Aufgabe 4 Geometrische Folgen und Reihen

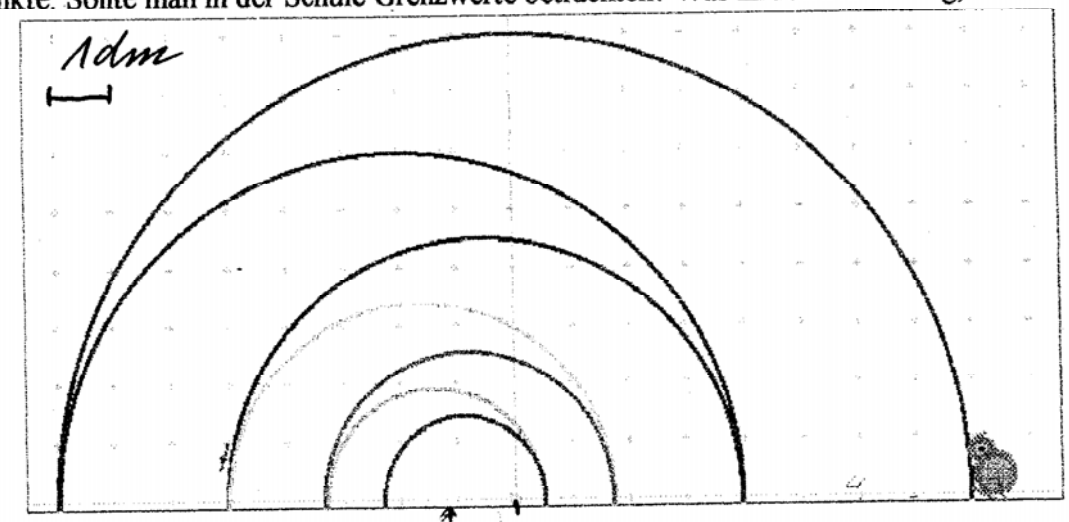
Wenn der Springfrosch *Rana dalmatina circula mathematica* sich abends im Nirwana schlafen legt, pflegt er in der gezeichneten Weise exakt auf Halbkreisen zu springen, deren Durchmesser bei jedem Sprung um ein Viertel abnehmen. Er selbst schrumpft jedesmal auf ein Drittel seiner Größe.

a) Berechnen Sie mit Hilfe von geometrischen Folgen und Reihen, wie groß der ursprünglich 9 cm große Frosch nach 7 Sprüngen ist und welchen Weg durch die Luft längs der Halbkreise er bis dahin zurückgelegt hat.

b) Wie weit ist es zum Nirwana für ihn durch die Luft als Flugstrecke?

c) Extrapunkte: Wie weit ist es direkt auf dem Boden entlang zum Nirwana?

d) Extrapunkte: Sollte man in der Schule Grenzwerte betrachten? Was finden Sie wichtig, was nicht?



$d_0 = 16$ dm $\quad g_0 = 9$ cm $\cdot \frac{1}{3}$

$d_1 = 12 \quad g_1 = 3$ cm

$d_2 = 9 \quad g_2 = 1$ cm

$d_3 = \frac{27}{4} \quad \vdots$ $\cdot \frac{3}{4}$

$g_7 = 9\text{ cm} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7 = \frac{1}{2187}\text{ cm} = 0{,}0041\text{ cm} = 41\ \mu m$

nach 7 Sprüng. $l_0 = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 16\text{ dm}}_{\text{Radius}} \cdot \underbrace{\pi \cdot 2}_{\text{Fo } 2\pi r} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{Halbk.}} = 8\pi$ dm

Halbk. $k_i = \frac{\pi}{2} \cdot d_i$ auch eine geom. Folge mit $q = \frac{3}{4}$

$l_n = l_0 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

nach 7 Sprüng $l_6 = 8\pi \cdot \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^7}{1 - \frac{3}{4}} = 8\pi \cdot 4 \cdot \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^7\right) = 32\pi \cdot \frac{14142}{16384}$

$= \pi \cdot \frac{14142}{512}$

$= 87{,}11$ dm

$= 8{,}711$ m

$l_\infty = 8\pi \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{8\pi}{\frac{1}{4}} = 32\pi$ dm

$l_\infty = 100{,}5$ dm

d) Am Boden entlang. kommt nur jede 2. vorwärts dann ist es eine geom. Folge mit $q = \left(\frac{3}{4}\right)^2$

$s_\infty = s_0 \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = 9\text{ dm} \cdot \frac{16}{7} = \frac{64}{7}\text{ dm} = 9{,}143\text{ dm}$