Leuphana Universität Lüneburg Mathematik NAME: Lösung
Erste Staatsprüfung für das Lehramt an Berufsbildenden Schulen **Seite 3/3**
Prof. Dr. Dörte Haftendorn (Mit CAS-Taschenrechner TI-voyage o.ä.) Herbst 2008

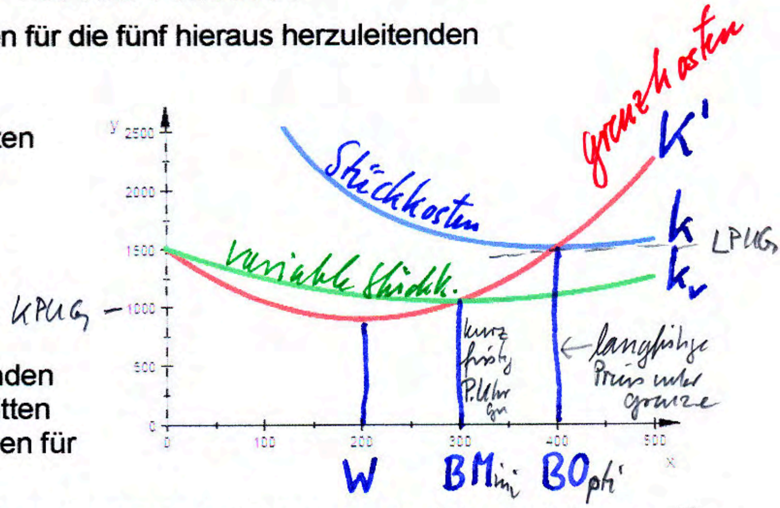
Aufgabe 3 ~~Bewertung~~ Klausuren im Mathematikunterricht

Fall A) Frau Kurz-Bündig hat im Unterricht die entsprechende Begriffe definiert und an Beispielen geübt. Sie formuliert eine Mathematik-Klassenarbeit im Wirtschaftsgymnasium.

Kostenfunktion $K(x)=\frac{1}{200}x^3-3x^2+1500x+160000$.

A a) Stellen Sie die Funktionsgleichungen für die fünf hieraus herzuleitenden Kostenfunktionen auf.

A b) Rechts sind die Grenzkosten, die Stückkosten und die variablen Stückkosten gezeichnet. Ordnen Sie richtig zu und berechnen Sie das Minimum der Grenzkosten, Betriebs-Optimum und ~-Minimum und die kurz~ und langfristige Preisuntergrenze.



Fall B)

Herr Anders hat im Unterricht die Lernenden mit Kostenfunktionen aus Polynomen dritten Grades experimentieren lassen. Sie haben für den Ansatz

$K(x)=a\,x^3+b\,x^2+c\,x+K_f$ folgendes erarbeitet: Wenn w die Wendestelle von K sein sein soll, muss gelten $\boxed{b=-3a\,w}$ und wenn $p:=q\,w$ das Betriebsoptimum sein soll, muss gelten $\boxed{a\,q^2\,w^3\,(2q-3)=K_f}$. Dies steht nun in der Formelsammlung der Schüler.

Er stellt folgende Klassenarbeit.

B a) Im Bild (hier ist es oben) sind die Grenzkosten, die Stückkosten und die variablen Stückkosten gezeichnet. Welcher Graph ist was? Zeichnen Sie die Minimumstelle der Grenzkosten, Betriebs-Optimum und ~-Minimum (alle drei sind volle Hunderter) und die kurz~ und langfristige Preisuntergrenze ein.

B b) Bestimmen Sie damit für $K_f=160000$ die Parameter a und b mit Ihren Formeln.

B c) Lesen Sie Parameter c aus der Zeichnung ab und geben Sie die Kostenfunktion vollständig an. Begründen Sie hier nochmal (es war im Unterricht da), warum c die drei wichtigen Stellen aus B a) nicht beeinflusst.

Fall C)

Frau Tiefenmath hat ähnlich unterrichtet wie Herr Anders. Sie fragt erst wie Frau Kurz-Bündig, also C a)=A a) und C b)= A b), und dann noch Folgendes:

C c) Zeigen Sie, dass bei Polynomen 3. Grades für K mit Wendestelle w das Betriebsminimum immer bei $BM=\frac{3}{2}w$ liegt.

C d) Eigentlich wundert man sich, dass die variablen Stückkosten keinen Pol für x=0 haben, sondern denselben Achsenabschnitt wie K'. Begründen Sie dies entweder für solche Kostenpolynome oder sogar für allgemeinere Kostenfunktionen (de L'Hospital).

