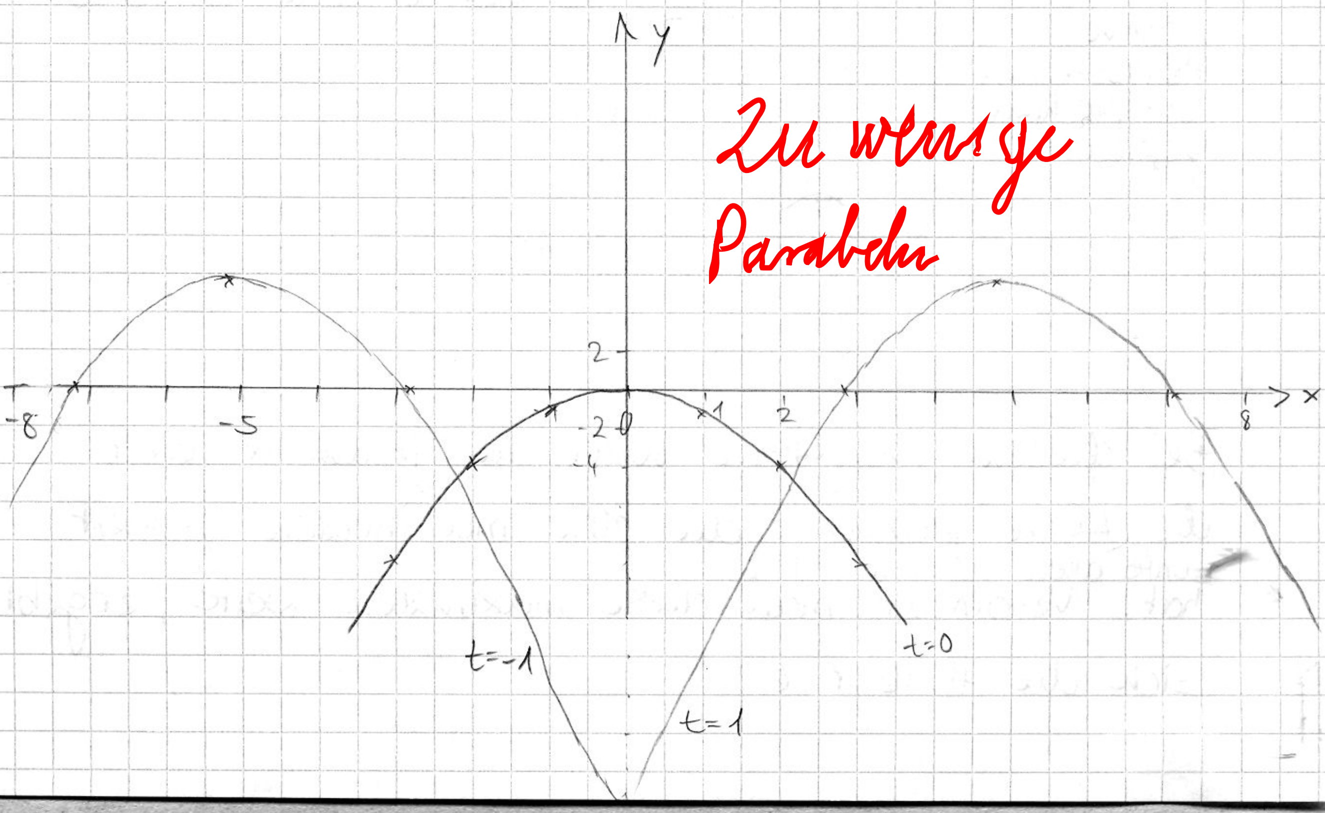
④

Aufgabe 2

a)
- Es handelt sich um eine nach unten geöffnete Parabel
- Die Maxima der Kurven für negative t liegen im negativen Abzissenbereich, die für positive t im positiven.
- Die Kurven für $\pm t$ mit jeweils dem gleichen Wert für t sind an der y-Achse gespiegelt
- Die Kurven haben einen Scheitel, der um $-5t$ verschoben ist.
- Die Kurven sind in y-Richtung um $+5t^2$ verschoben

→ Scheitelpunkt $S(5t / 5t^2)$

- für größer werdende t verschiebt sich das Maximum in immer größere x- bzw. y-Werte, d.h. für pos. t nach oben rechts außen und für neg. t nach oben links außen



