Universität Lüneburg Mathematik NAME:______________________________

1. Staatsprüfung für das Lehramt an Berufsbildenden Schulen

Prof. Dr. Dörte Haftendorn **September 2004**

Aufgabe 1 Analysis

Es geht um die Iterationen mit den Trägerfunktionen

$$f_k \text{ mit } f_k(x) = x^2 - kx + k$$

a) Zeichnen und berechnen Sie für k=2 und a_0=0,1 die Parabel und die Iterationsfolge in “Web”-Darstellung. Zeichen Sie auch in “Zeit”-Darstellung und beziehen Sie die Zeichnungen aufeinander.

a) Berechnen Sie die Fixpunkte.

b) Skizzieren Sie in der Web-Darstellung wichtige Fälle. Für welche k sind die Fixpunkte anziehend, für welche abstoßend? Was liegt an den Grenzfällen vor?

c) Erläutern Sie das (grundsätzliche) Zustandekommen des Attraktordiagramms (Abb. 1). Deuten Sie darin die Punkte A, B, C und die Geraden, beziehen Sie dieses auf Ihre Ergebnisse aus b)

d) Abbildung 2 zeigt die 2. Iterierte für k=3.4 mit a_0=0,1.

- d1) Wie erhält man die 2. Iterierte?
- d2) Deuten Sie die Darstellung.
- d3) Tragen Sie das Dargestellte in Abb. 1 ein.
- d4) Was nützt Ihnen die Information, dass für $k = 1 + \sqrt{6}$ bei der 2. Iterierten Fixpunkte mit Steigung -1 entstehen?

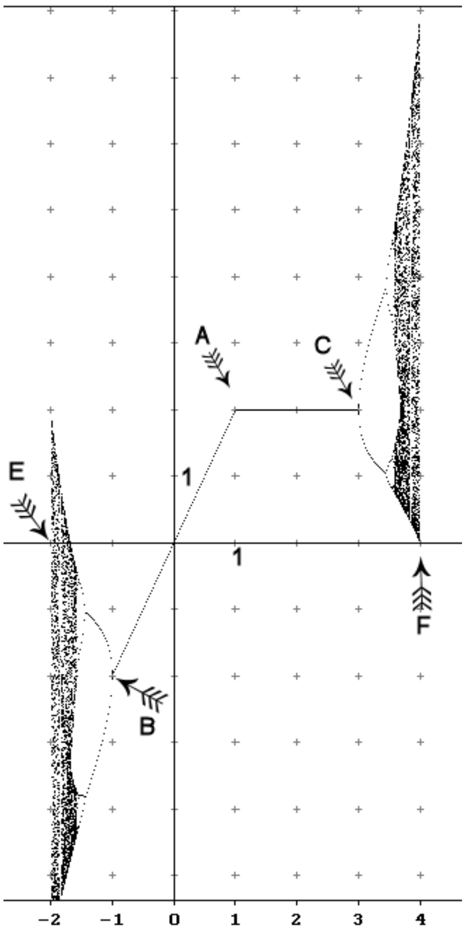

Abbildung 1

e) Bestimmen Sie erläutert die Stellung von E und F, also die Enden des Attraktordiagramms. Als Argumentationshilfe ist in Abb. 3 f_k mit k= -2 und a_0= -0,9 dargestellt.

f) Nehmen Sie Stellung zu dem Satz: “Iterationen an Parabeln eignen sich in der 11. Klasse auch zum Wiederholen von Geraden und Parabeln.” Welche weiteren Lernziele kann man mit diesem Thema anstreben?

