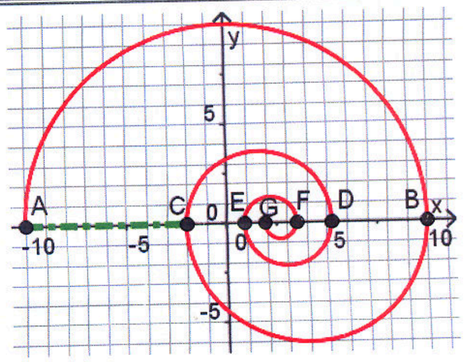
Analysis I

Prof. Dr. Dörte Haftendorn   Ti-Nspire o.ä. erlaubt.   Seite 1 / 2   10. Juli 2009



Aufgabe 1 Die platte Schnecke Mathina

Mathina ist eine platte zweidimensionale Schnecke, die in dem abgebildeten Haus wohnt. Es ist aus Halbkreisen gebaut. Der erste Durchmesser ist 20, alle folgenden sind 60% des vorigen Durchmessers.

a) Welche Länge hat ihr Haus mit den 6 Bögen?
b) Welche Länge hat ihr Haus mit unendlich vielen Bögen?
c) Die Strecke AC kann sie mit Schleim verschießen. Wie groß ist dann die Fläche ihres Hauses?
d) Bestimmen Sie die Koordinaten von C, D und E und beweisen Sie damit, dass ihr Haus (gemessen a der x-Achse) **nicht** mit einer geometrischen Folge enger wird.

geometrische Folge mit $q = 0{,}6$, $a_0 = 10$ Radius

Bögen   zusammen

$a_0 = 10$ $\pi a_0 = 10\pi$ b_1

a) $a_1 = q \cdot 10 = 6$ $\pi \cdot 6$ + $10\pi + 6\pi$

⋮

$a_5 = q^5 \cdot 10$ $\pi \cdot q^5 10$ $b_5 = 10\pi\,(1 + q + \dots q^5)$

$b_5 = 10\pi \cdot \left(\frac{1-q^{\dots}}{1-q}\right) = 10\pi\,\frac{1-q^6}{1-q}$

$b_5 = 10 \cdot \pi \cdot 2{,}38331 = 74{,}8755\dots$

b) $b_\infty = 10\pi\,\frac{1}{1-q} = \frac{10\pi}{0{,}4} = 78{,}5398\dots$

c) $F = 1.\,Hk + 2.\,Hk = \frac{1}{2}10^2\pi + \frac{1}{2}6^2\pi$
$= 50\pi + 18\pi = 68\pi = 213{,}628$

d) $A = (-10|0)$
$B = (10|0)$
$C = (-2|0)$ $10 - 12 = -2$
$D = (5{,}2|0)$ $-2 + 2 \cdot 0{,}6 \cdot 6 = -2 + 7{,}2 = 5{,}2$
$E = (0{,}88|0)$ $5{,}2 - 2 \cdot 0{,}6 \cdot 3{,}6 = 0{,}88$

$\overline{CE} = 2 + 0{,}88 = 2{,}88$ $\cdot q_2$ $q_1 = \frac{4{,}8}{8} = 0{,}6$

$\overline{DB} = 10 - 5{,}2 = 4{,}8$ $\cdot q_1$ $q_2 = \frac{2{,}88}{4{,}8} = 0{,}6$

$AC = 10 - 2 = 8$

ist doch eine Geometrische Folge.

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\frac{r}{x^{k-1}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}r(1-k)\,x^{1-k-1}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}r(1-k)\,x^{-k}$$

$$f'(r^{\frac{1}{k}}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}r(1-k)\left(r^{\frac{1}{k}}\right)^{-k}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1-k) \qquad = -1$$

$$= 1 - \frac{1}{2}k = -1$$

$$2 = \frac{1}{2}k$$

$$\underline{\underline{k = 4}}$$

Aufgabe 2 Handwerk *AnI 10.7.04*

a) $f(x) = x \cdot e^{-x}$. Bilden Sie vier Ableitungen, eine davon von Hand.

b) Beweisen Sie das auffällige Ergebnis mit vollständiger Induktion.

c) Integrieren sie die Funktion f von 0 bis b mit CAS. Welches Vorgehen hätte man von Hand nehmen müssen?

d) Überlegen Sie, ob das Integral für b gegen unendlich einen Grenzwert hat und skizzieren Sie diese Fragestellung.

