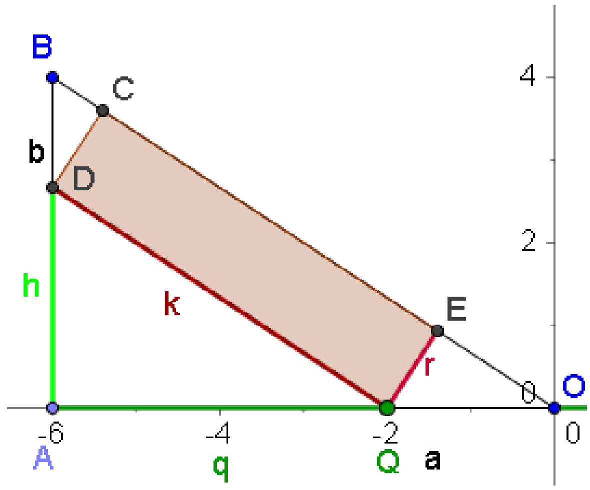
Extremwertaufgaben, Schräges Rechteck

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Uni Lüneburg, Jan 2005 www.uni-lueneburg.de/mathe-lehramt



Variante der Glasrest-Aufgabe:
Aus einem Glasrest AOB soll ein flächengrößtes Rechteck in dieser Lage ausgeschnitten werden.

Zielgröße: 1) F=k*r
Nebenbedingungen:
$a = \overline{AO} \quad b = \overline{AB}$, Variable
$q = \overline{AQ} = x$

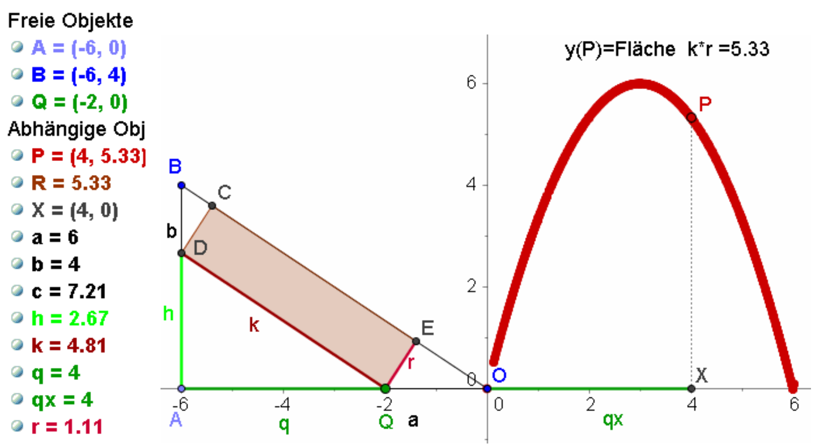
Die sichtbaren Dreiecke sind ähnlich, denn sie sin offensichtlich winkelgleich.
Daher gelten folgende Verhältnisgleichungen:

2) $\frac{h}{q} = \frac{b}{a}$, 3) $\frac{k}{h} = \frac{a-q}{r}$. 3) in 1) ergibt 4) $F = (a-q)\cdot h$, 2) in 4) ergibt die **Zielfunktion** $F(q) = \frac{b}{a}(a-q)\cdot q$, mit $x := q$ also

$$F(x) = \frac{b}{a}(a-x)\cdot x$$

Die Zielfunktion ist also eine nach unten geöffnete Parabel mit den Nullstellen 0 und a, ihr Maximum nimmt sie bei $x_{\max} = \frac{a}{2}$ an. Die maximale Fläche ist somit $F_{\max} = \frac{a\,b}{4}$. Die zugehörigen geometrischen Größen seien h^*, k^*, r^*, für sie gilt wegen des 1. Strahlensatzes $h^* = \frac{b}{2}$, $k^* = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$ und damit

$$r^* = \frac{F_{\max}}{k^*} = \frac{a\cdot b}{2\sqrt{a^2+b^2}}.$$



Interaktive Datei in GeoGebra:

Didaktische Anmerkung:
Günstig ist es, die unabhängige Variable auch waagerecht zu wählen, wie man das dann rechts braucht.
Gerade die Glasrestaufgabe und ihre Varianten können auch Lernende selbst erstellen.

Technisch: mit x kann man Strecken nicht benennen, daher steht hier qx.