

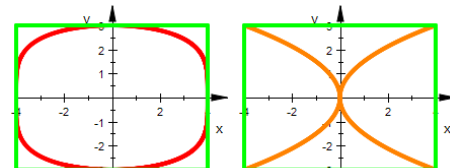
Aufgabe 2 Rotationsvolumina

In Abwandlung der Kegelschnittgleichungen sind durch $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^4}{b^4} = 1$ und $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^4}{b^4} = 1$

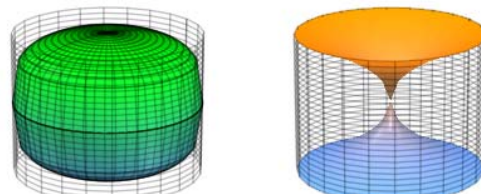
das "Rundeck" und die "Garnrollen-Hyperbel" definiert. Dabei ist mit $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^4}{b^4} = 0$ eine

Doppel-Parabel gegeben, die Asymptotenkurve zu der "GR-Hyperbel" ist. In dieser Aufgabe geht es um die Rotation um die y-Achse (- in der 3d-Auffassung um die z-Achse-) dieser Kurven.

- a) Zeigen Sie, dass das Rundeck und die Doppelparabel in der gezeigten Weise in einem Kasten der Breite $2a$ und der Höhe $2b$ liegen.

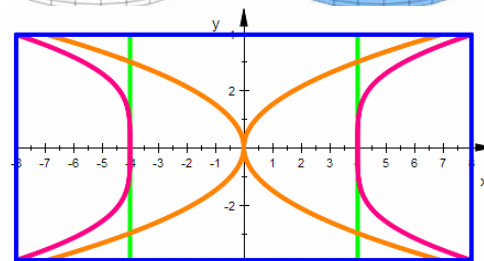


- b) Bestimmen Sie für den Kasten, das Rundeck und die Doppelparabel das jeweilige Rotationsvolumen bei Rotation um die y-Achse. Führen Sie eine typische Integration vollständig von Hand durch, alle anderen und die nachfolgenden mit CAS oder elementargeometrisch.



- c) Stellen Sie ihre Beobachtungen zu den Verhältnissen -auch bzgl der Größe der Restkörper"- übersichtlich zusammen.

- d) Der blaue Kasten hat die Breite $2a$. Bestimmen Sie seine Höhe, die von der GR-Hyperbel festgelegt wird.



Die Doppelparabel reicht ebenso hoch.

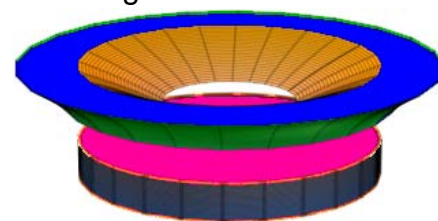
Bestimmen Sie die Abszisse ihres äußersten Punktes.

- e) Bestimmen Sie für den blauen Kasten, den grünen "Scheitel-Kasten", die GR-Hyperbel und die Doppelparabel das jeweilige Rotationsvolumen bei Rotation um die y-Achse. Welche Anteile des großen Zylinders nehmen der Scheitelzylinder, das Doppelparaboloid und das Garnrollen-Hyperboloid ein? Nennen Sie noch drei weitere Verhältnisse der kleineren Körper oder der Restkörper untereinander.

- f) Bekanntlich gibt es für kartesische Koordinaten zwei Verfahren zur Bestimmung des Rotationsvolumens bei Rotation um die y-Achse. Zeigen Sie jeweils anhand einer Skizze, wie sich aus dem Grundgeanknen die Formel ergibt.

- g) Aus dem Zwischenkörper, der sich zwischen dem Garnrollen-Hyperboloid und seinem Asymptoten-Paraboloid bildet, wird in der Höhe c ein Ring der (senkrechten) Dicke d herausgeschnitten.

Zeigen Sie, dass sein Volumen von c nicht abhängt und dass es als Volumen einer Zylinderscheibe gedeutet werden kann.



- Wie könnte man die gegebenen Gleichungen verändern, so dass weiterhin die Eigenschaft e) gilt und auch der Rest der Aufgabe mit schulischen Mitteln lösbar bleibt?