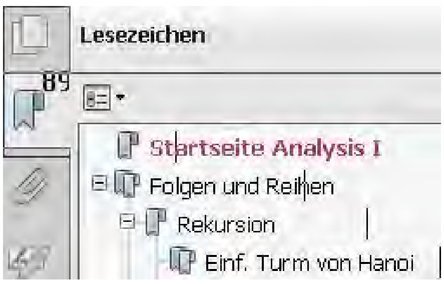
Analysis I

Studiengang: Wirtschaftspädagogik und Berufliche Bildung in der Sozialpädagogik, darin Unterrichtsfach Mathematik

Dieser Studiengang bereitet auf das Lehramt an Fachgymnasien vor und entspricht in den geforderten Abschlusskompetenzen dem gymnasialen Lehramt Mathematik.

Die folgenden Ausführungen sind die Mitschrift und Mappe der
Studentin Jana van der Marel
im Jahr 2009, ihrem zweiten BA-Semester und erstem Mathematiksemester.

Aus Anlass der bevorstehenden Pensionierung von Prof. Haftendorn ist diese Dokumentation von ihr selbst überarbeitet und mit Themen aus der Kohorte von 2011 ergänzt worden. Es besteht ein ausführliches Lesezeichen-Verzeichnis



Dadurch soll nachfolgenden Lehrenden eine solide Information zuteil werden und die Komilitonen können bei der Weiterführung von Analysis hierauf zurückgreifen.
Es handelte sich um eine 5-SWS-Vorlesung mit integrierten Übungen.
Zeitweise konnten wir eine Studentische Hilfskraft bei der Erarbeitung der Computerwerkzeuge (GeoGebra und TI Nspire CAS) einsetzen.
Der CAS-Handheld-Tschenrechner ist auch Klausuren erlaubt. Es kann hier deutlich werden, dass das Rechnen von Hand seinen Stellenwert hat, zum Bestehen einer Klausur aber nicht reicht (für angehende Lehrer schon gar nicht).
Auf der Website: www.mathematik-verstehen.de sind die interaktiven Dateien zu finden, die die Lehre ständig begleiten und zum Verständnis beitragen.
Unten ist das „Lernheft" der Studentin angefügt, es zeigt einen guten Überblick.
Das Verständnis von Analysis wird von der Vorlesung „Mathematik für alle" im 1. Sem. an der Leuphana schon vorbereitet. Dises kann man im Buch lesen:
Dörte Haftendorn: Mathematik sehen und verstehen, Spektrum 2010 ISBN 978 8274 20044-2
www.mathematik-sehen-und-verstehen.de

analysis1-Deckblatt.docx

Verwenden Sie mit Strg F3 das Suchfenster nach Begriffen

Analysis I 30.03.09

Woche nach Pfingsten fällt Mathe aus.

Fraktale Geometrie → Rekursion (www.Mathematik-verstehen.de)

Rekursion

recurrere

rekurre = zurück laufen

Turm von Hanoi (Lucas)

n Scheiben a_n Umlegungen mind.

Iteration („wiederum")

n	a_n
0	0
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63
7	127
8	255

(· 2 und + 1)

$$\boxed{\begin{aligned} \Rightarrow a_{n+1} &= a_n + 1 + a_n \\ &= 2a_n + 1 \end{aligned}}$$

Rekursive Folge (zurücklaufende)

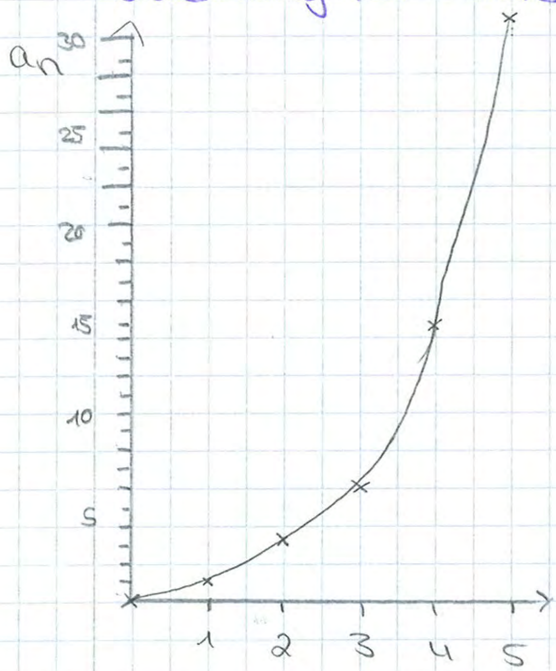
a_n Potenzen von $2^x - 1$. (1 unter 2er-Potenz)

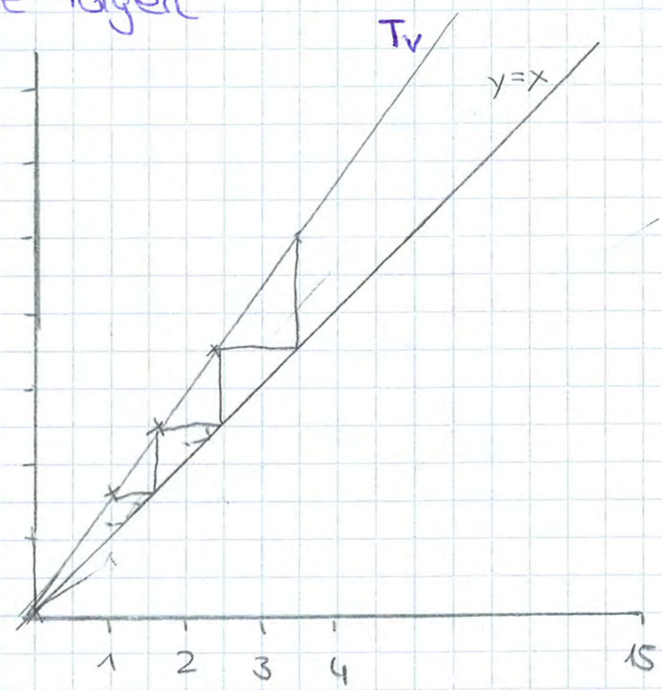
↳ $\boxed{a_n = 2^{n} - 1}$ (⇐ Vermutung)

explizite Folge (ausdrückliche)

(Nachtrag Beweis: Vollständige Induktion !)

Darstellung für rekursive Folgen





$y = 2x + 1$

x	y
1	3
3	7
7	15
15	31

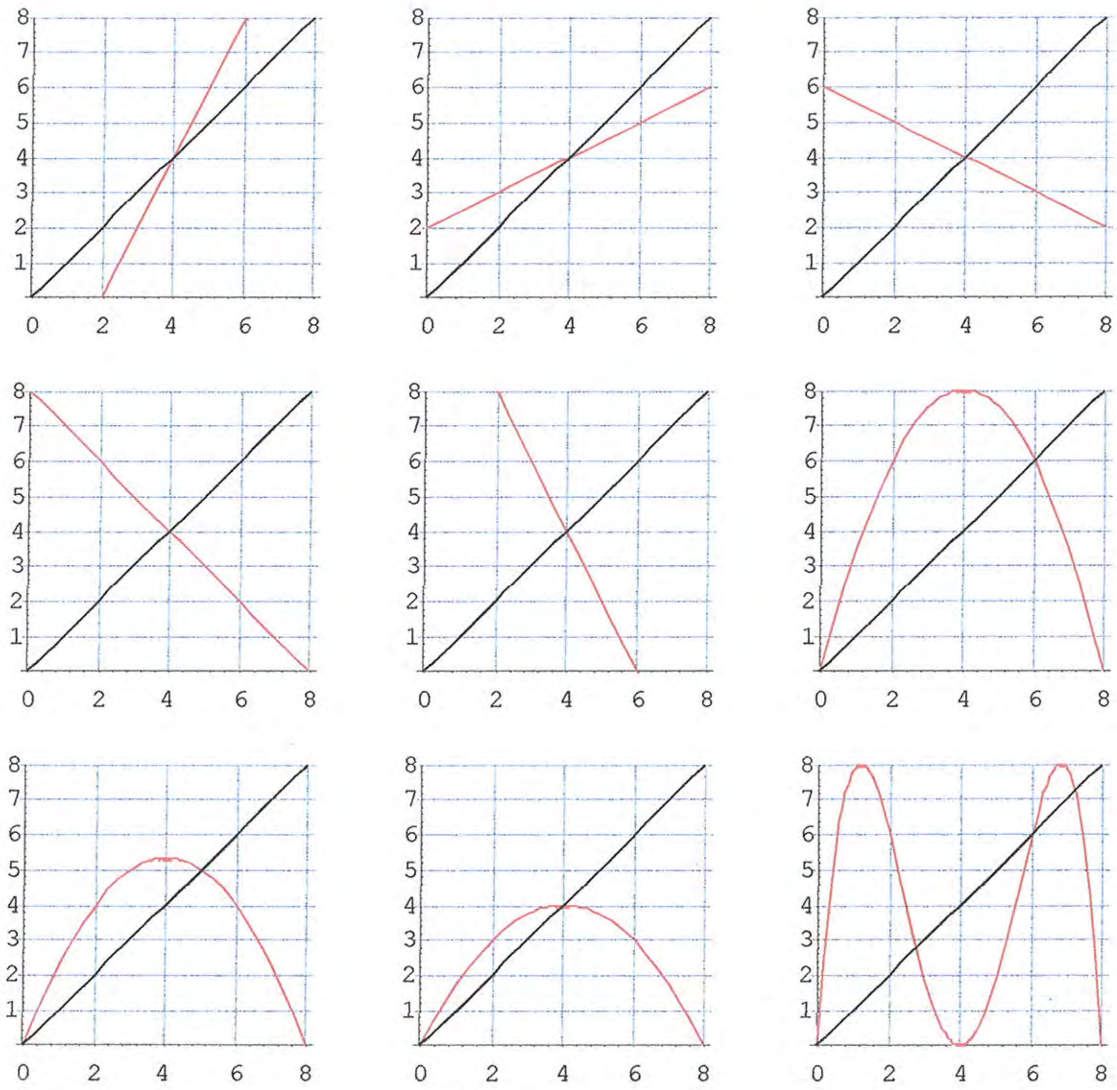
T_v = Trägerfunktion (ausdrücken)

(siehe Zettel)

30.03.09
1. Std.