---

a) $f(x) = x e^{-x}$

$f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + x(-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$

$f''(x) = -1 e^{-x} + (1-x)(-e^{-x}) = (-2+x)e^{-x}$

$f'''(x) = 1 e^{-x} + (-2+x)(-e^{-x}) = (3-x)e^{-x}$

$f^{(4)}(x) = (-4+x)e^{-x}$

Vermutung $\boxed{f^{(k)}(x) = (x-k)(-1)^k e^{-x}}$ *

Verankerung $k=1$ $\quad f^{(1)} = (x-1)(-1)^1 e^{-x} \underset{\text{s.o.}}{=} f'(x)$

JA *

$k \to k+1$ $\quad$ Ziel $f^{(k+1)} = (x-k-1)(-1)^{k+1} e^{-x}$

$f^{(k+1)}(x) \underset{JA}{=} \left((x-k)(-1)^k(e^{-x})\right)' =$

$(-1)^k (1) \cdot e^{-x} + (-1)^k (x-k)(-e^{-x})$

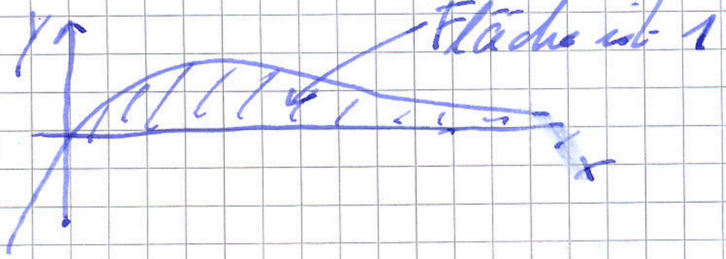
$= (-1)^k e^{-x}(1-x+k) = (x-k-1)(-1)^{k+1} e^{-x}$

qed

c) $\int_0^b f(x)\,dx = (-b+1)e^{-b} + 1$

man hätte partielle Integration nehmen müssen $\quad u = x \quad v = e^{-x}$ usw.

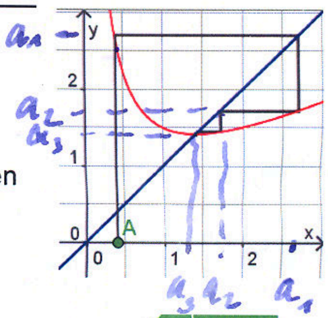
d) $\lim_{b\to\infty} \int_0^b f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \left(\underbrace{-b \cdot e^{-b}}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{e^{-b}}_{\downarrow\, 0} + 1\right) = 1$



Aufgabe 3 Rekursion Heron *AnI 10.7.09*

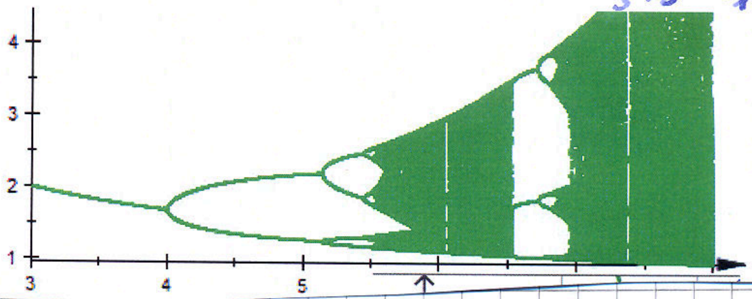
a) Zeigen Sie, dass die Rekursion $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{r}{a_n^{k-1}}\right)$ den Fixpunkt $a = \sqrt[k]{r}$ hat.

b) Gezeichnet ist rechts die Trägerfunktion für r=2,k=2. Berechnen Sie für den Startwert 0.4 drei Folgenglieder und beziehen Sie ihre Rechnung auf die Zeichnung.



c) Für welches k wird die Steigung im Fixpunkt (-1)? Warum ist das interessant? Was hat Ihr Ergebnis mit dem Feigenbaumdiagramm zu tun?

d) Wie entsteht das Feigenbaumdiagramm bei dieser Aufgabe?



a) $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{r}{a_n^{k-1}}\right) = f(a_n) \qquad f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{r}{x^{k-1}}\right)$

Fixpunkt erfüllt sicher $x = f(x)$

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{r}{x^{k-1}}\right)$$
$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\frac{r}{x^{k-1}}$$
$$\frac{1}{2}x^k = \frac{1}{2}r$$
$$x^k = r$$
$$x = \sqrt[k]{r}$$ wie behauptet.

b) $k=2$, $r=2$ $\quad f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$

$a_0 = 0,4 \qquad a_1 = \frac{1}{2}\left(0,4 + \frac{2}{0,4}\right) = 2,7$ Werte passen.