Zu wenige Parabeln

b) Hüllkurve

1. Extremalverfahren:

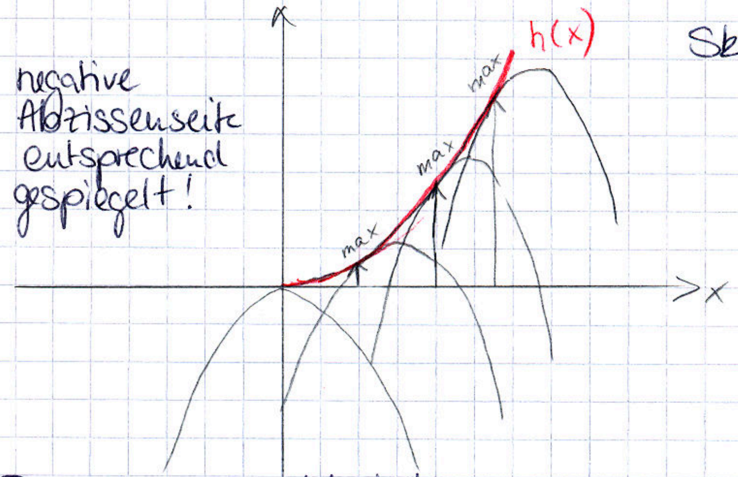
$$g(x,t) = -(x-5t)^2 + 5t^2$$
$$= -(x^2 - 10tx + 25t^2) + 5t^2$$
$$= -x^2 + 10tx - 25t^2 + 5t^2$$
$$= -x^2 + 10tx - 20t^2$$

$$g_t' = 10x - 40t$$

$$g_t' \overset{!}{=} 0 \qquad 10x = 40t$$
$$t = \frac{1}{4}x$$

$$g(x, \tfrac{1}{4}x) = -x^2 + 10(\tfrac{1}{4}x)x - 20(\tfrac{1}{4}x)^2$$
$$= -x^2 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{5}{4}x^2$$
$$= \frac{1}{4}x^2$$

Bei diesem Verfahren leitet man die Funktion nach dem Parameter ab, setzt dieses gleich null. Das Ergebnis für den Parameter eingesetzt in die Funktion liefert die Hüllkurve $h(x)$, hier
$h(x) = \frac{1}{4}x^2$



Skitze ohne Maßstab!

Bei diesem Verfahren wird zu jedem x-Wert die Kurve gesucht, die den maximalen y-Wert unter allen Scharen mit t hat. Verbindet man diese maximalen Werte, ergibt sich die Hüllkurve.

Grenzwertverfahren

$$g(x,t) = g(x,a)$$

$$-(x-5t)^2+5t^2 = -(x-5a)^2+5a^2$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

(siehe 1. Verfahren)

$$\cancel{-x^2}+10tx-20t^2 = \cancel{-x^2}+10ax-20a^2$$

$$10tx-10ax = 20t^2-20a^2$$

$$x(10t-10a) = 20t^2-20a^2$$

$$x = \frac{20t^2-20a^2}{10t-10a}$$

$$= \frac{\overset{2}{\cancel{20}}(t^2-a^2)}{\cancel{10}(t-a)} = \frac{2(t+a)\cancel{(t-a)}}{\cancel{(t-a)}}$$