Chaos und Fraktale Rekursion Erste Erfahrungen

Prof. Dr. Dörte Haftendorn www.uni-leuneburg.de/mathe-lehramt 1996/ 02 /05



$f_1(x) = 2x - 4$	$f_2(x) = \frac{1}{2}x + 2$	$f_3(x) = -\frac{1}{2}x + 6$
$f_4(x) = -x + 8$	$f_5(x) = -2x + 12$	$f_6(x) = \frac{1}{2}x\,(8 - x)$
$f_7(x) = \frac{1}{3}x\,(8 - x)$	$f_8(x) = \frac{1}{4}x\,(8 - x)$	$f_9(x) = \frac{1}{2}f_6(x)\,(8 - f_6(x))$

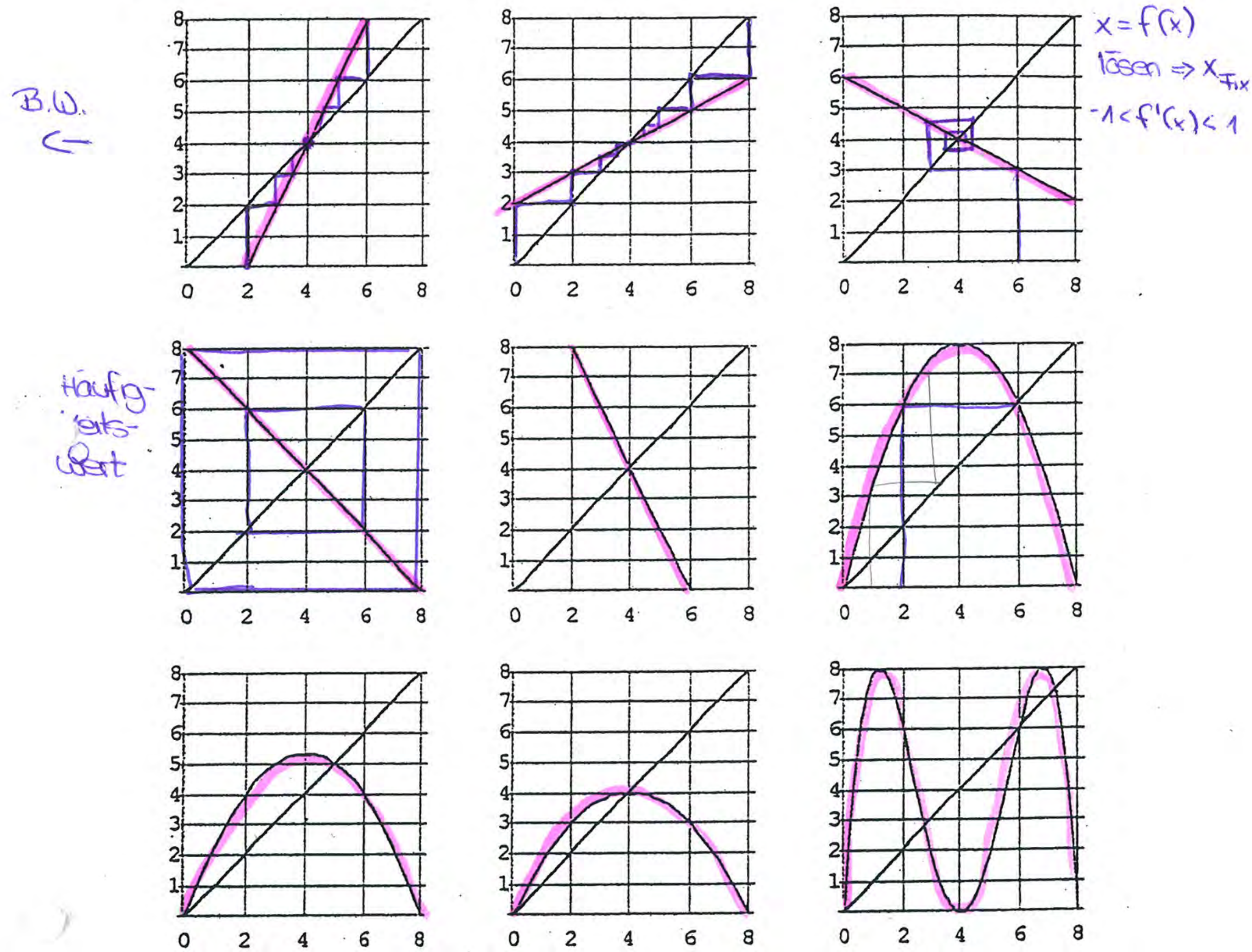
Gezeichnet sind die **Trägerfunktionen** für entsprechende **rekursiv definierte Folgen.**
Es gilt $a_{n+1} = f(a_n)$. Als Startwert a_0 kann jeder Wert genommen werden. In diesen Zeichnungen sollte er zwischen 0 und 8 liegen.
Zeichnerisches Verfahren: Starte bei dem gewählten a_0. Wiederhole oft:

senkrecht zur Kurve, waagerecht zur Winkelhalbierenden

Rechnerisches Verfahren: Starte bei dem gewählten a_0. Berechne a_1 mit der Formel, notiere und speichere a_1. Berechne a_2 mit der Formel, notiere und speichere a_2. Und so weiter.

Chaos und Fraktale ⏩ Rekursion ⏪

Dr. Dörte Haftendorn Erste Erfahrungen 21. November 1996



$f_1(x) = 2x - 4$	$f_2(x) = \frac{1}{2}x + 2$	$f_3(x) = -\frac{1}{2}x + 6$
$f_4(x) = -x + 8$	$f_5(x) = -2x + 12$	$f_6(x) = \frac{1}{2}x(8 - x)$
$f_7(x) = \frac{1}{3}x(8 - x)$	$f_8(x) = \frac{1}{4}x(8 - x)$	$f_9(x) = \frac{1}{2}f_6(x)(8 - f_6(x))$

Gezeichnet sind die **Trägerfunktionen** für entsprechende **rekursiv definierte Folgen.**
Es gilt $a_{n+1} = f(a_n)$. Als Startwert a_0 kann jeder Wert genommen werden. In diesen Zeichnungen sollte er zwischen 0 und 8 liegen.

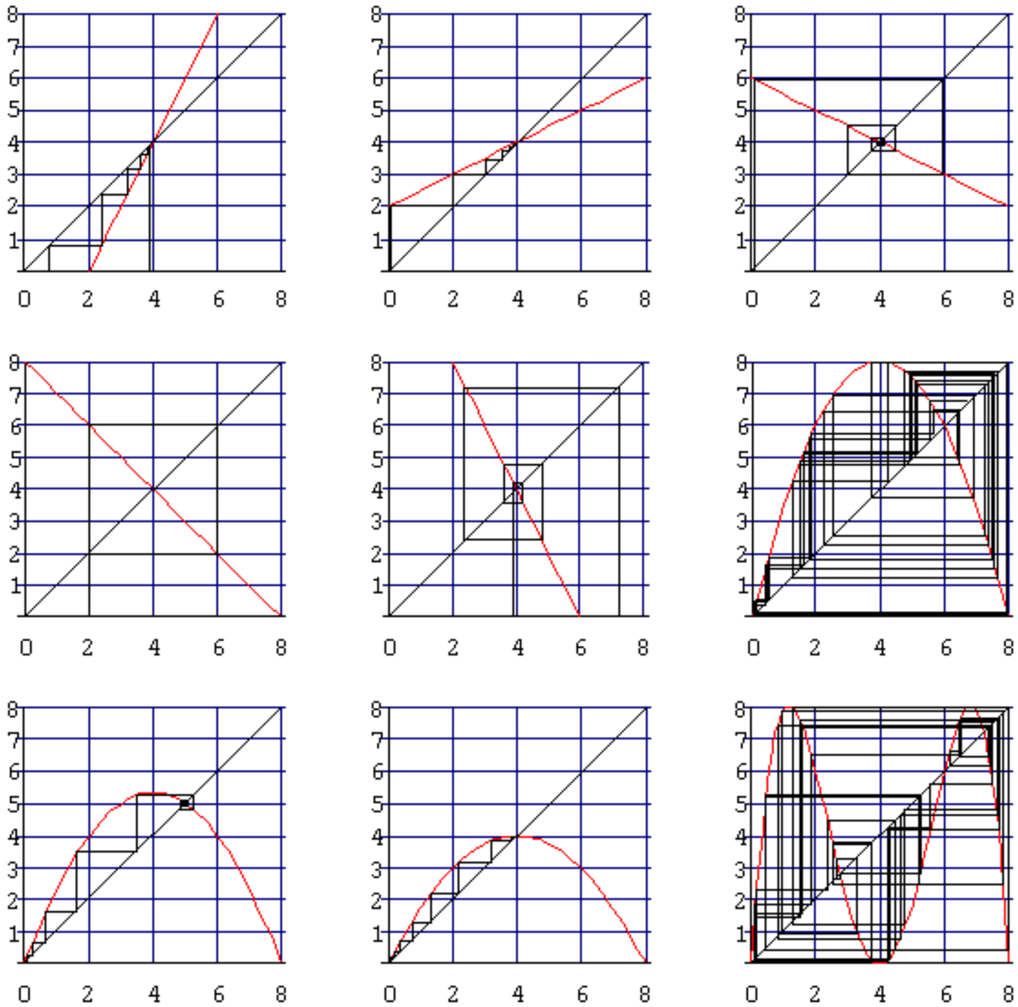
Zeichnerisches Verfahren: Starte bei dem gewählten a_0. Wiederhole oft:

senkrecht zur Kurve, waagerecht zur Winkelhalbierenden

Rechnerisches Verfahren: Starte bei dem gewählten a_0. Berechne a_1 mit der Formel, notiere und speichere a_1. Berechne a_2 mit der Formel, notiere und speichere a_2. Und so weiter.