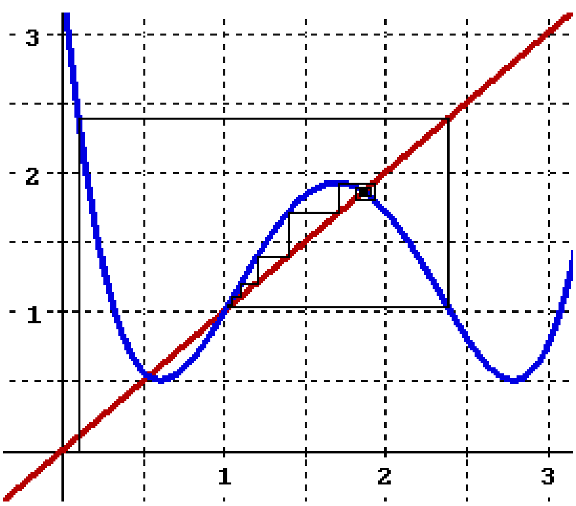

Abbildung 2

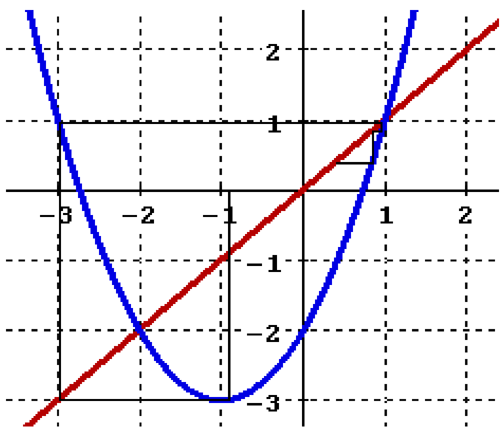

Abbildung 3

Es folgen 2/3 und 3/3.

Aufgabe 2 Analytische Geometrie: Cassinische Kurven

Cassinische Kurven sind die Orte aller Punkte, die von zwei festen Punkten ein konstantes Abstandsprodukt haben. Dieses sei mit a^2 bezeichnet. In der Mittelpunktslage haben die "Brennpunkte" F_1 und F_2 je den Abstand e vom Mittelpunkt. Dann lautet die Gleichung aller Cassinischen Kurven

$$(x^2+y^2)^2-2e^2(x^2-y^2)=a^4-e^4$$

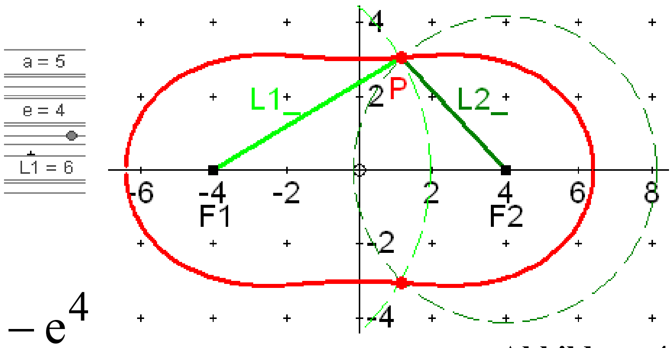

Abbildung 4

a) Leiten Sie diese Gleichung aus der Definition her.

b) Abb. 4 ist in einem DGS (Euklid Dynageo) mit Schiebereglern erzeugt. Wie wird der passende Kreis für L2 konstruiert?

c) Bestimmen Sie für die Cassinischen Kurven die Schnitte mit den Achsen.
Abb. 5 zeigt Cassinische Kurven für e=4 und einige ganzzahlige a. Ordnen Sie begründet zu.

d) Die lila Kurve heißt Bernoullische Lemniskate. Notieren Sie begründet deren implizite Gleichung und leiten Sie daraus ihre Polargleichung $r^2=2e^2\cos(2\varphi)$ her.

e) Bestimmen Sie den von der Lemniskate eingeschlossenen Flächeninhalt.

Flächen-Formel für Polarkoordinaten $A=\frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi$

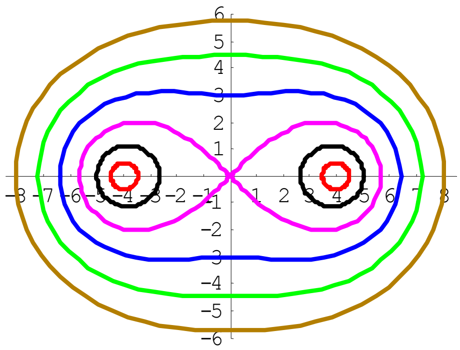

Abbildung 5

f) Bestätigen Sie zeichnerisch, dass die Extrema der Cassinischen Kurven -sofern sie nicht auf der y-Achse liegen- alle auf einem Kreis um O durch die Brennpunkte liegen. Welches muss dann das Maximum der niedrigsten Cassinischen Kurve "ohne Delle" sein und welches ihr Parameter a in Abhängikeit von e?