Aufgaben ##

Mathematischer Teil: Lösen Sie die Fragen von Herrn Anders, (Rahmenformeln ohne Beweis nehmen) und wenigstens eine der Fragen von Frau Tiefenmath.

Didaktischer Teil. Vergleichen Sie die drei Klassenarbeiten bezüglich

a) der Anforderungsniveaus Reproduktion, Transfer, Problemlösung.
b) der Anpassung an den Unterricht.
c) der Schwierigkeit, eine Punktwertung zu erstellen.
d) späterer Vergleichbarkeit der Noten der drei Klassen.
e) der diagnostischen Aussagekraft für einzelne Schüler.
f) der Eignung der Aufgaben als Teile von Abituraufgaben in Analysis im W-Gymnasium.

Staatsexamen Herbst 08 ③ Klausuren in MU

Fall B $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + K_f$ $\quad K_f$ = Fixkosten, K = Kostenfunktion

$\downarrow :x$

Stückkosten $k(x) = \underbrace{ax^2 + bx + c}_{} + \frac{K_f}{x}$ blauer Graph

$= k_v(x) + k_f(x)$

grüner Graph → variable Stückkosten + fixe Stückkosten.

Grenzkosten $K'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ roter Graph

W = Minimumstelle von K', Minimumstelle der Grenzkosten
= Wendestelle der Kostenfunktion

W = 200 ist abzulesen.

BM = Minimumstelle der variablen Stückkosten k_v
= Schnittstelle von K' und k_v

BM = 300 Betriebsminimum

BO = Schnittstelle von K' und k, Betriebsoptimum

BO = 400

Bb) Formeln $\boxed{b = -3aw}$ $\quad \boxed{p := qw} = BO = 400$

$b = -3 \cdot a \cdot 200 \qquad q \cdot 200 = 400 \Rightarrow q = 2$

$b = -600a$

$a q^2 w^3 (2q - 3) = K_f \qquad a \cdot 4 \cdot 200^3 (4-3) = 160\,000$

$a \cdot 4800 \cdot 1 = 16$

$a = \frac{1}{200} \qquad b = -3$

Bc) $c = 1500$ abgelesen

Kostenfunktion $K(x) = \frac{1}{200}x^3 - 3x^2 + 1500x + 160\,000$

W entsteht als Nullstelle von K'' und darin ist c schon nicht mehr enthalten.

Beim Schnitt von K' und k_v gilt $3ax^2 + 2bx + \cancel{c} = ax^2 + bx + \cancel{c}$

also trägt c zu BM nichts bei. c fällt heraus.

Ebenso geht es mit $K' \wedge k$ und BO

Cc) BM ist der Schnitt von K' mit k_v $\quad 2ax^2 + bx = 0$

$x = 0 \vee 2ax + b = 0$

W erfüllt $K''(x) = 0$ also $6aw + 2b = 0$ $\qquad BM = -\frac{b}{2a} = \frac{-3b}{6a}$

$W = \frac{-b}{3a} \Rightarrow \boxed{BM = \frac{3}{2} w}$

Cd) hier: $K'(0) = c$, $k_v(0) = c$ $\Rightarrow$ (=)

Allg: $k_v(0) = \lim_{x \to 0} \frac{K_v(x)}{x} \overset{}{\underset{LH}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{K_v'(0)}{1} = K_v'(0)$ qed

③ Didaktischer Teil Vergleich der Klausuren

③a Anforderungsniveaus

Reproduktion	Transfer	Problemlösung
Fall A ausschließlich	./.	./.
Fall B tw in a)	a) weil nicht Terme bekannt	
tw in b)	b) weil eigenständig zusammenzufügen	
	c) tw -	c) warum-Frage
Fall C a) b)	evt. wenn schon geübt, wenn c)	freier Beweis
		d) eigenständ. Aktivierung andrer Zusammenhänge

③b Anpassung A passt sicher schon weil es nur Reproduktion ist

B und C scheinen auch zu passen
Bei C könnte auch sein, dass Transfer fehlt.

③c A kann das ganz leicht. Punktwertung erstellen
B fragt auch klar gegliedert, er kann gut eine ↑
C hat etwas Probleme mit der Tatsache, dass d) für diese Polynome leicht ist, aber allgemein sehr anspruchsvoll.

③d Die Noten von A sind völlig unvergleichbar mit B und C. C hat teils dieselben Reproduktionsfragen, das könnte man vergleichen.