$a_2 = 1,72037\ldots$

$a_3 = 1,414446\ldots$

$a_4 = 1,41447 \longrightarrow \sqrt[2]{2}$ wie erwartet.

c) $f'(x) = \frac{x^2-2}{2x^2}$ gemacht: $f'(x)$ für beliebiges k und r

$f'(\sqrt{2}) = \frac{2-2}{2\cdot 4} = 0$ wie erwartet.

$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}r(1-k)x^{1-k-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}r(1-k)x^{-k}$

$f'(\sqrt[k]{r}) = f'(r^{\frac{1}{k}}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}r(1-k)\frac{1}{r} = \frac{1}{2} + \frac{1-k}{2} = 1 - \frac{k}{2}$

Bedingung: $f'(x_{Fix}) = -1$

$f'(\sqrt[k]{r}) = 1 - \frac{k}{2} = -1 \iff \underline{\underline{k=4}}$

Unabhängig von r ist für k=4 das Ende der ~~Div~~ Konvergenz zu erwarten, man sieht im FD Bifurk. bei k=4

d) 1.) es wird ein festes k gewählt, hier
zuerst $k = 3$.
r wird auch fest gelegt, damit das
Rechnen erfolgen kann. c) zeigt, das r
nicht wichtig ist

2. Mit einem beliebigen Startwert
wird die Folge 200 Schritte weit berechnet.
die Nächsten 200 Schritte werden als
(k, a_i) eingetragen.

I $3 < k \leq 4$ Konvergenz, alle Punkte
aus 2 liegen übereinander.

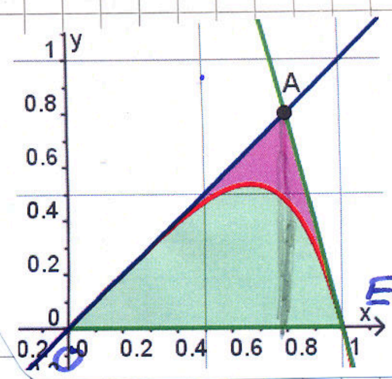
II $4 < k < b$ mit $b \approx 5{,}2$
Bereich mit zwei Häufungswerten
alle Punkte aus 2 liegen
wechselweise im oben oder im Unteren Bogen.

III Weiter rechts: entweder weitere
Bifurkationen der Bögen oder
Chaosbereich, in dem alle Punkte
aus 2. verschieden sind, ganz grüner
Bereich.

An I 10.7.09

Aufgabe 4 Polynome

Bei der Polynomschar f_k mit $f_k(x) = x - x^k$ ist das Verhältnis der grünen zur violetten Fläche stets $k:1$. Zeigen Sie dieses allgemein. Skizzieren sie auch einige Funktionen für andere k. Was haben sie gemeinsam?



$f_k(x) = x - x^k = x(1-x^{k-1})$

$k=0$ $f_0(x) = x-1$ schneidet rechts nicht
Fläche nicht definiert

Polynome $\Rightarrow k \in \mathbb{N}$

$k=1$ $f_1(x) = x - x = 0$ Fläche auch nicht definiert

Sei nun $k > 1$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x=0 \vee x=1}_{\text{diese ist hier relevant.}}$ → gemeinsame Nullstellen * gem. Steigung in O

✓ { für k ungerade $x = -1$
für k gerade keine weitere Nullstelle.

Tangente in $(1|0)$:

$f'(x) = 1 - kx^{k-1}$

$f'(1) = 1-k$ → $y = (1-k)(x-1)$

Tangente in $(0|0)$

* $f'(0) = 1 \Rightarrow y = x$

Schnitt mit Tangente in $(0|0)$

$(1-k)(x-1) = x$

$+k \quad x = k-1$

$x = -\frac{1-k}{k} = -\frac{1}{k} + 1 = \frac{k-1}{k}$

Also $A = (1-\frac{1}{k} \mid 1-\frac{1}{k})$

mit den gezeichneten Werten erst $k=5 \Rightarrow A = (0{,}8 \mid 0{,}8)$ passt.