Es folgt Seite 3/3.

Aufgabe 3 Didaktik: Kurven aus Bausteinen, mehrfache Nullstellen

A) Bausteine : $p(x) = \frac{1}{4}x^2, \quad g(x) = \sin(2\,x)$

Aa) $f(x) = p(x) + g(x)$ Skizzieren p, g und f in Bezug aufeinander in **einem** Koordinatensystem.

Ab) $f(x) = p(x) \bullet g(x)$ Skizzieren p, g und f in Bezug aufeinander in **einem** Koordinatensystem.

Ac) Welche gliedernden und hilfreichen Gesichtspunkte können erarbeitet werden? Hier ist exemplarisch Addition und Multiplikation angesprochen, welche Arten kommen noch in schulischen Zusammenhang vor? Welche wesentlichen Funktionsfamilien sollten den Schülern vertraut sei?

Ad) Äußern Sie sich zu dem didaktischen Sinn eines Unterrichts, in dem die Zusammensetzung von Funktionen aus Bausteinen eine zentrale Rolle spielt. Gehen Sie auf innermathematische und lernpsychologische Argumente und auf den Werkzeuggebrauch (GTR, CAS usw.) ein.

B) Mehrfache Nullstellen

Ba) Skizzieren und beschreiben Sie grob die Graphen der Potenzfunktionen.

Bb) Wieso sind damit auch Funktionen der Bauart $f(x) = (x-a)^k$ vollständig charakterisiert?

Bc) Zeigen Sie an $f(x) = (x+2)^2 x^5 (x-3)^3$ den Begriff der mehrfachen Nullstelle und seinen Einsatz zur Entwicklung eines qualitativen Graphen.

Bd) Für

$$f(x) = (x+2)(x+1)^4 x^3 (x-1)$$

wird von einem Graphenzeichner der Graph in Abb.7 ausgegeben.
Nehmen Sie Stellung, sowohl sachlich als auch im Hinblick auf Mathematikunterricht.

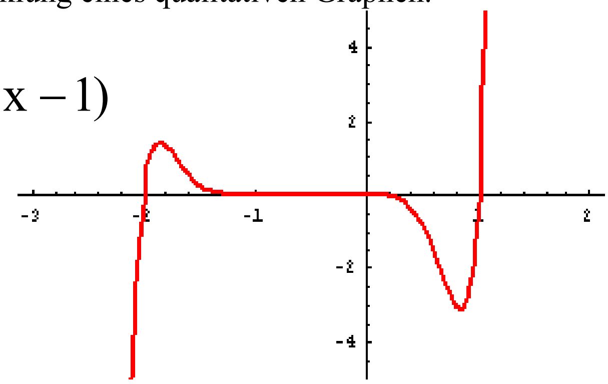

Abbildung 7

Be) Begründen Sie mit dem Konzept der mehrfachen Nullstellen, warum f aus Ab) im Ursprung einen Sattel haben muss.

Bf) Vergleichen Sie das so skizzierte Vorgehen mit der bisher "üblichen" Kurvendiskussion, bei der ein Graph erst am Schluss (hoffentlich) entsteht. Knüpfen Sie an Ihre Argumente in Ad) an und äußern Sie sich zum Sinn von Mathematikunterricht aus Ihrer Sicht.

Anmerkung:
Die Aufgabenteile werden entsprechend ihrem Anspruch und Aufwand mit Punkten bewertet, daher sind die Aufgaben und Aufgabenteile nicht gleich gewichtig. Sie müssen aus den drei Sachgebieten angemessene Anteile bearbeiten. Um Ihnen eine gewisse Schwerpunktsetzung zu ermöglichen, reichen 90% für die Bestnote. Unter dieser Voraussetzung reichen etwa 40% der Punkte um zu bestehen.

Gutes Gelingen!