1. Staatsprüfung für das Lehramt an berufsbildenden Schulen

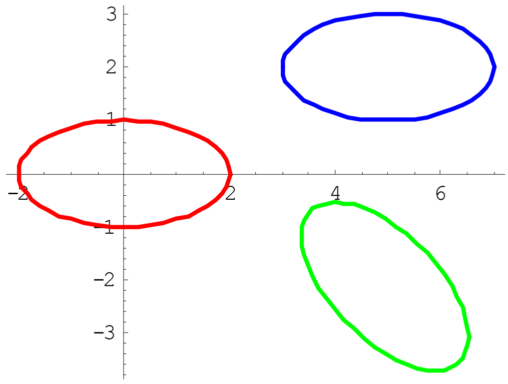
Prof. Dr. Dörte Haftendorn **6. März 2001**

Aufgabe 1 Lineare Algebra und analytische Geometrie

Gegeben ist der Kegelschnitt $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 26\sqrt{2}\,x - 6\sqrt{2}\,y + 74 = 0$

a) Führen Sie eine vollständige Hauptachsentransformation durch.

b) Geben Sie die Drehgleichung und den Verschiebungsvektor an. Bestimmen Sie den Drehwinkel.



c) Bestimmen Sie die ursprüngliche Lage des Mittelpunktes und die ursprünglichen Hauptachsenrichtungen.

d) Tragen Sie Ihre Ergebnisse aus b) und c) in die rechte Zeichnung ein.

e) Erläutern Sie unterstützt von Freihandskizzen, welche Formen sich bei einer Hauptachsentransformation einer quadratischen Form ergeben können, wenn

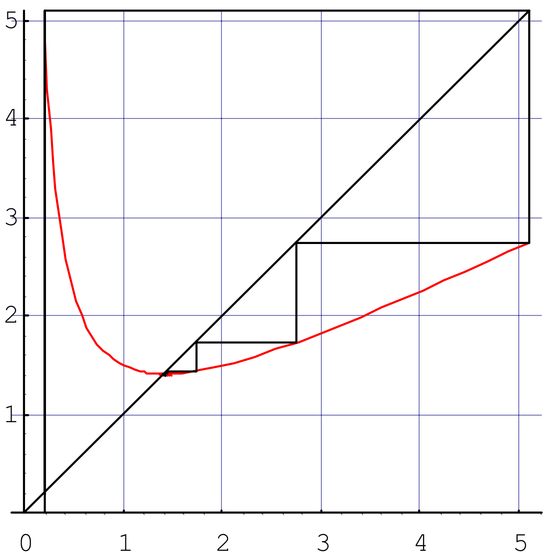
e1) beide Eigenwerte gleich sind?

e2) beide Eigenwerte verschiedenes Vorzeichen haben?

e3) genau ein Eigenwert 0 ist?

f) Welche Eigenschaft der orthonormierten Eigenvektormatrix macht die Hauptachsentransformation möglich? Warum wählt man die Matrix A, die die quadratische Form beschreibt, symmetrisch?

Aufgabe 2 Folgen, Zahlen, Analysis



Zur Bestimmung der Wurzel aus a hat der Grieche Heron von Alexandria die rekursive Formel

$$a_{n+1} = \frac{a_n + \frac{a}{a_n}}{2}$$ angegeben.

a) Für welches ganzzahlige a ist die rechte Graphik, die bei a_o=0,2 startet, gezeichnet?
Rechnen Sie die "Treppchen" drei Schritte weit nach.

b) Erläutern Sie den Graphen, indem Sie ihn in zwei Bausteine zerlegen, die Sie einzeichnen.

c)Zeigen Sie, dass das Newtonverfahren bei der Berechnung der Nullstellen von $w(x)=x^2-a$ auf die Heronformel führt.

e) Zeigen Sie, dass das Heronverfahren "superschnell" konvergiert, indem Sie die Steigung im Fixpunkt für beliebiges a untersuchen.

f) Lösen Sie die Gleichung $x = \cos x$ iterativ durch $x_{n+1} = \cos x_n$ zeichnerisch und rechnerisch.

