Hoffendorn
April 2013

1

Einf. reeller Zahlen als Cauchy-Folgen

Ausgedachte Zahl

$r = 0{,}1010010001000010000010 0\ldots$

1 3 6 10 15 immer eine Null mehr

die Einsen stehen an den "Dreieckszahl"-Stellen

$d_i = \frac{i(i+1)}{2} \quad i \in \{1, 2, \ldots\}$

$r = \sum_{i=1}^{\infty} 10^{-\frac{i(i+2)}{2}}$

Teilsummen $r_k = \sum_{i=1}^{k} 10^{-\frac{i(i+2)}{2}}$

Da sicher gilt $r \notin \mathbb{Q}$, denn ersichtlich ist die Dezimalbruchdarstellung nicht periodisch.

Man hat so im "Gefühl", dass die Zahl r wirklich eine Zahl ist, aber im bisherigen Aufbau des Zahlsystems kommt sie nicht vor.

Die Teilsummenfolge scheint gegen diese Zahl, die wir ja eigentlich noch nicht haben, zu konvergieren, weil im Konvergenzbegriff der Grenzwert so vorkommt, dass man ihn kennen muss

$r_k \xrightarrow[k \to \infty]{\text{konvergiert}} r \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists K : \forall k > K : |r_k - r| < \varepsilon$

"Konvergent i.a.S" im alten Sinn

Augustin Louis Cauchy 1789-1857 hatte die Idee den Konvergenzbegriff ohne Verwendung des Grenzwerts zu formulieren.

Ein Folge $\langle a_k \rangle$ mit $a_k \in \mathbb{Q}$, $k \in \mathbb{N}$ ist Cauchy-konvergent wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ ein N gibt, so dass für alle $m, n \geq N$ gilt $|a_n - a_m| < \varepsilon$

Ausblick

Die "Grenzwerte" Cauchy-konvergenter Folgen heißen reelle Zahlen

2

Folge der Teilsummen von $r = 0{,}101001\,0001\,00001\ldots$

$\langle r_k \rangle$ $\qquad r_k = 0{,}101001\ldots\ 0001$

$$r_k = \sum_{i=1}^{k} 10^{-i(i+1)\cdot\frac{1}{2}}$$

Stelle d_k

r_k monoton wachsend

Betrachte $n > m$: $r_n - r_m = \sum_{i=1}^{n} 10^{-d_i} - \sum_{i=1}^{m} 10^{-d_i}$

$$= \sum_{i=m+1}^{n} 10^{-d_i} < \sum_{i=m+1}^{\infty} 10^{-d_i}$$

$$= 10^{-(m+1)} \sum_{j=0}^{\infty} 10^{-d_j} < 10^{-(m+1)} \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} 10^{-j}}_{\text{Geom. Reihe}} < 10^{-(m+1)} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}}$$

$$= 10^{-(m+1)} \cdot \frac{10}{9} = \frac{1}{9} \cdot 10^{-m} \quad \text{Nullfolge}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig klein

Wähle m_0 so, dass $\frac{1}{9} 10^{-m} < \varepsilon \iff 10^{-m} < 9\varepsilon$

$-m < \lg(9\varepsilon)$

$m > -\lg(9\varepsilon)$

Das geht immer

z.B. $\varepsilon = 10^{-30} \Rightarrow \frac{1}{9} 10^{-m} < 10^{-30}$

$10^{-m} < 9 \cdot 10^{-30}$

Dreieckzahlen

1 3 6 10 15 21 28 36

d_7

$-m < \lg 9 + (-30)$

$m > 30 - \underbrace{\lg 9}_{<1}$

$m \geq 30$

Also für $m \geq 30$, also $d_7 = 36$ ab $k_0 = 7$

ist gesichert, dass für alle $n, m > 7$ $\quad r_n - r_m < \varepsilon = 10^{-30}$

Also ist $\langle r_k \rangle$ ein Cauchy-konvergente Folge.

$r_n = 0{,}1010010001\ \ldots 0000001\ 000\ldots 0001\,001\ldots$

$-\ r_m = 0{,}1010010001\ \ldots 0 \ldots 1$

$r_n - r_m = 0{,}0 \ldots\ldots\ldots 0\,000\ldots 0001\,00\ldots 001\ldots 1$

$< \ldots 0 \qquad 10^{-30} 0{,}\overline{1} = 10^{-30} \cdot \frac{1}{9} < 10^{-30} = \varepsilon$

allgemein $\qquad 0{,}\overline{9} = 10^{-30} \cdot 1 \ \ldots\ ^{-30} = \varepsilon$

Ebenso mit jedem Dezimalbruch $a, a_1 a_2 a_3 \ldots$

Schulische Formulierung:

Jede denkbare Kommazahl ist eine reelle Zahl

Also ist demnach die oben definierte Zahl r eine reelle Zahl, denn wir haben sie ja ausgedacht. "Denkbar" ist aber auch, dass die Ziffern nach dem Komma zufällig gewählt werden, es entsteht auch eine reelle Zahl.