Chaos und Fraktale Rekursion Lösungen

Prof. Dr.D rrte Haftendorn www.uni-leuneburg.de/mathe-lehramt 1996/ 02 /05



$a_{n+1}=f_1(a_n)=2a_n-4$	$a_{n+1}=f_2(a_n)=\frac{1}{2}a_n+2$	$a_{n+1}=f_3(a_n)=-\frac{1}{2}a_n+6$
$a_{n+1}=f_4(a_n)=-a_n+8$	$a_{n+1}=f_5(a_n)=-2a_n+12$	$a_{n+1}=f_6(a_n)=\frac{1}{2}a_n(8-a_n)$
$a_{n+1}=f_7(a_n)=\frac{1}{3}a_n(8-a_n)$	$a_{n+1}=f_8(a_n)=\frac{1}{4}a_n(8-a_n)$	$a_{n+1}=f_9(a_n)=\frac{1}{4}f_6(a_n)(8-f_6(a_n))$

{{f1, {3.9, 3.8, 3.6, 3.2, 2.4, 0.8, -2.4, -8.8}},
{f2, {0.1, 2.05, 3.025, 3.5125, 3.75625, 3.87812, 3.93906, 3.96953}},
{f3, {0.1, 5.95, 3.025, 4.4875, 3.75625, 4.12187, 3.93906, 4.03047}},
{f4, {0.1, 7.9, 0.1, 7.9, 0.1, 7.9, 0.1, 7.9}},
{f5, {3.9, 4.2, 3.6, 4.8, 2.4, 7.2, -2.4, 16.8}},
{f6, {0.1, 0.395, 1.50199, 4.87997, 7.61283, 1.47373, 4.80899, 7.67277}},
{f7, {0.1, 0.263333, 0.679107, 1.65722, 3.5038, 5.25126, 4.81145, 5.11385}},
{f8, {0.1, 0.1975, 0.385248, 0.733393, 1.33232, 2.22087, 3.20867, 3.84345}},
{f9, {0.1, 1.50199, 7.61283, 4.80899, 1.25538, 7.97273, 0.428873, 5.17619}}}

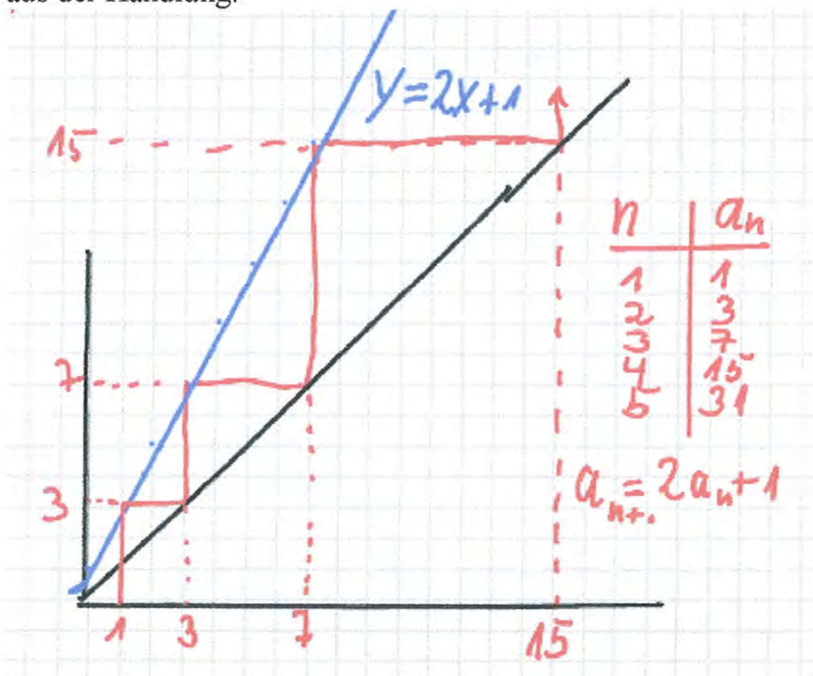
WWW
Ha

Rekursion

Einführendes Beispiel kann ein möglichst handlungsorientiertes Problem sein, das auf eine "rekursive Formel" führt.
Es eignet sich der Turm von Hanoi (3 Stangen, n Scheiben...)

$$a_{n+1} = a_n + 1 + a_n = 2a_n + 1$$

Man legt n+1 Scheiben um, indem man n Scheiben umlegt, dann die größte Scheibe platziert und dann wieden n Scheiben in a_n Schritten auf diese legt. Die rekursive Formel ergibt sich aus der Handlung.



n	a_n
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31

$a_{n+1} = 2a_n + 1$

Die "Treppchen-Darstellung" wird daraus entwickelt.
Vorgehen: Schreibe zu der rekursiven Formel die "entsprechende Trägerfunktion" auf (kurz **Kurve** genannt) und zeichne sie zusammen mit der Winkelhalbierenden (**Wh**).
Mache dir klar, dass sich die Folgenwerte graphisch ergeben aus:
Von Start zur nach oben zur Kurve
Waagerecht zur Wh, senkrecht zur Kurve
Waagerecht zur Wh, senkrecht zur Kurve
und so weiter....

Die Formeln mit denen man a_{n+1} aus a_n berechnet heißen **rekursive Formeln** (lat: recurrere=zurücklaufen).
Wenn man die Folgenwerte von einem Startwert ausgehend nacheinander berechnet, **geht man iterativ vor** (lat.:iterum=wiederum).
Entsprechend sind **Rekusion** und **Iteration** verschiedene Sichtweisen auf dasselbe Problem. Ein wirklich **rekursives Vorgehen** ist für Computer auch möglich. Das kann man besonders gut bei den "Weg-Fraktalen und Lindemayersystemen" und bei den IFS-Fraktalen sehen.
Bei den "Mandelbrot- und Juliamengen" und beim Lorenzattraktor (und Verwandten) geht man iterativ vor.

WWW
Ha

a **ist Fixpunkt, wenn gilt** $a=f(a)$

Der Fixpunkt a ist

anziehend, wenn gilt $|f'(a)| < 1$

abstoßend, wenn gilt $|f'(a)| > 1$

unklarer Art, wenn gilt $|f'(a)| = 1$

Warum Rekursion?

- Rekursive Formeln sind "dicht an den Problemen"
  Siehe Turm von Hanoi, alle Wachstumsvorgänge, viele numerische Verfahren...
- Sie können oft von Schülern und Studierenden selbst gefunden werden. Das gilt von den expliziten Formeln nur selten.
- Die graphische Darstellung einer rekursiven Folge mit Hilfe der Trägerfunktion im "Spinnweb-Verfahren"
  - ist leicht verständlich
  - lässt sich leicht qualitativ von Hand durchführen
  - lässt sich leicht anschaulich mit Computern durchführen
  - erlaubt eine "natürliche" Fundierung des Grenzwertes
  - ist mathematisch sehr ergiebig und aussagekräftig
  - gibt echten Anlass zu der Frage, wie steil eine Kurve in einem Punkt ist
  - erlaubt auch reichhaltige Aufgabenstellungen, in denen "gelerntes Handwerk" gezeigt werden kann
- Die Betrachtung der Attraktor-Diagramme (=Feigenbaumdiagramme)
  - ist in der Lehre recht leicht erreichbar und dennoch von einer noch nicht ausgeloteten mathematischen Tiefe
  - ermöglicht mit Computern eigenständiges Erkunden der Lernenden
  - ermöglicht die Abtastung der Grenzen der Computer
  - vermittelt eine Einsicht in typische Probleme der Numerik
  - beleuchtet den Grenzwertbegriff durch Darstellung von mehreren Häufungswerten und chaotischem Verhalten
  - erzeugt ein wünschenswertes "Mathematik-Bild"

31.03.09
2. Std.

WWW Ha

Definition: Eine Folge heißt ***streng rekursiv***, wenn $a_n = f(a_{n-1})$ gilt.
f soll sonst nur Konstanten enthalten. Jedes gegebene a_0 definiert zusammen mit der rekursiven Formel eine neue Folge. Dann gibt es die ***Trägerfunktion f*** der Folge, deren Funktionsterm durch Einsetzen von x anstelle der Folgenglieder entsteht.

a ist Fixpunkt, wenn gilt *a=f(a)*

Der Fixpunkt a ist
anziehend, wenn gilt $|f'(a)|<1$
unklarer Art, wenn gilt $|f'(a)|=1$
abstoßend, wenn gilt $|f'(a)|>1$

Beispiel Logistische Parabel

$a_n = r \cdot a_{n-1} \cdot (1-a_{n-1})$ hat die Trägerfunktion $f(x) = r \cdot x \cdot (1-x)$

Sei r>0. Wichtig ist das Intervall [0,1]. Startwerte sollen in diesem Intervall liegen.

Fragen:

- Welche Fixpunkte hat $\{a_n\}$?
- Welche Steigung hat f_r in den Fixpunkten?
- Für welche r gibt es zwei / einen / keinen anziehenden Fixpunkt im Intervall [0,1]?
- Für welches r hat die Parabel den maximalen Wert 1? Was bedeutet es für die Folge, wenn r noch größer wird?
- g mit $g(x) = f\left(f(x)\right) = \left(f \otimes f\right)(x)$ heißt die zweifach Iterierte von f.

Welches ist die zweifach Iterierte der logistischen Parabel, welchen Graphen hat sie? (Z.B. für r=3,5) Untersuchen Sie möglichst mit CAS, (Computer-Algebra-System oder Graphikzeichner), welche Wirkung r auf die zweifach Iterierte hat und überlegen Sie, was das für die Folgen bedeutet.