Führen Sie auch das Newtonverfahren zur Lösung dieser Gleichung zwei Schritte lang durch.
Zeigen Sie (z.B. durch Untersuchung von Steigungen), dass die angegebene Iteration langsamer konvergiert als das Newtonverfahren.

Aufgabe 3 Analysis Kurvenschar

Gegeben ist die Funktionenschar $f_a(x) = \dfrac{12}{x^2 + 3a^2}$.

a) Konstruieren Sie für a=1 den Graphen von $\boldsymbol{f_1}$ **als Verkettung**. Schließen Sie daraus auf möglichst viele Eigenschaften von $\boldsymbol{f_1}$ und auch der anderen $\boldsymbol{f_a}$.

b) b1) Untersuchen Sie auch rechnerisch die Schar auf wesentliche Eigenschaften, darunter auch Wendepunkte und Wendesteigungen. (Ergebnis zu Sicherheit und für das Folgende: $x_w = \pm a$)

Bestimmen Sie die Kurve ***k*** der Wendepunkte.

b2) Übertragen Sie $\boldsymbol{f_1}$ unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse in ein neues Koordinatensystem, in welches Sie auch ***k*** und zwei weitere $\boldsymbol{f_a}$ eintragen.

b3) Vervollständigen Sie Ihre obigen Äußerungen über das Verhalten der Schar.

c) Bestimmen Sie für allgemeines a die Fläche unter der Kurve bis zur x-Achse

c1) für den Bereich zwischen den Wendestellen,

c2) für den unbegrenzten Bereich $]-\infty, +\infty[$.

c3) Zeigen Sie, dass die eben berechneten Flächen im Verhältnis 3:1 stehen.

d) Die gaußsche Glockenkurve (Siehe auch Aufgabe 4) hat eine ähnliche Form und ist bekanntlich nicht geschlossen integrierbar. Man könnte versuchen, diese Kurven so “zurechtzustauchen”, dass sie als Näherung für die Gaußkurve brauchbar werden. Was müsste man mindestes anpassen? Warum ist dieser Versuch -zumindest für einen größeren Bereich- zum Scheitern verurteilt?

Aufgabe 4 Analysis Gaußsche Glockenkurve

a) Die gaußsche Glockenkurve hat die Funktionsgleichung $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Bilden Sie die Taylorentwicklung um x=0 unter Verwendung der Taylorreihe der Funktion $y=e^x$.
Skizzieren Sie einen Graphen von g zusammen mit den ersten drei Taylorpolynomen.
Erläutern Sie, welche grundlegende Eigenschaft die Taylorpolynome stets haben.

b) Bekanntlich verwendet man in der Statistik die Fläche unter der gaußschen Glockenkurve für Wahrscheinlichkeitsaussagen. Kann man ein Taylorpolynom verwenden, um eine benötigte Fläche zu berechnen? Sollte man numerische Integrationsverfahren einsetzen oder eine Kurve aus Aufgabe 3 nehmen? Welche Möglichkeiten hat man heute noch?

Berechnen Sie mit einer Methode Ihrer Wahl $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} g(x)\,dx$.

c) Geben Sie eine Deutung der in b) berechneten Fläche in einem selbstgewählten statistischen Beispiel.

Anmerkung: Die Aufgabenteile werden entsprechend ihrem Anspruch und Aufwand mit Punkten bewertet. Für eine Bestnote müssen Sie etwa 80% der Punkte erreichen. Die Unterpunkte der vier Aufgaben sind nur locker miteinander verbunden, sie können einige ganz oder teilweise fortlassen.
Sie müssen aber aus den Sachgebieten Geometrie **und** Analysis angemessene Anteile bearbeiten.
Unter dieser Voraussetzung reichen gut 40% der Punkte um knapp zu bestehen. ***Gutes Gelingen!***