Mathematische Konstruktion der reellen Zahlen.

Schritt 1 Jeder Dezimalbruch $d = a, d_1 d_2 d_3 \ldots$ mit Ziffern d_i definiert die Folge seiner Teilsummen und diese Folge ist Cauchy-Folge, d.h. sie ist cauchy-konvergent,

Schritt 2 In der Menge der Cauchyfolgen (über $\mathbb{Q}$) wird eine Äquivalenzrelation definiert:

$\langle a_n \rangle \sim \langle b_n \rangle \Leftrightarrow \langle a_n - b_n \rangle$ ist Nullfolge

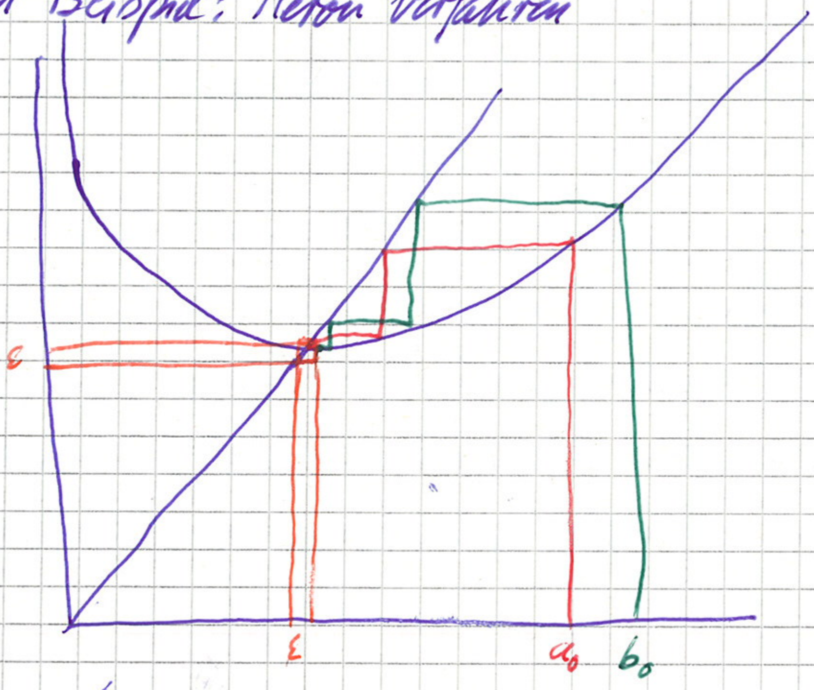
Schritt 3 $\mathbb{R}$ = Menge der Äquivalenzklassen

Zum Beispiel sind alle gegen $\sqrt{2}$ Cauchy-konvergierende Folgen äquivalent, egal ob sie z.B. aus dem Heronverfahren mit verschiedenen Startwerten oder aus einer Intervallschachtelung stammen.

In $\mathbb{R}$ ist nun eine Summe zu definieren, die von den gewählten Repräsentanten unabhängig ist (d.h. die "wohldefiniert" ist). Ebenso braucht man ein Produkt, zu jeder Folge, die nicht Nullfolge ist, ein Inverses, eine Ordnung usw.

Damit wird $\boxed{\mathbb{R} \text{ zum Körper der reellen Zahlen}}$

Zum Beispiel: Heronverfahren



$$x_{n+1} = \left(x_n + \frac{r}{x_n}\right)\cdot\frac{1}{2}$$

$\left\{\begin{array}{l}\text{Die Folge } \langle a_n \rangle \text{ mit } a_0 \text{ als Start ist Cauchyfolge} \\ \text{" " } \langle b_n \rangle \text{ " } b_0 \text{ " " " "}\end{array}\right\}$,

denn bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$
gibt es einen Index N von dem
an (d.h. für $n, m > N$) gilt:

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \qquad |b_n - b_m| < \varepsilon$$

weil die Folge in den ε-$\square$ ε-Kasten hinein
läuft und dort bleibt.

Die Folgen $\langle a_n \rangle$ und $\langle b_n \rangle$
sind äquivalent (im Sinne von Schritt 2),
denn auch $|b_n - a_m| < \varepsilon$
Die Folgen $\langle a_n \rangle$ und $\langle b_n \rangle$ sind
außerdem äquivalent zu der
Teilsummenfolge des Dezimalbruches von
$\sqrt{r} = w_0, w_1 w_2 w_3 w_4 \dots \qquad \langle w_n \rangle \sim \langle a_n \rangle \sim \langle b_n \rangle$

Der Dezimalbruch ist der "Hauptrepräsentant" von $\sqrt{r}$