

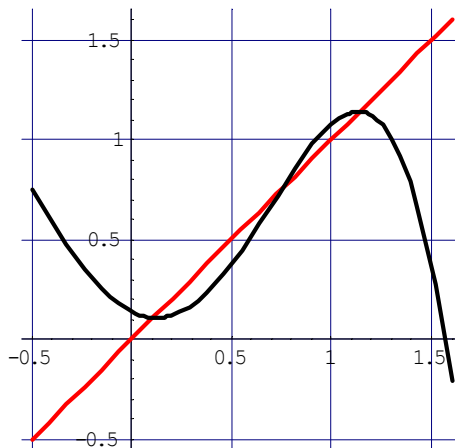
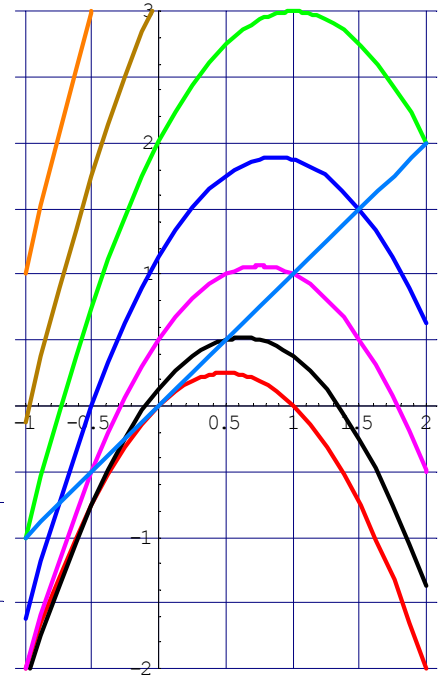
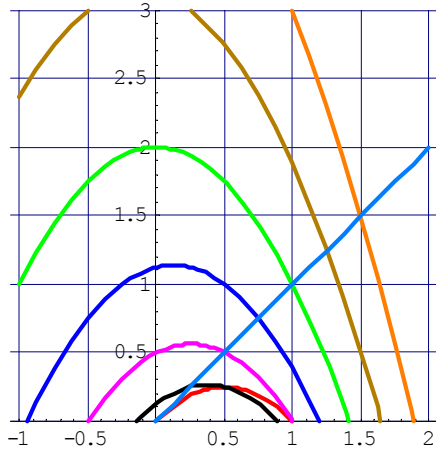


Aufgabe 1 Rekursion

Durch $f_k(x) = -x^2 + (1-k)x + 2k^2$

sind die Trägerfunktionen einer Familie rekursiver Folgen gegeben.

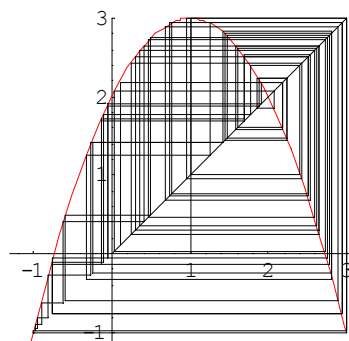
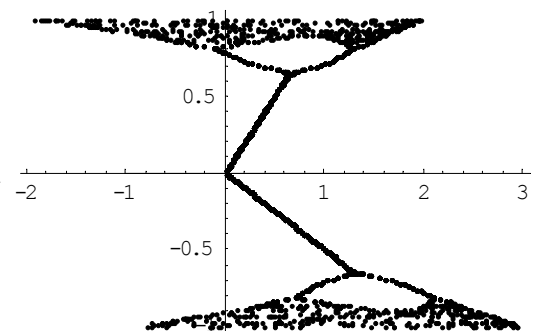
- Berechnen Sie die Fixpunkte.
(Zur Sicherheit: $-2k$ und k)
- Ordnen Sie zu, welches k zu welchem Graphen gehört. (Nur volle Viertel für k)
- Berechnen Sie die Steigungen in den Fixpunkten.
- Zeigen Sie, dass die Fixpunkte im 3. Quadranten stets abstoßend sind.
- Für welche k sind die Fixpunkte im 1. Quadranten anziehend?
- Nebenstehend ist für $k=0,75$ die 2. Iterierte gezeichnet. Welchen Grad hat sie? Darunter stehen die Werte der zugehörigen Folge. Deuten Sie die Werte in dem passenden der obigen Graphen und im Graphen der 2. Iterierten.