Weitere Beispiele lassen sich leicht finden. Man braucht lediglich eine von einem Parameter abhängige Kurvenschar, die für irgendwelche Parameterwerte die Winkelhalbierende schneidet. Wenn dann die Steigung im Schnittpunkt sowohl Werte annimmt, die betragsmäßig kleiner 1 sind, als auch solche, die betragsmäßig größer als 1 sind, dann gibt es alle an der logistischen Parabel beobachteten Phänomene, insbesondere auch ein Attraktor-Diagramm (=Feigenbaum-Diagramm) mit Bifurkationskaskade. Das beste schulgemäße Werkzeug hierfür ist Turboplot www.turboplot.de , beschrieben auch in www.uni-lueneburg.de/mathe-lehramt.
Insbesondere können Lernende selbst solche Kurven erfinden und erkunden.
Besonders einfach sind Parabelscharen, aber auch Heron-Verfahren, rekursiv formulierte Schnittprobleme wie $x = r \cdot \cos(x)$ u.s.w.

Chaos und Fraktale Logistische Parabel Zwei Rekursionsdarstellungen

Prof. Dr. Dörte Haftendorn www.uni-lueneburg.de/mathe-lehramt Nov. 1996, Apr. 2005

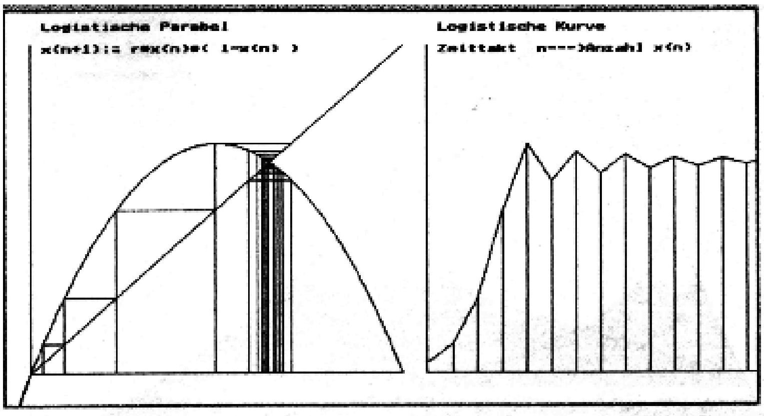
Logistische Parabel

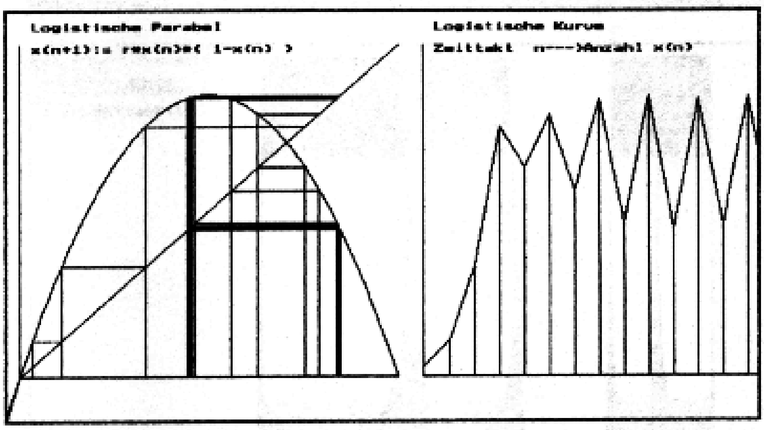
$$a_n = r \cdot a_{n-1} \cdot (1 - a_{n-1})$$

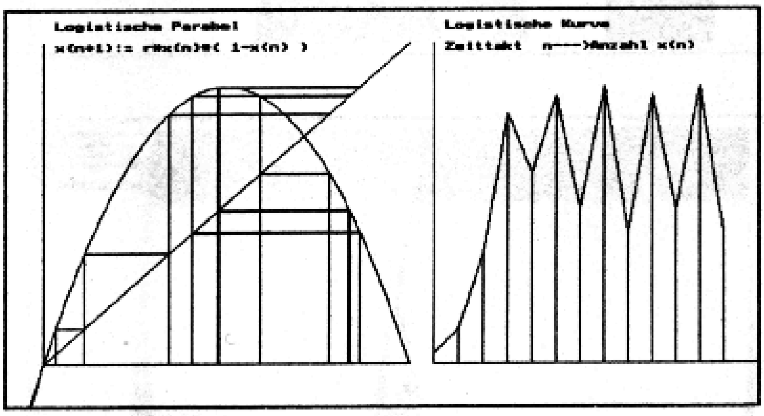
$$f(x) = r \cdot x \cdot (1 - x)$$

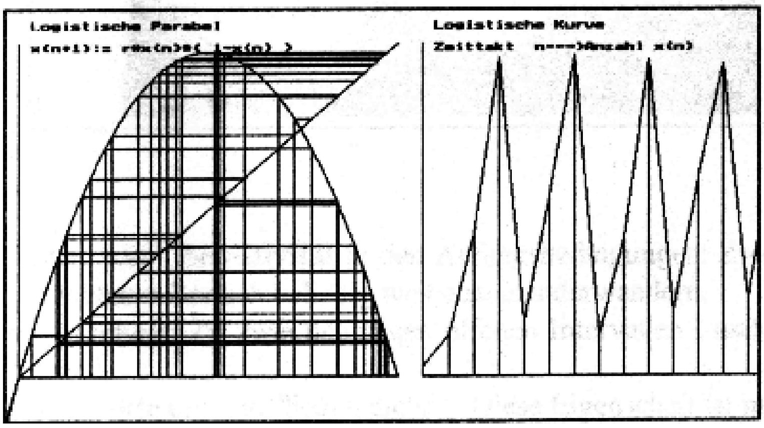
f ist die Trägerfunktion für die rekursive Folge a_n.

Die **logistische Gleichung** beschreibt viele Vorgänge in Natur und Technik. Insbesondere in der Biologie kann man a_n deuten als Bevölkerungszahl z.B. einer Mäusepopulation in einem begrenzten Lebensraum. Der Parameter **r** ist dann aus Geburten- und Sterberate zusammengesetzt, mit **n** ist die Zyklus-Zeit, etwa Wochen, gemeint. Die logistische Gleichung sagt dann aus, dass die Bevölkerungszahl proportional ist zum Produkt aus (momentaner) Bevölkerungszahl und "Abstand" von der Bevölkerungsgrenze.









Wie sich die Folge verhält, wird rechts auf zwei Arten dargestellt. Links ist a_n über a_{n-1} aufgetragen. Man nennt die Darstellung auch **Spinnwebverfahren,** Web-Darstellung, Phasendiagramm.

Man startet bei beliebigem a_o und zeichnet immer abwechselnd senkrecht zur Kurve und waagerecht zur Winkelhalbierenden.

Rechts sind die so zustandegekommenen Bevölkerungszahlen über der Zeit n aufgetragen.

Das Verhalten der Folge wird im Wesentlichen von dem Parameter r beeinflusst.

Für 0<r#1 konvergiert die Folge gegen 0.

Für 1<r#3 konvergiert die Folge gegen den rechten Schnittpunkt mit der Winkelhalbierenden. Er ist dann anziehender Fixpunkt. Das ist er nämlich genau solange, wie die Steigung von f im Schnittpunkt betragsmäßig kleiner ist als 1. Für r#1 schneidet die Parabel rechts nicht.

Für 3<r treten zuerst mehrere Häufungspunkte auf, ab r=3,57 verhält sich die Folge chaotisch.

Chaos und Fraktale Feigenbaum-Szenario bei der logistischen Parabel

Prof. Dr. Dörte Haftendorn www.uni-lueneburg.de/mathe-lehramt 21. Nov.1996, Apr. 05

Das Feigenbaum-Szenario

wurde von Mitchel Feigenbaum in den 70-iger Jahren zuerst untersucht.

Auf der Hochachse ist von oben nach unten der Parameter r für die logistische Gleichung in einem vorher gewählten Bereich aufgetragen. Die Rechtsachse hat x-Werte zwischen 0 und 1.

Für jedes r aus dem Bereich entsteht eine Pixelzeile des Bildes. Es werden 100 Iterationen “m Dunkeln” gerechnet, für die nächsten 100 Iterationen wird ein Punkt in die Zeile gezeichnet. Wenn die Folge für dieses r konvergiert, sieht man nur das 200ste Pixel.

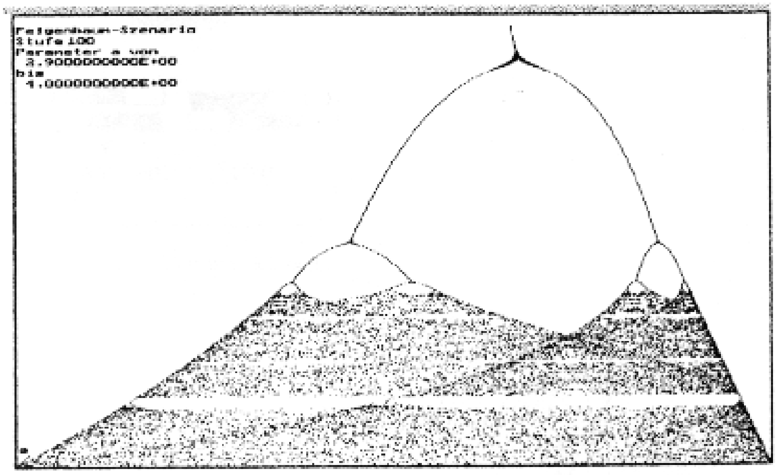
Beim oberen Bild geht r von 2,9 (oben) bis 4 (unten). Bei r=3 tritt die erste **Bifurkation** auf. Man sieht für die nun folgenden r das 199ste und 200ste Pixel. Es liegen zwei Häufungswerte vor, bis r auf 3,449489... angewachsen ist.

