Quadrieren und Wurzelziehen in der komplexen Ebene

Hier sind vor allem die Rechnungen dargestellt, Bilder sind im Internet reichhaltiger.

Quadratfunktion

$$f(z)=z^2=\left(r\,e^{i\,\varphi}\right)^2=r^2\,e^{i\,2\varphi}=(x+iy)^2=x^2-y^2+i\,2x\,y$$

Beschreibung: Der Winkel wird verdoppelt, der Radius quadriert.
Rechteckgitter, **waagerechte Gerade** $x=t,\ y=c$ parametrisiert.

Bild der Geraden $x=x(t)=t^2-c^2\ \wedge\ y=y(t)=2t\,c$ in Parameterdarstellung

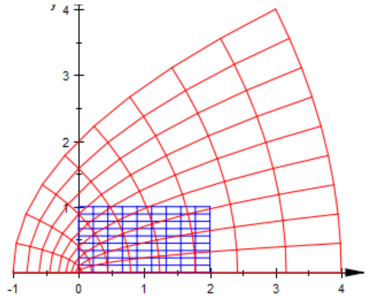
c elimieren: $y^2=4c^2(x+c^2)$ nach rechts geöffnete Parabeln, Scheitel bei $xs=-c^2$

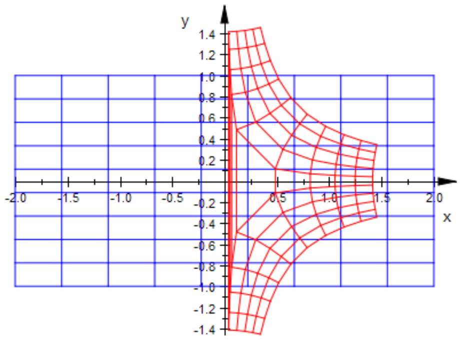
Ordinate für $x=0$ ist $y=\pm\,2\,c^2$, daran sieht man, dass der Ursprung Brennpunkt ist.
Rechteckgitter, **senkrechte Gerade** $x=c,\ y=t$ parametrisiert.

Bild der Geraden $x=x(t)=c^2-t^2\ \wedge\ y=y(t)=2t\,c$ in Parameterdarstellung

c elimieren: $y^2=-4c^2(x-c^2)$ nach links geöffnete Parabeln, Scheitel bei $xs=+c^2$

Ordinate für $x=0$ ist $y=\pm\,2\,c^2$, daran sieht man, dass der Ursprung Brennpunkt ist.





Wurzelfunktion

$$f(z)=\sqrt{z}=\left(r\,e^{i\,\varphi}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{r}\,e^{i\,\frac{\varphi}{2}}=\sqrt{x+iy}\underset{CAS}{=}\sqrt{\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}}+i\cdot\sqrt{-\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}}$$

Beschreibung: Der Winkel wird halbiert, aus dem Radius wird die Wurzel gezogen.
Nimmt man nur Winkel bis $0\le\varphi<2\pi$ so erhält man nur die Wurzeln mit positivem Imaginärteil. Erlaubt man auch $2\pi\le\varphi<4\pi$ so erhält man (eindeutig) weiter Wurzeln, nämlich die mit negativem Imaginärteil. Man kann also eine "Doppelschicht" der Gaußschen Zahlenebene mit der Wurzelfunktion eindeutig abbilden. Diese Urbildmenge heißt "Riemannsche Fläche der Wurzelfunktion", nach Bernhard Riemann (Abitur 1846 Johanneum Lüneburg)

Will die Verbiegung des Rechtecksgitters ansehen, nimmt man den fertigen Befehl des CAS dazu. Wenn man es selbst machen will, fasst man Real-und Imaginärteil als Parameterdarstellung einer Kurve auf. Dabei ist einmal bei konstantem y das x der Parameter, das andere mal ist bei konstamtem x das y der Parameter.

Wenn man $f(z)=\sqrt{z}=\sqrt{r}\,e^{i\,\frac{\varphi}{2}}=\sqrt{r}\,\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)+i\,\sqrt{r}\,\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ nimmt, bildet man besser kein Rechteckgitter ab, sondern ein "Polargitter": Ursprungsstrahlen werden auf solche mit halbem Winkel abgebildet und Kreise um den Ursprung auf solche mit Wurzelradius.
Die obere Schicht der Riemannschen Fläche geht dann auf die obere komplexe Halbebene, die untere Schicht auf die untere komlexe Halbebene.