Fläche des Dreiecks OEA $F_D = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{k-1}{k} = \frac{k-1}{2k}$

Fläche unter der Kurve

$A_f = \int_0^1 (x - x^k)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{k+1}x^{k+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{k+1}$

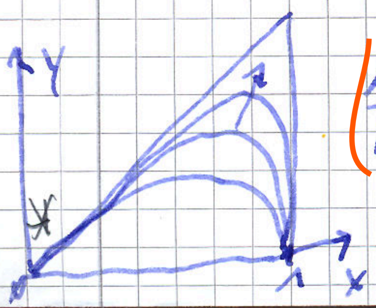
$= \frac{k+1-2}{2(k+1)} = \frac{k-1}{2(k+1)}$

R = Restfläche $= F_D - A_f = \frac{k-1}{2k} - \frac{1}{2} + \frac{1}{k+1}$

$= \frac{k^2-1-k(k+1)+2k}{2k(k+1)}$

$= \frac{k^2-1-k^2-k+2k}{2(k+1)} = \frac{k-1}{2k(k+1)}$

Verhältnis $\frac{A_f}{R} = \frac{\cancel{(k-1)}k\cdot\cancel{(k+1)2}}{\cancel{2(k+1)}\cancel{(k-1)}}$



$\frac{A_f}{R} = \frac{k}{1} = k:1$

Leuphana Universität Lüneburg Mathematik: NAME:
Lehramt Berufsbildende Schulen/ BA Modul 1 Matrikelnummer ______________
Note:

Analysis I

Prof. Dr. Dörte Haftendorn Ti-Nspire o.ä. erlaubt. 18. Sept 2009

Aufgabe 1 a) Beweisen Sie mit **Vollständiger Induktion**, dass gilt $15 \mid 25^n - 10$.

b) Für welches a und b ist Obiges ein Spezialfall der Aussage $a \mid (a+b)^n - b$?

c) Gilt die Aussage $a \mid (a+b)^n - b$ für jede Wahl von natürlichen Zahlen a und b?

Beh $\boxed{15 \mid 25^n - 10}$ $\Leftrightarrow$ $\underbrace{\exists\, k \in \mathbb{N}: 15k = 25^n - 10}_{IA}$

IV $n=1$ $15 \mid 25^1 - 10 = 15$ wA
$n=2$ $15 \mid 25^2 - 10 = 625 - 10 = 615 = 41 \cdot 15$

IA s.o. Ziel $\exists\, k^* \in \mathbb{N}: 15k^* = 25^{n+1} - 10$

$n \to n+1$ $25^{n+1} - 10 = 25^n \cdot 25 - 10 \overset{IA}{=}$

$= (15k+10)\,25 - 10 = 15 \cdot 25 \cdot k + 250 - 10$

$= 15 \cdot 25k + 240 = 15(\underbrace{25k + 16}_{k^*})$

$k \in \mathbb{N} \Rightarrow k^* \in \mathbb{N}$

qed.

b) $a \mid (a+b)^n - b$
$15 \mid (a+b)^n - 10$ $\Big\}$ $a = 15,\ b = 10$
$a+b = 25$ ok

c) $a=5$ $b=2 \Rightarrow 5 \mid (5+2)^n - 2$

$n=2$ $5 \mid 7^2 - 2 = 49 - 2 = 47$ falsche Aussag.

also gilt das nicht immer

für $n=1$ ist es immer richtig, denn

$(a+b)^1 - b = a + b - b = a$ und $a \mid a$ stimmt.

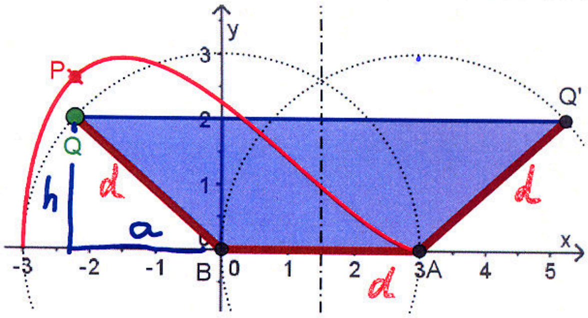
$n=2$ $(a+b)^2 - b = a^2 + 2ab + b^2 - b = a\left(a + 2b + \underbrace{b\frac{b-1}{a}}\right)$