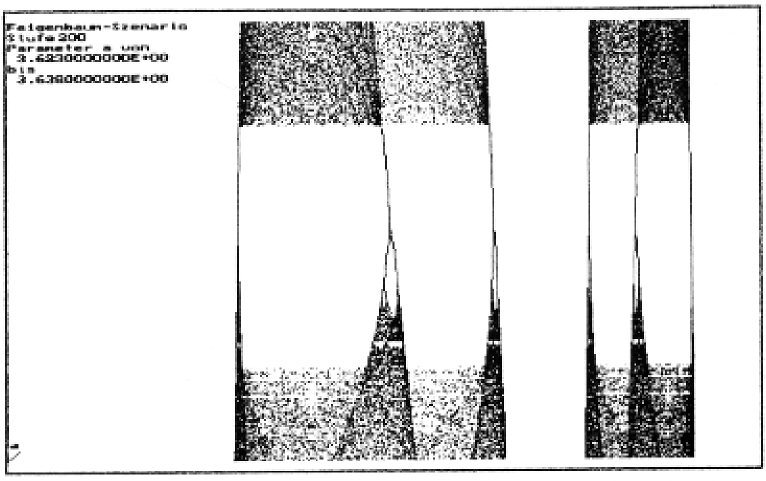
Diesen genauen Wert für r kann man aus den Schnitt-Steigungen der 2. Iterierten von f gewinnen.

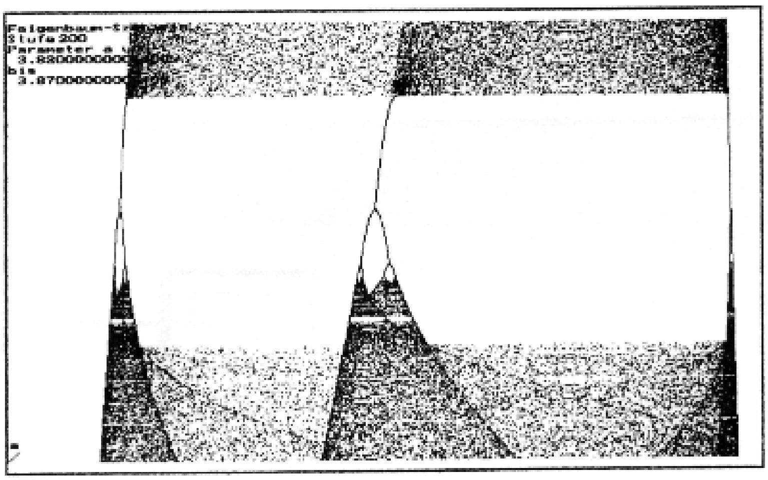
Es folgt eine **Bifurkationskaskade,** das Verhältnis der r-Abstände konvergiert gegen eine mathematische universelle Konstante, die **Feigenbaum-Konstante *=4,6692016091....**

Der Eintritt ins Chaos erfolgt bei r=**3,5699456**... Das ist hier daran sichtbar, dass die gezeichneten Pixel von Nr. 101 bis 200 als breites Band sichtbar werden.

In dem chaotischen Bereich gibt es aber immer wieder **Inseln der Ruhe**. In ihnen sind zunächst wieder wenige Häufungspunkte zu sehen. Deren Zahl ist nun aber keine reine Zweierpotenz mehr. Dann folgt wieder eine Bifurkationskaskade und erneuter Eintritt ins Chaos.







Mathematisches Chaos ist gekennzeichnet durch **Sensitivität** in den Anfangsbedingungen: Zwei beliebig dicht startende Punkte können im betrachteten Bereich beliebig weit auseinander wandern.

Mathematisches Chaos hat die **Mischungseigenschaft:** Zu zwei beliebigen offenen Intervalln I und J kann man in J Punkte finden, die in I gestartet sind.

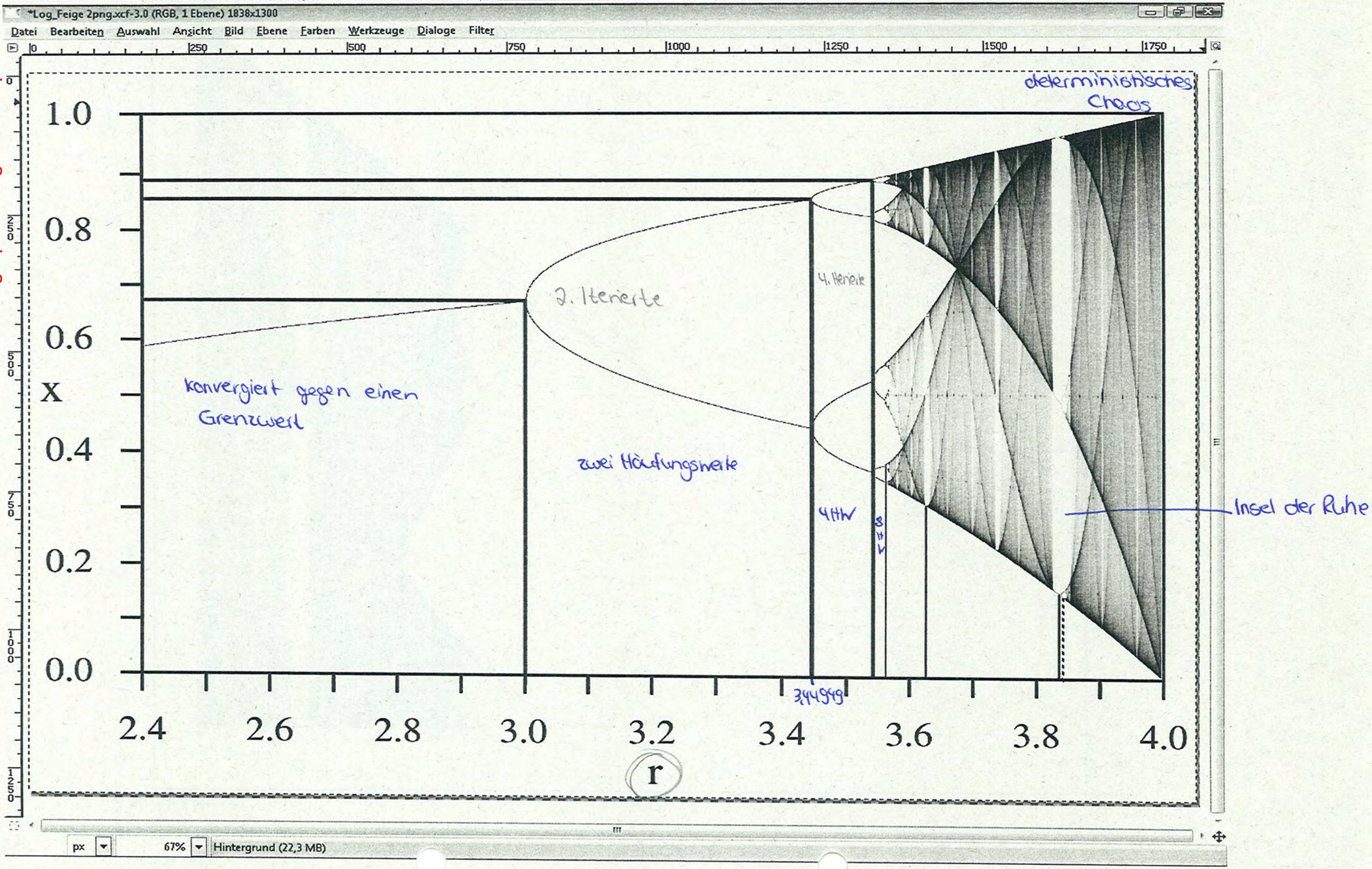
In mathematischem Chaos gibt es **periodische Punkte** und die “liegen dicht”. Diese Eigenschaft ist mit Computern nicht zu prüfen. Sie geht in der Rechenungenauigkeit unter.

Seite, die ein Student für Afd erstellt hatte. Gutes Werkzeug für Feigenbaumdiagramm und freie Zooms daraus ist unser lizensiertes Programm Turboplot.

graphen-feigenbaum.pdf

Autor : Nils Löhr, Student im Kurs „Angewandte Fachdidaktik“ zu Übung „ Analysis I, Rekursion , **Feigenbaumdiagramm zur logistischen Parabel.** $f(x) = rx\,(1-x)$

verantwortlich Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, www.mathematik-verstehen.de im Berech Fraktale---> Rekursion 20. April 2009



31.03.09
2. Std.

Rekursive Folgen Parabel-Beispiel

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Uni Lüneburg, 27. April 2003 parabel-beispiel.pdf

$$f(x) = -a(x-2)^2 + 4$$

Suchen Sie die gezeigten Eigenschaften
zu beschreiben und
mit Zahlen zu versehen.
Erkunden Sie in Turboplot,
rechnen Sie, was Sie können auch genau aus.

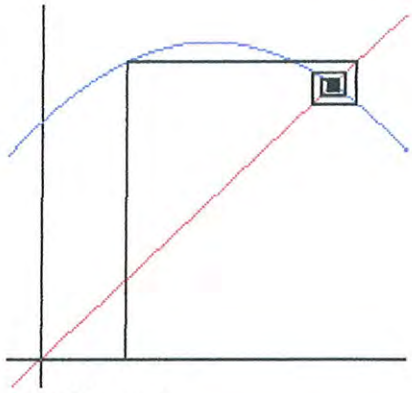


Abbildung 1

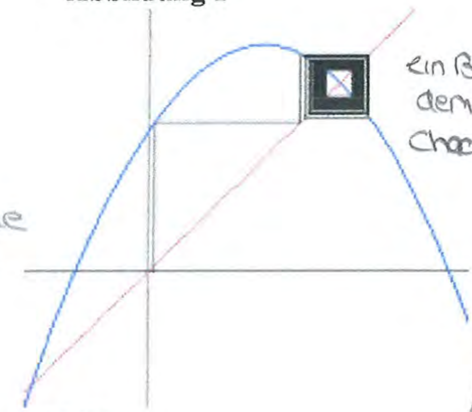


Abbildung 2

ein Bereich in dem die Folge chaotisch wird.