③e Diagnose A kann gar nicht merken, wer begabt ist. C weiß hinterher, wer vertieft arbeiten kann aber auch wer noch nicht einmal die Reproduktion schafft
B bietet evt den Schwachen zu wenig Bewährungsmöglichkeit. Wenn er aber die Formeln im Unterricht auch mehrfach angewendet hat, ist da auch eine Aussage für die Schwachen da. Die Guten Sch. findet er gut heraus.

③f Abitur A hat kein Abiturniveau. B und C wären beide denkbar. B bezieht sich sehr auf den Unterricht. für Grundkurs Abitur

Konstruktion von Kostenfunktionen mit glatten Werten für W, BO, BM

Ha Aug 08

$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + K_f$

$K'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ Grenzkosten

$K''(x) = 6ax + 2b$ $\quad K''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{3a}$

Also $\boxed{W = -\frac{b}{3a}}$ Minimumstelle der Grenzkosten

$\boxed{b = -3aW}$

$k(x) = \frac{K(x)}{x} = \underbrace{ax^2 + bx + c} + \frac{K_f}{x}$

$= k_v(x) + k_f(x)$

Stückkosten = variable Stückkosten + fixe Stückkosten

$K' \cap k_v \quad 3ax^2 + 2bx + c = ax^2 + bx + c$

$2ax^2 + bx = 0$

$x = 0 \vee 2ax + b = 0 \quad x = -\frac{b}{2a}$ - BM

$BM = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2}\left(-\frac{b}{3a}\right) = \boxed{\frac{3}{2} W = BM}$

$K' \cap k \quad 3ax^2 + 2bx + c = ax^2 + bx + c + \frac{K_f}{x}$

$(2ax^2 + bx)x = K_f$ wird erfüllt von BO

OBdA $\boxed{BO = qW}$ mit einem q

Also $(2aq^2W^2 + bqW)qW = K_f$

mit $b = -3aW$ $\quad (2aq^2W^2 - 3aWqW)qW = K_f$

$\boxed{aq^2W^3(2q - 3) = K_f}$

$a\, BO^2 W(2q - 3) = K_f$

$a\, BO^2 \cdot \frac{2}{3} BM (2q - 3) = K_f$

Wenn man also Aufgaben konstruiert

1.) Man kann nur W oder BM wählen $\boxed{BM = \frac{3}{2} W}$

2.) Man wählt q und rechnet $\boxed{BO = q \cdot W}$

3.) Man hat noch a frei oder K_f

in $\boxed{aq^2W^3(2q - 3) = K_f}$

4.) mit $\boxed{b = -3aW}$ folgt dann → bei freier Wahl von c die Kostenfunktion.

3 allgemeingültige Sätze für Familie Kostenfkt

$K(x) = K_v(x) + K_f \qquad K'(x) = K_v'(x)$

$\downarrow :x$

$k(x) = \frac{K_v(x)}{x} + \frac{K_f}{x}$

$= k_v(x) + k_f(x)$

$\boxed{\text{Behauptung } K'(0) = k_v(0)}$

Es geht um: $\lim\limits_{x\to 0} k_v(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{K_v(x)}{x} = *$

per def. $K_v(0)=0 \Rightarrow$ l'Hospital anwendbar

$* \underset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{K_v'(x)}{1} = \lim\limits_{x\to 0} K'(x) = \underset{\text{existiert}}{K'(0)} = k_v(0)$

Bei Polynomen 3. Grades für K geht es noch einfacher:

$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + K_f$

$\downarrow :x$

$k(x) = \underbrace{ax^2 + bx + c}_{k_v(x)} + \frac{K_f}{x}$

$k_v(0) = c$

$K'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \qquad K'(0) = c$ } gleich

Beweis von $\boxed{K' \cap k_v = Min(k_v)}$

$k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x}$

$k_v'(x) = \frac{1}{x^2}\left(K_v'(x)\cdot x - K_v(x)\cdot 1\right) = 0 \Leftrightarrow$

$K'(x) \underset{p.d.}{=} K_v'(x) = \frac{K_v(x)}{x} \underset{\text{per def.}}{=} k_v(x)$ q.e.d.

Beweis von $\boxed{K' \cap k = Min(k)}$

$k'(x) = \left(\frac{K(x)}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}\left(K'(x)\cdot x - K(x)\cdot 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow K'(x) = \frac{K(x)}{x} \underset{\text{p.def}}{=} k(x)$ q.e.d.