

Aufgabe 2 Figurierte Zahlen

- a) Begründen Sie mit Erläuterung dieser Figur den Satz "Die Summe der ungeraden Zahlen ist eine Quadratzahl."
- b) Stellen Sie eine rekursive Formel, eine Formel mit Summenzeichen und eine explizite Formel auf.
- c) Beweisen Sie die explizite Formel mit vollständiger Induktion.
- d) Extrapunkte: Auf welche Art ist in der 4. Figur (bis incl. der hellgrünen Karos) die das pythagoräische Tripel (3,4,5) mit  $3^2 + 4^2 = 5^2$  verborgen?



a) Die Figur entsteht aus dem Anbau von Zickzack, die je 2 Karos mehr haben als die vorige Zeile, also bilden die Zickzack die Folge der ungeraden Zahlen. Ihre Summe ist die Gesamtfigur, ersichtlich ein Quadrat.

n	$a_n$	$S_n$
1	1	1
2	3	4
3	5	9
4	7	16
5	9	25

b1) Rekurrenz

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$a_n = a_{n-1} + 2$$

$$S_n = S_{n-1} + 2n - 1$$

$$S_{n+1} = S_n + 2(n+1) - 1 = S_n + 2n + 1$$

b2) Explizit  $a_n = 2n - 1$

$$1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = S_n = n^2$$

Beweis  $= \sum_{i=1}^n (2i - 1)$

c) Bew. mit Vollst. Induktion. VAA  $S_1 = 1^2$ ;  $S_2 = 2^2 = 4$

JA  $S_n = n^2$   $n \rightarrow n+1$  Ziel  $S_{n+1} = (n+1)^2$

$$S_{n+1} = S_n + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 \text{ geht}$$