(*) 1 Fixpunkt -> wird abstoßend -> 2 neue anziehende FP -> werden abstoßend -> 4 neue FP entstehen

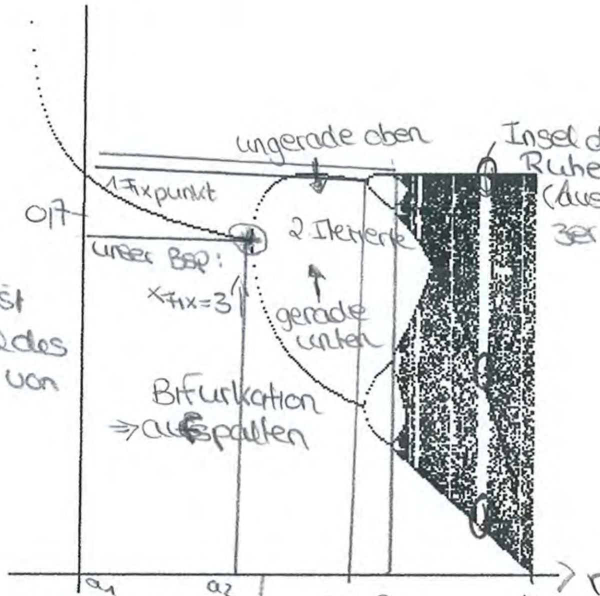


Abbildung 3

$a_3 \to a_4$ ist ein Viertel des Abstandes von $a_1 \to a_2$

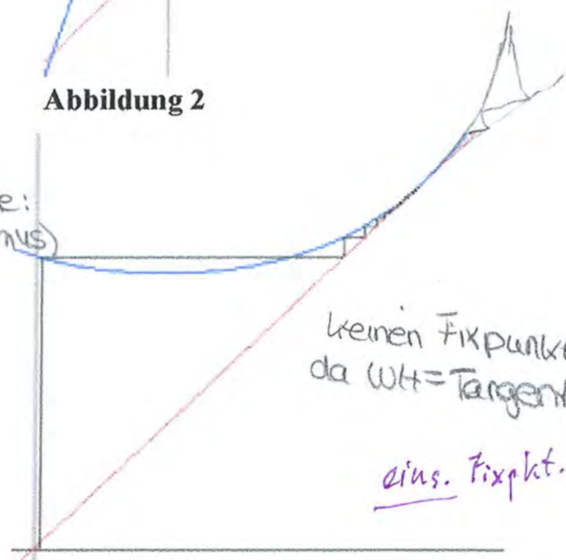


Abbildung 4

keinen Fixpunkt da WH = Tangente!

eins. Fixpkt.

Feigenbaumdiagramm (Mitchel)
[Attraktor-]
Entstehung:

von 2 -> 4 -> 8 -> 16 -> 32 -> ....

-> Bifurkationskaskade (Wasserfall)

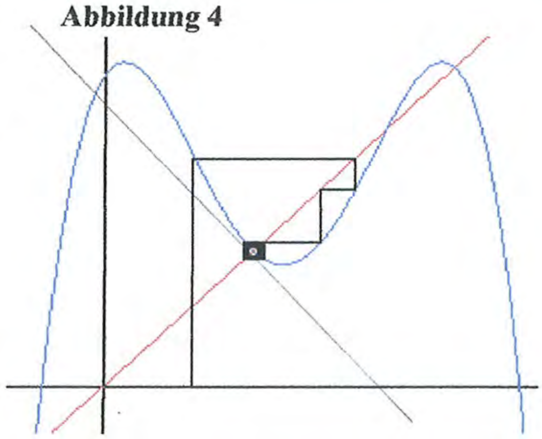


Abbildung 5

Iterierte: für x noch mal die Fkt. ansetzen:

z.B. $-a \cdot [(-a \cdot (x-2)^2 + 4) - 2)^2 + 4$

Inseln d. Ruhe: hier 3 Fäden -> 3 Iterierte trifft mit ihren Min. 3x die WH -> ab dort ein 3er Rythmus. Es hört bei r=4 auf, weil das Folgenglied unter der x Achse auf den Graphen trifft und die anderen Glieder so nach unten links weggehen

Jana v. d. Harel 12.4.09

Rekursive Folgen - Parabel - Bsp.

$$-a(x-2)^2+4 \iff -a(x^2-4x+4)+4$$
$$\iff -ax^2+4ax-4a+4$$

$f(x)=x$

$$-ax^2+4ax-4a+4 = x \quad |-x$$
$$-ax^2+4ax-4a+4-x = 0 \quad |+4a-4$$
$$-ax^2+4ax-x = 4a-4$$
$$-ax^2+x(4a-1) = 4a-4 \quad |:-a$$
$$x^2-\frac{x(4a-1)}{a} = \frac{4a-4}{-a}$$
$$\underbrace{x^2-\frac{(4a-1)}{a}x+\left(\frac{4a-1}{2a}\right)^2}_{\left(x-\frac{4a-1}{2a}\right)^2} = \frac{4a-4}{-a}+\frac{(4a-1)^2}{4a^2}$$

gleichnamig machen

$$= \frac{-4a(4a-4)+(4a-1)^2}{4a^2}$$
$$= \frac{-16a^2+16a+16a^2-8a+1}{4a^2}$$
$$\left(x-\frac{4a-1}{2a}\right)^2 = \frac{8a+1}{4a^2}$$

Abbildung 1 zeigt einen anziehenden Fixpunkt, genau wie Abb. 4. Abbildung 3 zeigt ein Feigenbaumdiagramm. Der obere „Arm" zeigt die ungeraden, und der untere „Arm" zeigt die geraden Werte. Die Aufspaltung wird auch Bifurkation genannt. Die zwischendurch entstehenden Freiräume werden Inseln der Ruhe genannt. Abb. 5 zeigt die 2-fach Iterierte.

Seite aus der Übung (Studi)

Rekursive Folgen

$f(x) = -a\,(x-2)^2 + 4$ → Parabel in Scheitelpunktform

$f(x) = -ax^2 + 4ax - 4a + 4$

$g(x) = x$ → Die Winkelhalbierende

1. **Berechnung der Fixpunkte**

Ansatz: $f(x) = g(x)$

$-ax^2 + 4ax - 4a + 4 = x \qquad | -x, +4a, -4$

$-ax^2 + 4ax - x = 4a - 4 \qquad |$ x ausklammern

$-ax^2 + (4a-1)\,x = 4a - 4 \qquad | : (-a)$

$x^2 - \left(\frac{4a-1}{a}\right)x = \left(\frac{4a-4}{-a}\right) \qquad | + (\ldots)^2$ quadratische Ergänzung

$x^2 - \left(\frac{4a-1}{a}\right)x + \left(\frac{4a-1}{2a}\right)^2 = \left(\frac{4a-4}{-a}\right) + \left(\frac{4a-1}{2a}\right)^2 \qquad | \left(\frac{4a-4}{-a}\right)$ erweitern; $\left(\frac{4a-1}{2a}\right)^2 = \frac{(4a-1)^2}{4a^2}$

$\left(x - \frac{4a-1}{2a}\right)^2 = \frac{-4a(4a-4)+(4a-1)^2}{4a^2}$

$\left(x - \frac{4a-1}{2a}\right)^2 = \frac{-16a^2+16a+16a^2-8a+1}{4a^2}$

$x = \frac{4a-1}{2a} \pm \sqrt{\frac{8a+1}{4a^2}} = \frac{4a-1}{2a} \pm \frac{\sqrt{8a+1}}{\sqrt{4a^2}} = \frac{4a-1}{2a} \pm \frac{\sqrt{8a+1}}{2a}$

$x_{(Fix_1)} = 2 - \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a}\sqrt{8a+1} \qquad | \frac{4a-1}{2a}$ Nebenrechnung: $\frac{4-1}{2} = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2}$

$x_{(Fix_2)} = 2 - \frac{1}{2a} - \frac{1}{2a}\sqrt{8a+1} \qquad | \frac{\sqrt{8a+1}}{2a}$ N.R.: $\frac{4}{2} = \frac{1}{2} \cdot 4$

2. **Berechnung der Steigung im Fixpunkt in Abhängigkeit von a**

$f(x) = -ax^2 + 4ax - 4a + 4;$

$f'(x) = -2ax + 4a$

$f'(x_{Fix_1}) = -2a\,\underbrace{\left(2 - \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a}\sqrt{8a+1}\right)}_{} + 4a \qquad | x_{(Fix_1)}$ = in $f'(x)$ eingesetzt

$= -4a + \frac{2a}{2a} - \frac{2a}{2a}\sqrt{8a+1} + 4a$

$f'(x_{Fix_1}) = 1 - \sqrt{8a+1}$

3. **Bestimmen für welche a die Steigung im Fixpunkt$_1$ 1 bzw. -1 ist**

$|f'(x)| < 1$ anziehend; $\qquad |f'(x)| > 1$ abstoßend

Fall 1

$-1 = 1 - \sqrt{8a+1}$

$-2 = \sqrt{8a+1}$

$(-2)^2 = 8a + 1$

$3 = 8a$ → $a = {}^3/_8$

Abb. 1

Abb.1 $f(x) = -a\,(x-2)^2 + 4$

$a = {}^3/_8$

Fall 2

$1 = 1 - \sqrt{8a+1}$

$0 = \sqrt{8a+1}$

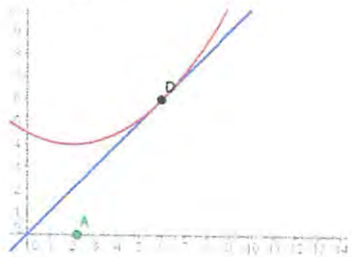
$0 = 8a + 1$

$-1 = 8a$ → $a = {}^{-1}/_8$

Abb. 2

Abb. 2 $f(x) = -a\,(x-2)^2 + 4$

$a = {}^{-1}/_8$

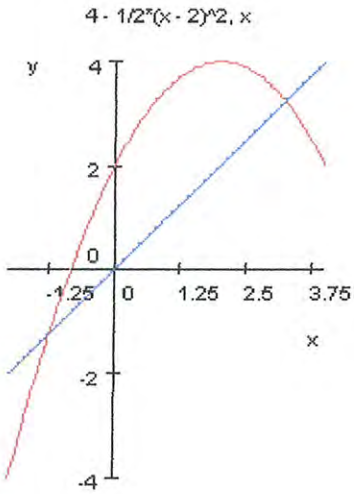


Rekursive Folgen mit MuPAD,

- `f:=x->(-a*(x-2)^2+4)`

$x \to 4 - a \cdot (x-2)^2$

- `a:=1/2:  plotfunc2d(f(x),x,x=-2..4, Scaling=Constrained);`
  `delete( a):`



Fixpunkte

- `fixgl:=f(x)=x`

$4 - a \cdot (x-2)^2 = x$

- `assume(a>0):`

- `xfix:=solve(fixgl,x)`

$$\left\{ -\frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{8 \cdot a + 1}}{2} - 2 \cdot a}{a}, -\frac{\frac{\sqrt{8 \cdot a + 1}}{2} - 2 \cdot a + \frac{1}{2}}{a} \right\}$$