Wenn $\frac{b(b-1)}{a} \in \mathbb{N}$ ist die Aussage richtig.

also $a \mid b \ \vee\ a \mid b-1)$

Aufgabe 2 Rinne

Mathix will eine Rinne aus drei gleich breiten Brettern bauen. Durch sie soll möglichst viel Wasser fließen.



a) Mathix hat sich eine Zeichnung mit GeoGebra gemacht. Warum sind die Kreise da?

b) Warum ist es sinnvoll, die Bretter symmetrisch anzuordnen?

c) Was wird die rote Kurve vermutlich zeigen? Klären Sie das an den Grenzfällen. In welchem Bereich ist sie physikalisch sinnlos.

d) Stellen Sie selbst eine Gleichung für die Querschnittsfläche in Abhängigkeit von h und a auf.
Trapezformel F = Mittelwert der parallelen Seiten mal Höhe

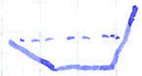
e) Nehmen Sie als Zielfunktion f das Quadrat dieser Fläche. Warum darf man das machen?

f) Welche Querschnittsfläche hat die Rinne, wenn die Seitenbretter senkrecht stehen? Prüfen Sie damit Ihre Formel.

g) Berechnen Sie nun die beste Lage für Q und geben Sie auch den größten Flächeninhalt an. Passt Ihre Lage von Q zu der Zeichnung?

---

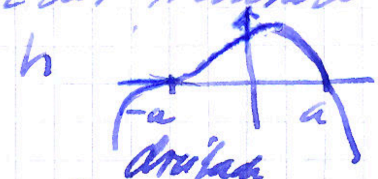
a) Die Kreise zeigen, wie die Bretter gedreht werden können. Sie behalten ihre Breite.

b) Bei unsymm. Stellung nutzt man das steilere Brett nicht aus, das  Wasser kann nicht höher stehen als das niedrigere Brett zeigt.

c) Zu jeder Stellung von Q (und Q') hat das blaue Trapez eine Fläche(ninhalt). P gibt diesen vermutlich an. Wenn Q bei (-3|0) ist, dann ist die Fläche auch Null. Das passt für die Rote Kurve. Der Weg von Q ist nur bis zum Schnitt der Kreise sinnvoll. , damit ist die rote Kurve für $x > 1{,}5$ sinnlos.

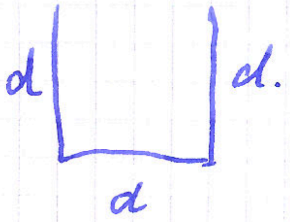
d) $F = (2d+2a):2 \cdot h = \frac{2dh}{2} + ah = \underline{\underline{dh + ah}}$

e) Zielfunktion $f(a) = (d+a)^2(d^2-a^2) = (d+a)^3(d-a)$
Es werden nur pos. $a < d$ betrachtet, da gilt: die Wurzelfkt ist monoton ⇒ (Extr.stelle von F ist Extremstelle von f)
Weitere Extr.stellen kann f nur an den Nullstellen haben, die sind hier uninteressant.



$f'(a) = 3(d+a)^2(d-a) + (d+a)^3(-1)$
$= (d+a)^2(3d-3a-d-a) = (d+a)^2(2d-4a)$

$\Rightarrow \underline{\underline{a = \frac{d}{2}}}$ für $f'(a)=0$ im geom. interessanten Bereich.

f) 

$F = d^2$

dann ist $a = x(Q') = d$

oder $a = x(Q) = 0$

$f(a) = (d+a)^3(d-a)$

$f(0) = d^3 \cdot d = d^4 \xrightarrow{\sqrt{\ }} d^2$ wie erwartet

g) obige Rechnung

$a = \frac{d}{2}$ $\quad F_{max} = \sqrt{f(\frac{d}{2})} = \sqrt{(\frac{3d}{2})^3 \cdot \frac{d}{2}} = \frac{3d^2}{4}\sqrt{3}$

In der Zeichnung ist tatsächlich das Maximum der roten Kurve an der Stelle $\frac{d}{2}$

$d = 3$ $\quad \frac{d}{2} = 1.5$

Aufgabe 3 Rekursion

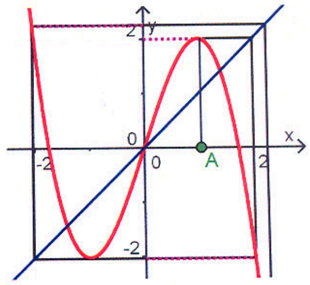
Gegeben sind die Trägerfunktionen von Rekursionen: $f_k(x) = k \cdot x - x^3$.

