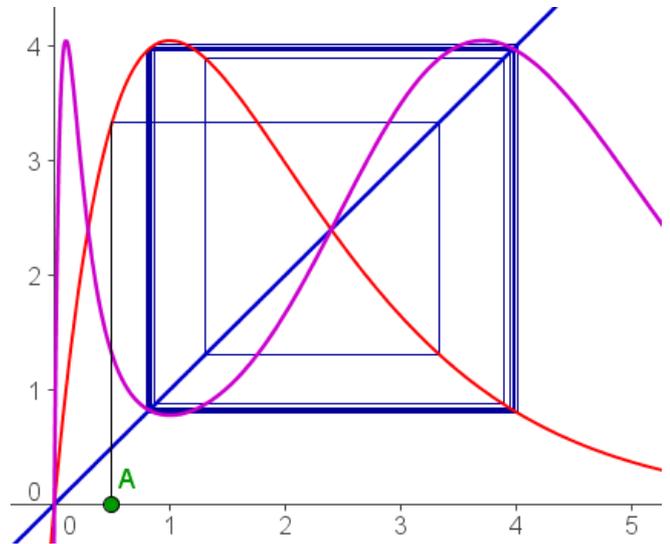


Aufgabe 1 Rekursion und Konvergenz

Betrachtet werden rekursive Folgen mit den Trägerfunktionen f_k mit

$$f_k(x) = k x e^{-x} \quad \text{mit } k > 0, k \in \mathbb{R}$$

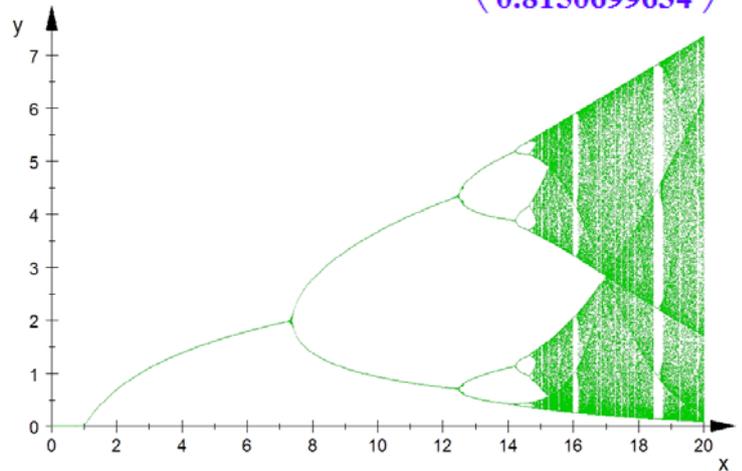
- a) Betrachten Sie f_k als Produkt aus der Geraden $y = k x$ und der e-Funktion und entwickeln Sie daraus die Graphen von f_k . Unterscheiden Sie im Hinblick auf die Rekursion verschiedene Fälle. Begründen Sie an dieser Stelle schon, wo etwa Fixpunkte zu erwarten sind. Gehen Sie auch darauf ein, ob sie anziehend sind oder nicht.
- b) Bestimmen Sie Extrem- und Wendepunkte. Welche besondere Eigenschaft ergibt sich?
- c) Berechnen Sie die Fixpunkte und die Steigungen der Fixpunkt-Tangenten.



- c) Vergleichen Sie mit Ihren Aussagen aus a) und präzieren Sie, bis zu welchem k der rechte Fixpunkt anziehend ist. Welcher Zusammenhang ergibt sich mit b)?
- d) Die rechte Wertetabelle gehört zu obigem Bild, das für $k=11$ erstellt ist. Beziehen Sie beides aufeinander.
- e) Die zusätzlich eingezeichnete Funktion heiße g_k . Welche Bedeutung hat g_k ? Fassen Sie g_k als Trägerfunktion einer bei 0.5 startenden Folge auf und zeichnen Sie oben den Webgraphen dazu genau ein.

0.5
3.335918628
1.305680991
3.892061706
0.8735172388
4.011441366
0.7989990886
3.953102487
0.8346802983
3.984885068
0.8150699634

- f) Rechts sehen Sie das zugehörige Feigenbaumdiagramm. Beziehen Sie Ihre Aussagen aus c) und die Tabelle (für $k=11$) aus d) auf dieses Diagramm.



- g) Diese Wertetabelle entsteht bei Bestimmung eines Fixpunktes von g_k für

0.5
0.6989353193
0.8033254031
0.8212423438
0.821658324
0.8216585395

$k=11$ mit dem Newtonverfahren. Geben Sie dafür einen Ansatz (der genaue Term ist nicht verlangt).

- h) Vergleichen Sie qualitativ die Konvergenzgeschwindigkeit mit der von der Folge aus e). Geben Sie einen Grund für die schnellere Konvergenz an.

- i) **Zusatzfrage**, die sich für Sie lohnt, wenn Sie woanders etwas nicht geschafft haben: Welche besondere Flächeneigenschaft gilt für alle k und ist hier für $k=3$ dargestellt.