- `op(xfix,1)   // Zugriff auf das 1. Element der Liste`

$$-\frac{\frac{\sqrt{8\cdot a+1}}{2}-2\cdot a+\frac{1}{2}}{a}$$

- `xfix1:=expand(%)   // besserer Term`

$$2-\frac{\sqrt{8\cdot a+1}}{2\cdot a}-\frac{1}{2\cdot a}$$

- `xfix2:=expand(op(xfix,2)) // Zugriff auf das 2. Element der Liste`

$$\frac{\sqrt{8\cdot a+1}}{2\cdot a}-\frac{1}{2\cdot a}+2$$

- `fixsteig1:=f'(xfix1); fixsteig2:=f'(xfix2)`

$$-a\cdot\left(-\frac{1}{a}-\frac{\sqrt{8\cdot a+1}}{a}\right)$$

$$-a\cdot\left(\frac{\sqrt{8\cdot a+1}}{a}-\frac{1}{a}\right)$$

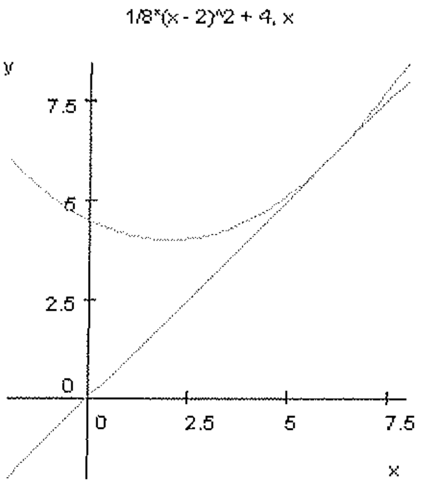
- `fixsteig1:=expand(fixsteig1);fixsteig2:=expand(fixsteig2);`

$$\sqrt{8\cdot a+1}+1$$

$$1-\sqrt{8\cdot a+1}$$

Für a= -1/8 ist die Wurzel Null, dann fallen beide Fixpunkte zusammen.
Dort ist die Steigung 1,

- ```
  a:=-1/8: plotfunc2d(f(x),x,x=-2..8, Scaling=Constrained);
  xfix;
  delete( a):
  ```
  ```



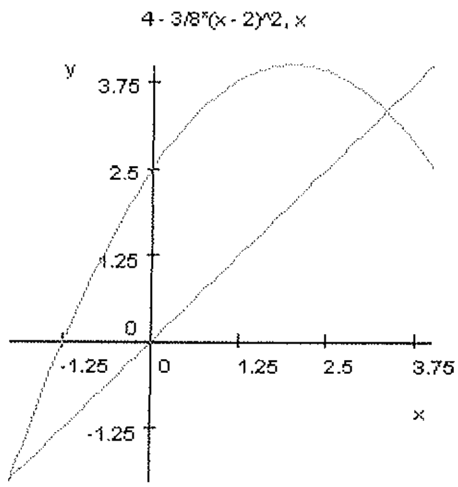
$\{6\}$

Ersichtlich ist bei xfix=6 ein anziehender Fixpunkt.
Weitere Untersuchung am rechten Fixpunkt:

```
solve(fixsteig2=-1,a)
```

$\left\{\frac{3}{8}\right\}$

```
a:=3/8: plotfunc2d(f(x),x,x=-2..4, Scaling=Constrained);
xfix;
delete( a):
```



$$\left\{-2, \frac{10}{3}\right\}$$

Also ist bei a=3/8 der rechte Fixpunkt xfix=10/3 anziehend,
dort wird die Bifurkationskaskade eingeleitet.
Betrachtung der 2.Iterierten

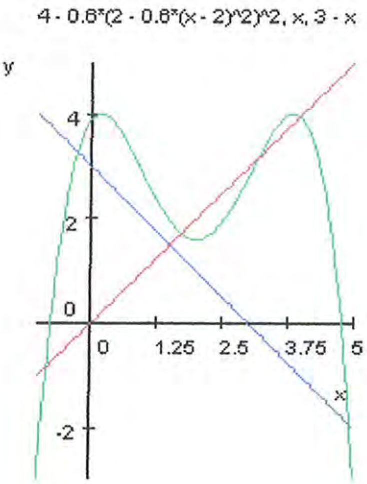
- `f2:=x->f(f(x));f2(x)`

$$x \to f(f(x))$$

$$4 - a \cdot \left(2 - a \cdot (x-2)^2\right)^2$$

Die beiden neuen Fixpunkte der 2. Iterierten sind Häufungspunkte von f.
Sie sind zunächst anziehend. Die nächst Bifurkation findet statt, wenn in ihnen die Steigung -1 wird. Die blaue Gerade zeigt Steigung -1, daher kommt es bei a=0.6 etwa hin.
Das passt auch zur Bifurkationskaskade aus Turboplot.

- ```
  a:=0.6:  plotfunc2d(f2(x),x,3-x,x=-
  1..5, Scaling=Constrained);
  delete( a):
  ```



Das Feigenbaumdiagramm (Attraktordiagramm) ist da zuende, wo die Folge nach dem Maximum genau den Wert des linken Fixpunktes trifft.
In Turboplot scheint das für a=1 zu sein.
Probe:

- `a:=1;f(f(2)); xfix1;delete a:`

1
  ```

0

0

Also ist das richtig. Hätte man das auch herausbekommen?

```
gl:=f(f(2))=xfix1;
```

$$4-4\cdot a=2-\frac{\sqrt{8\cdot a+1}}{2\cdot a}-\frac{1}{2\cdot a}$$

```
gl:=expand(2*a*gl)
```

$$8\cdot a-8\cdot a^2=4\cdot a-\sqrt{8\cdot a+1}-1$$

```
solve(gl,a)
```

$$\{1\}$$

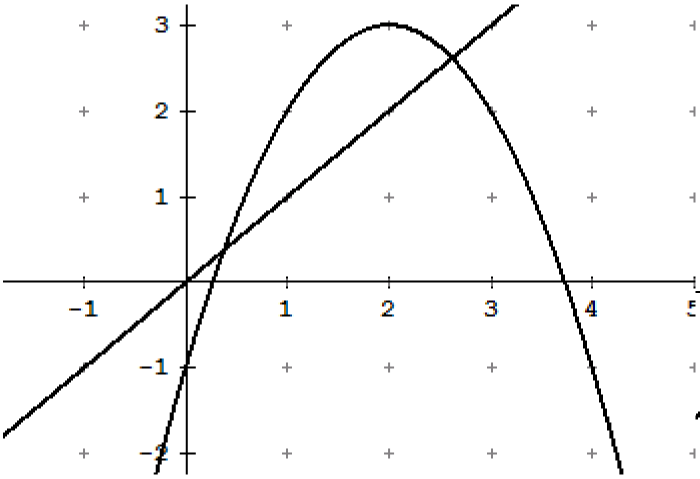
Ja, da ist das Ergebnis konstruktiv erzeugt.

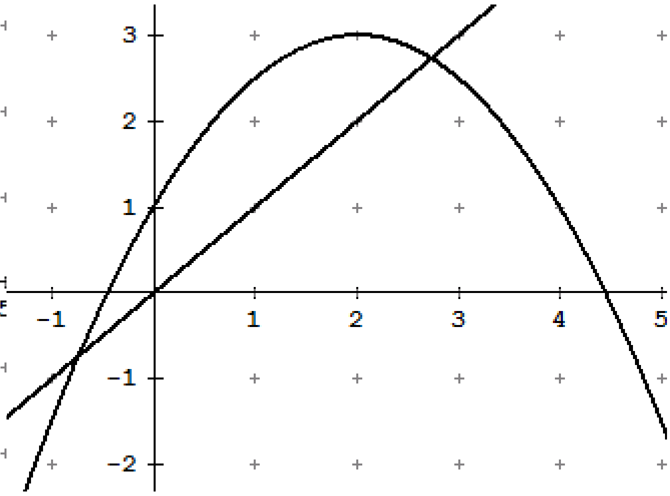
Damit reicht das Attraktordiagramm von a=-1/8 bis a=1.

Bifurkationen bei a=3/8 und etwa a=0,625 (erkundet in Turboplot).

Ing-math   Übungen zur Rekursion   Ueb.: -2-

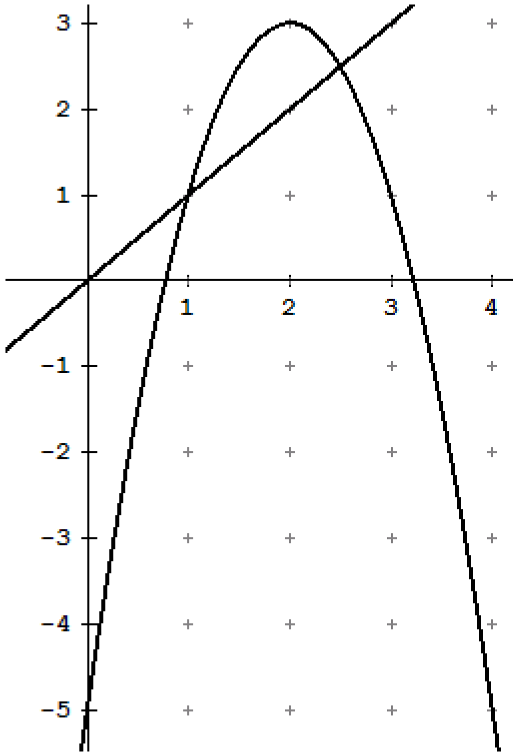
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Universität Lüneburg, 16. Januar 2006





Aufgabe 3 zur Rekursion

$$f(x) = -r(x-2)^2 + 3$$



Dies ist die Trägerfunktion einer rekursiv gegebenen Folge. Oben sind die Graphen für r=1, r=0,5, rechts r=2.

a) Notieren Sie die Rekusionsformel für a_n .
   Berechnen Sie für r=1 und den Startwert a_0=1 drei Folgenglieder und verfolgen Sie diese graphisch im linken oberen Bild.

