkel wird zum Imaginärteil, der Realteil ist der Logarithmus des Betrages.

Nimmt man nur Winkel bis $0 \le \varphi < 2\pi$, so liegen die Logarithmen der gesamten Gaußschen Zahlenebene in einem waagerechten Streifen der Breite 2 Pi. Erlaubt man auch $2\pi \le \varphi < 4\pi$ so erhält man (eindeutig) weitere Logarithmen, nämlich die mit um 2Pi größeren Imaginärteil. Erst, wenn man als Urbildmenge eine "unendlich-blättrige Riemannschen Fläche der Logarithmusfunktion", nach Bernhard Riemann (Abitur 1846 Johanneum Lüneburg), zulässt, erhält man alle Punkte der komplexen Ebene als Logarithmen.

Die e-Funktion bildet ein Rechteckgitter auf ein Polargitter ab. Darum ist nun ein **Polargitter** für die Logarithmusfunktion besonders geeignet.

Ursprungskreise $r = const.$ $\varphi = t$ parametrisiert. Man sieht oben schon, dass das Bild eine senkrechte Gerade mit Realteil ln(r) ist. Für $0 \le \varphi < 2\pi$ kommt eigentlich nur eine Strecke der Länge 2Pi heraus. Die ganze Gerade erhält man ja nur aus der unendlich-blättrigen Riemannschen Fläche.

Ursprungsstrahlen mit Winkel φ werden zu waagerechten Geraden mit Imaginärteil φ .

Will man Eindeutigekeit erzwingen, nimmt man den "Hauptwert" , also φ modulo 2 Pi.