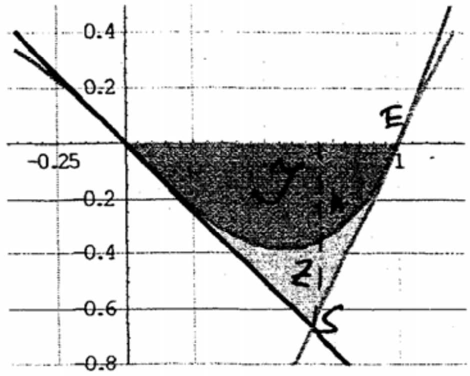
Aufgabe 3 Polynome



Es ist rechts der Graph von $f_k(x) = x^k - x$,

hier für k=3, mit seiner Wendetangente und der Tangente in (1/0) dargestellt.

a) Berechnen Sie den Schnittpunkt der beiden Tangenten, Ergebnis zur Sicherheit oder zum Zeit Sparen:

$S(1-\frac{1}{k} \mid -1+\frac{1}{k})$

b) Weisen Sie nach, dass das Verhältnis der dunkelgrauen (oberen) zur hellgrauen (unteren) Fläche k :1 ist.

a) $f_k(x) = x^k - x$

$f_k'(x) = kx^{k-1} - 1$

$f_k''(x) = k(k-1)x$ WP im Ursprung (war klar) 3

$f_k'(0) = -1$ 2 Gleichung der Wendetangente $y = -x$

$f_k'(1) = k-1$ 3 Tangente in (1/0) $y = (k-1)(x-1)$

$J = -\int_0^1 f_k(x)\,dx = -\int_0^1 (x^k - x)\,dx = -\left[\frac{1}{k+1}x^{k+1} - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1$

$= -\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{2} - 0\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{k+1}$ 6

$= \frac{k+1-2}{2(k+1)} = \frac{k-1}{2(k+1)}$

→ Schnitt der Tangenten $-x = (k-1)(x-1)$

$\cancel{-x} = kx - k \cancel{-x} + 1$

$kx = k-1$

$x = \frac{k-1}{k} = 1 - \frac{1}{k}$

S $y = -1 + \frac{1}{k}$ wegen Wendetang.

b) Das Dreieck OSE lässt sich elementar berechnen

$F_D = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{k}\right)}_{h,\ pos}$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2k}$

Zipfel $Z = F_D - J = \frac{1}{2} - \frac{1}{2k} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{2k}$

$Z = \frac{2k - (k+1)}{2k(k+1)} = \frac{k-1}{2k(k+1)}$

$\frac{J}{Z} = \frac{(k-1)\ 2k(k+1)}{2(k+1)\cdot(k-1)} = \frac{k}{1}$ qed