$$= 2(t+a)$$

$$\lim_{a\to t} 2(t+a) = 2(2t) = 4t \quad\to\quad x = 4t$$

$$\to\quad t = \frac{1}{4}x$$

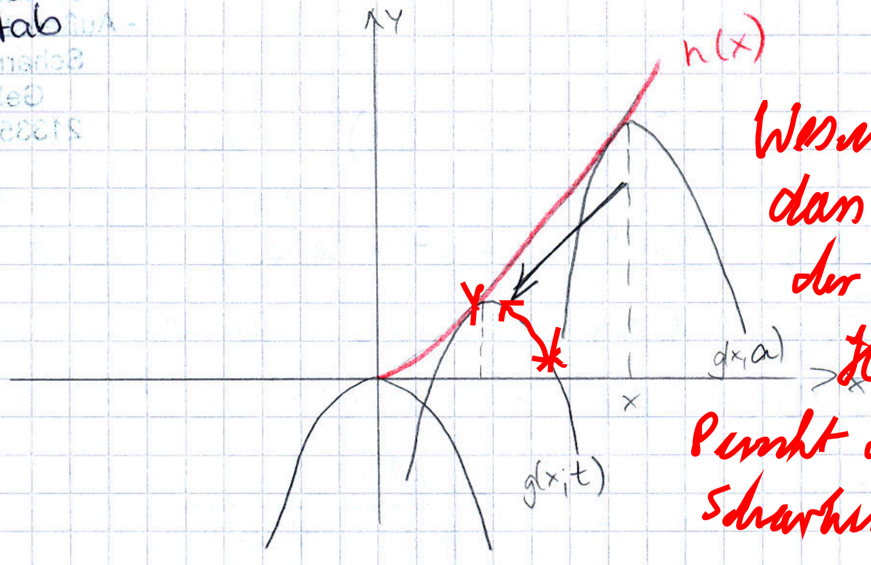
$$\cancel{g(4t,t) = -(4t-5t)^2+5t^2}$$

$$\cancel{= -(-t)^2+5t^2 =}$$

$$g\left(x,\tfrac{1}{4}x\right) = \ldots = \frac{1}{4}x^2$$ Rechnung siehe Extremalverfahren

Bei diesem Verfahren nimmt man zwei unterschiedliche Funktionen $g(x,t)$ und $g(x,a)$ und setzt sie gleich.
Das Ergebnis (aufgelöst nach x) wird einer Grenzwertuntersuchung unterzogen, indem man den einen Parameter gegen den anderen laufen lässt.
Das Ergebnis wird in eine Funktion eingesetzt und es ergibt sich die Hüllkurve.

Skitze ohne Maßstab



Wesentlich ist, dass der Schnittpkt der beiden an den Hüllkurven-Punkt der festgehaltenen Scharkurve rückt.

~~Für einen~~ Man lässt die ~~Schar~~ Kurve ~~f~~ $g(x, a)$ über den Grenzwertprozess zur ~~Schar~~ Kurve $g(x, t)$ laufen, so dass sich die Hüllkurve ergibt.

⑥

c) $g(x,t) = -(x-5t)^2 + 5t^2$

$= -x^2 + 10tx - 20t^2$

Nullstellen $\quad x^2 - 10tx + 20t^2 = 0$

$x_{1,2} = 5t \pm \sqrt{25t^2 - 20t^2}$

$= 5t \pm \sqrt{5t^2}$

$x_1 = (5+\sqrt{5})t \qquad x_2 = (5-\sqrt{5})t$

Grenzen vertauscht

$$\int_{(5+\sqrt{5})t}^{(5-\sqrt{5})t} (-x^2 + 10tx - 20t^2)\,dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 5tx^2 - 20t^2x\right]_{(5+\sqrt{5})t}^{(5-\sqrt{5})t}$$

$$\overset{TI}{=} -\frac{20\sqrt{5}}{3}t^3$$

E r, aber unpassend

~~Die A von den beiden nur~~

Die zwischen den beiden Nullstellen liegende Fläche der Schar hat den Flächeninhalt $A = \frac{20}{3}\sqrt{5}\,t^3$

d)
$$\int_{(5+\sqrt{5})t}^{(5-\sqrt{5})t} \frac{1}{4}x^2\,dx = \left[\frac{1}{12}x^3\right]_{(5+\sqrt{5}t)}^{(5-\sqrt{5})t}$$

s o

$$\overset{TI}{=} -\frac{40\cdot\sqrt{5}}{3}t^3$$

Die Fläche unter der Hüllkurve hat den Flächeninhalt $A = \frac{40\cdot\sqrt{5}}{3}t^3$

Zieht man nun den Flächeninhalt unter der Schar ab, erhält man für den schraffierten Bereich den Flächeninhalt $A = \frac{20\sqrt{5}}{3}t^3$

Damit zeigt sich, dass der Flächeninhalt zwischen Funktionsschar und Hüllkurve im Bereich zwischen den Nullstellen der Schar genauso groß ist wie die Fläche unter der Schar. Dies ist bei allen Kurven der Schar der Fall. Dabei hängen jeweils nur Kurve und Nullstellen von t ab, d.h. verschieben sich. Die Hüllkurve bleibt identisch.

e) Die Nullstellen ~~haben~~ sind $(5 \pm \sqrt{5})t$.
Damit enthalten sie bereits eine Wurzel und damit eine nicht rationale Zahl (rationale Zahlen = Menge der endlichen u. unendlichen periodischen Dezimalbrüche). Diese verschwindet nicht bei allen Einsetzungen für t. Selbst wenn ~~bei~~ für t eine Wurzel, z.B. $\sqrt{5}$, eingesetzt wird, hebt sich die Wurzel nicht weg, da sie durch Multiplikation einmal neu "entsteht".

5u

Eine ~~nicht~~ rationale Nullstelle erkenne ich nur für $t=0$, welches hier nicht verwendet werden soll.

aber mit $t = 5-\sqrt{5}$ wird

$$x_1 = (5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5}) = 25-5 = \underline{\underline{20}}$$

rational