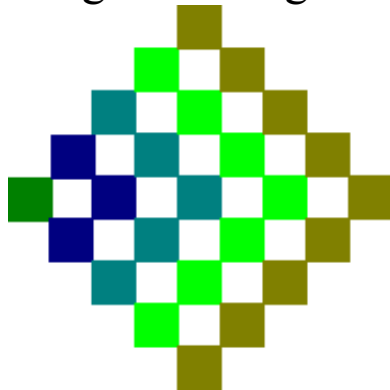
- Darunter sehen Sie das Feigenbaumdiagramm in der Weise, dass nach oben k aufgetragen ist. Erläutern Sie das Diagramm. Wie zeigt sich der Fall aus f) darin?

0,375, 1,07813, 0,232178, 1,12914, 0,132332,
1,14057, 0,10924, 1,14038, 0,109635, 1,14039, 0,10961, 1,14039,
0,109612, 1,14039, 0,109612, 1,14039, 0,109612, 1,14039, 0,109612,
1,14039, 0,109612, 1,14039, 0,109612, 1,14039, 0,109612, 1,14039

- Das Diagramm in g) reicht von $k=-1$ bis $k=1$. Das ist nicht als Ausschnitt genommen, sondern dort ist das Diagramm zuende. Das nachfolgende Bild, das für $k=-1$ gezeichnet ist, kann zur Erklärung dieses Verhaltens beitragen. Können Sie den Zusammenhang erklären und rechnerisch betätigen?



Aufgabe 3 Figurierte Zahlen



- Begründen Sie mit Erläuterung dieser Figur den Satz **“Die Summe der ungeraden Zahlen ist eine Quadratzahl.”**
- Stellen Sie eine rekursive Formel, eine Formel mit Summenzeichen und eine explizite Formel auf.
- Beweisen Sie die explizite Formel mit vollständiger Induktion.
- Extrapunkte: Auf welche Art ist in der 4. Figur (bis incl. der hellgrünen Karos) die das pythagoräische Tripel (3,4,5) mit $3^2 + 4^2 = 5^2$ verborgen?

Aufgabe 3 Polynome

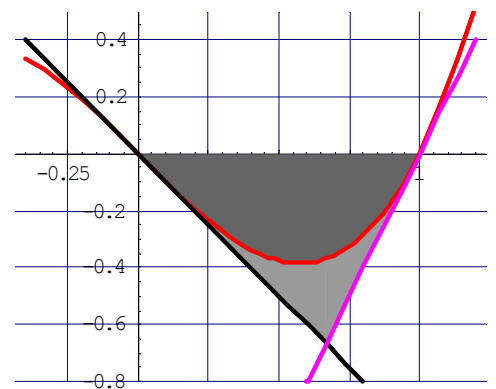
Es ist rechts der Graph von $f_k(x) = x^k - x$,

hier für $k=3$, mit seiner Wendetangente und der Tangente in (1/0) dargestellt.

- Berechnen Sie den Schnittpunkt der beiden Tangenten, Ergebnis zur Sicherheit oder zum Zeit Sparen:

$$\mathfrak{S} \left(1 - \frac{1}{k} \mid -1 + \frac{1}{k} \right)$$

- Weisen Sie nach, dass das Verhältnis der dunkelgrauen (oberen) zur hellgrauen (unteren) Fläche $k : 1$ ist.



Aufgabe 4 Geometrische Folgen und Reihen

Wenn der Springfrosch *Rana dalmatina circula mathematica* sich abends im Nirwana schlafen legt, pflegt er in der gezeichneten Weise exakt auf Halbkreisen zu springen, deren Durchmesser bei jedem Sprung um ein Viertel abnehmen. Er selbst schrumpft jedesmal auf ein Drittel seiner Größe.

- Berechnen Sie mit Hilfe von geometrischen Folgen und Reihen, wie groß der ursprünglich 9 cm große Frosch nach 7 Sprüngen ist und welchen Weg durch die Luft längs der Halbkreise er bis dahin zurückgelegt hat.
- Wie weit ist es zum Nirwana für ihn durch die Luft als Flugstrecke?
- Extrapunkte: Wie weit ist es direkt auf dem Boden entlang zum Nirwana?
- Extrapunkte: Sollte man in der Schule Grenzwerte betrachten? Was finden Sie wichtig, was nicht?