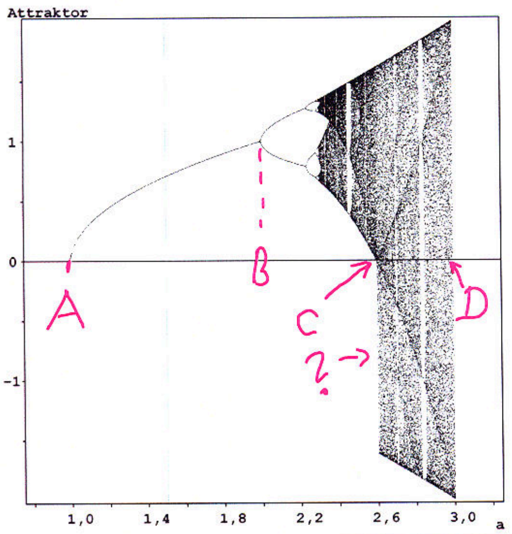
a) Berechnen Sie die Fixpunkte und die Steigung in den Fixpunkten in Abhängigkeit von k.

b) Für welche k ist der Ursprung ein anziehender Fixpunkt? Skizzieren in einem gemeinsamen Bild die beiden Grenzfälle und einen Fall dazwischen.

c) Für welche k sind die beiden anderen Fixpunkte anziehend?
Wählen ein f_k in dem Bereich, skizzieren Sie f_k, berechnen Sie für den Start $a_0 = 0.1$ vier Folgenwerte, einen von Hand, und zeichnen Sie das passende Treppchen ein.

d) Berechnen Sie dasjenige k, für das der Extremwert 2 ist. Im rechten Bild ist k um ein Hundertstel größer. Was passiert für Ihr k mit der Folge für $a_0 = 1$?





e) Beschreiben Sie, wie das Feigenbaumdiagramm entsteht.

f) Deuten Sie die Punkte A, B und D mit Ihren bisherigen Ergebnissen.

g) Überlegen Sie, was beim Punkt C passiert und warum das Feigenbaumdiagram so plötzlich unten weitergeht.

Anmerkung: Etwa 90% der so vergebenen Punkte werden die Bemessungsgrundlage 100%. Vergraben Sie sich nicht lange in Termumformungen. Bei TI-Ergebnissen nennen Sie den verwendeten Befehl und seine Eingaben.

Gutes Gelingen

$f_k(x) = kx - x^3$ Fixpunkte $f_k(x) = x \Leftrightarrow (k - x^2)x = x$

Wird erfüllt von $x = 0$, klarer Fixpunkt in 0

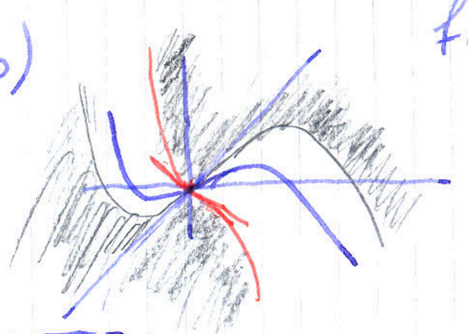
Weiter $k - x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = k - 1$
$x = \pm\sqrt{k-1}$

Die Fkt. sind alle symm. zum Ursprung, denn es kommt kein gerader Term vor.

$f_k'(x) = k - 3x^2$ $\quad f_k'(x_{Fix}) = k - 3(k-1) = \underline{3 - 2k}$

$f_k'(0) = k$ 0 anziehender Fixpkt für $|k| < 1$

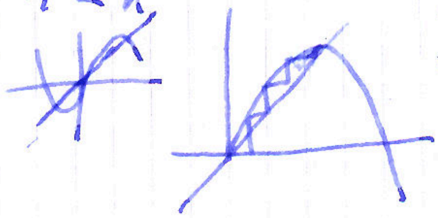
b)



c) $3 - 2k < 1 \quad \vee \quad -1 < 3 - 2k$

$2 < 2k \qquad 2k < 4$

$1 < k \qquad k < 2$



zu c) weiter $k = 1{,}5$