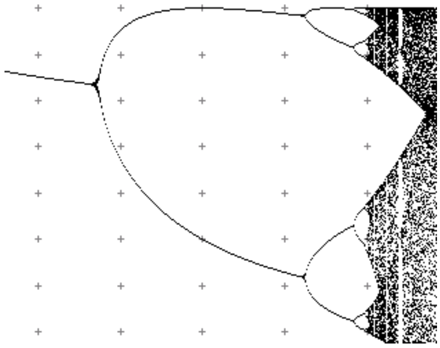
b) Entscheiden Sie welche Fixpunkte anziehend und welche abstoßend sind (nach Sicht und dranschreiben). Berechnen Sie bei einem der Beispiele die Fixpunkte und entscheiden Sie die vorige Frage rechnerisch.

c) Markieren Sie beim rechten oberen Graphen auf der x-Achse Bereiche für Startwerte:
   a. bei denen die Folge sicher konvergiert
   b. bei denen die Folge sicher divergiert

   Markieren Sie die Tefferfälle.

d) d) Markieren Sie beim rechten und beim obereb linken Graphen auf der x-Achse je zwei Bereiche für Startwerte:
   a. bei denen die Folge unklares Verhalten zeigt, Chaosbereich.
   b. bei denen die Folge gegen unendlich strebt.

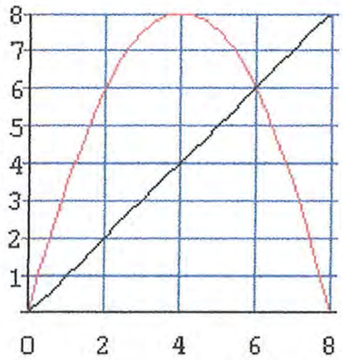
e) Erläutern Sie, wie das Feigenbaumdiagramm (rechts) zustande kommt Wie hängt die erste Bifurkation mit Ihren obigen Betrachtungen zusammen?



www
Ka

Warum gibt es die Bifurkationskaskade?

Begründungen zum Feigenbaumdiagramm

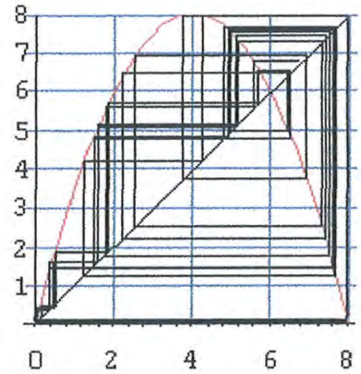


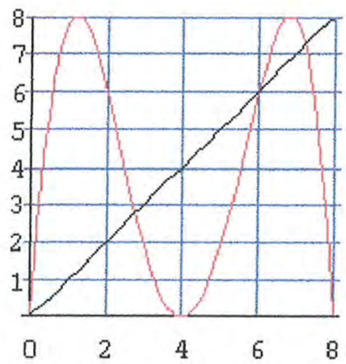
$f_6(x) = \frac{1}{2}x\,(8 - x)$

Diese Parabel vom einführenden Arbeitsblatt entspricht der logistischen Parabel für r = 4 , bei der es gar keine stabilen Zyklen mehr gibt.

Es gibt übrigens stets periodische Zyklen für exakt rationale Startwerte. Die entziehen sich aber der Ansicht mit dem Computer.

Daher sieht man rechts auch gar keine Stabilisierung und es wird (i.w.) der gesamte Wertebereich ausgeschöpft

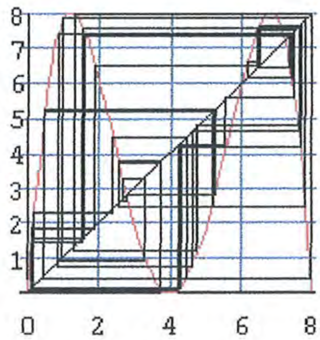




$f_9(x) = \frac{1}{2}f_6(x)\,(8 - f_6(x))$

Diese Funktion ist die zweite Iterierte der obigen Funktion. Mit ihr wird jeder zweite Wert der obigen Folge berechnet. Wenn es hier einen anziehenden Fixpunkt gäbe, dann hätte die obige Folge einen stabilen anziehenden Zweierzyklus. Offensichtlich aber schneidet die Kurve die Winkelhalbierende an allen Fixpunkten steil.

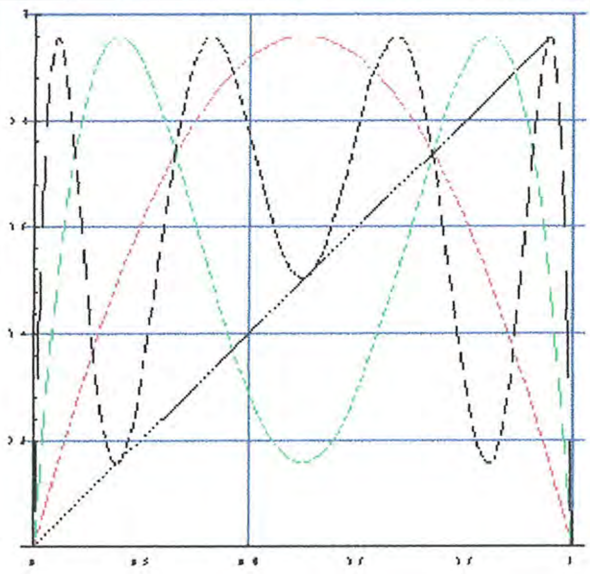
In diesem Fall sind auch alle weiteren Iterierten ohne anziehenden Fixpunkt. Also ergibt sich für diese Wahl des Parameters *r eine* chaotische Bahn.



www.
Ha

Hier sind die logistische Parabel und ihre zweite und dritte Iterierte für den Parameter r=3,83 gezeichnet. Man kann sich vorstellen, dass für etwas kleinere r, z.B. r=3,82 , die drei Extrema der schwarzen Kurve die Winkelhalbierende gerade noch nicht berühren. Wenn r dann wächst, findet Berührung statt. Das ist dann der Parameter r, für den das chaotische Verhalten abrupt in einen Dreierzyklus übergeht.

Dieser Übergang und die drei Werte sind auf der Feigenbaumseite deutlich zu sehen. Es bleiben bei wachsendem r (im Feigenbaumdiagramm nach unten) solange drei Häufungswerte, bis die 6. Iterierte mit ihren Extrema die Winkelhalbierende berührt. Dann kommt die 12. dran u.s.w., eine **Bifurkationskaskade** setzt ein. Das geht solange so, bis in der Nähe der Extrema der 3. Iterierten beim Schnitt mit der Winkelhalbierenden der Betrag der Steigung 1 überschritten wird.

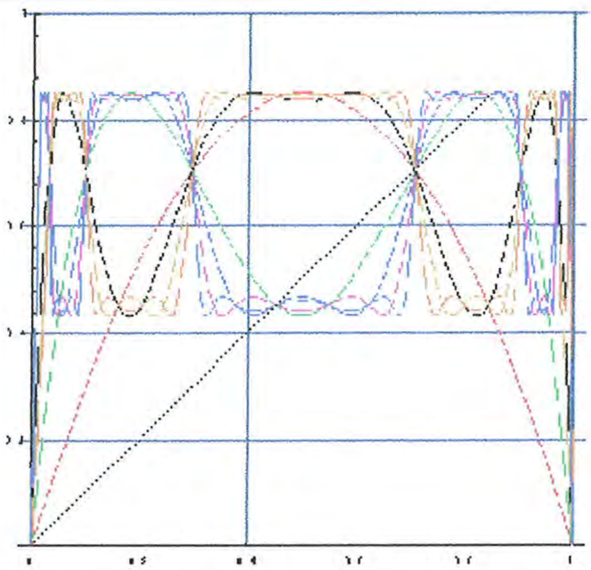


Logistische Parabel, 2. und 3. Iterierte, r=3.83
großes Bild 10K

Hier ist für r = 3,4 die logistische Parabel mit ihren Iterierten bis zur 8. Iterierten gezeichnet.

Die n. Iterierte ist ein Polynom 2^n-ten Grades. Die 8. Iterierte ist also ein Polynom 256-sten Grades. Alle gezeichneten Iterierten (und auch alle weiteren) haben genau zwei „flache“ Schnittstellen mit der Winkelhalbierenden. Also gibt es für r=3,4 einen stabilen Zweierzyklus, oder zwei Häufungswerte. Das kann man auch am Feigenbaumdiagramm sehen. Es ist das Gebiet nach der ersten Bifurkation, im ersten „Hügel“ von oben.

Für größer werdende r sackt das mittlere Extremum weiter nach unten, wenn dann alle „Schnittsteigungen“ größer 1 werden, wird das Verhalten der Folgen chaotisch.



großes Bild 15 K

Logistische Parabel (z.B.) und Spinnwebgraphen

jetzt doch

Logistische Parabel Haftendorn April 2011

$f(x):=r\cdot x\cdot(1-x)$ ▸ *Fertig* Im Graph−Fenster werden der Parameter **r** ▸ 3.22 und der Startwert **au1** ▸ 0.1 mit Schiebereglern gesteuert.

Es ist nun konkret $f(x)$ ▸ $-3.22\cdot x\cdot(x-1)$.

Man variiert nun vor allem r und beobachtet die Entwickung der Spinnwebfolge.

Da man r und au1 nur im Graphfenster varieren kann, ist es sinnvoll, am PC den Seitensortierer größer zu ziehen, damit man auch die Wirkung in den beiden Streuplots beobachten kann.

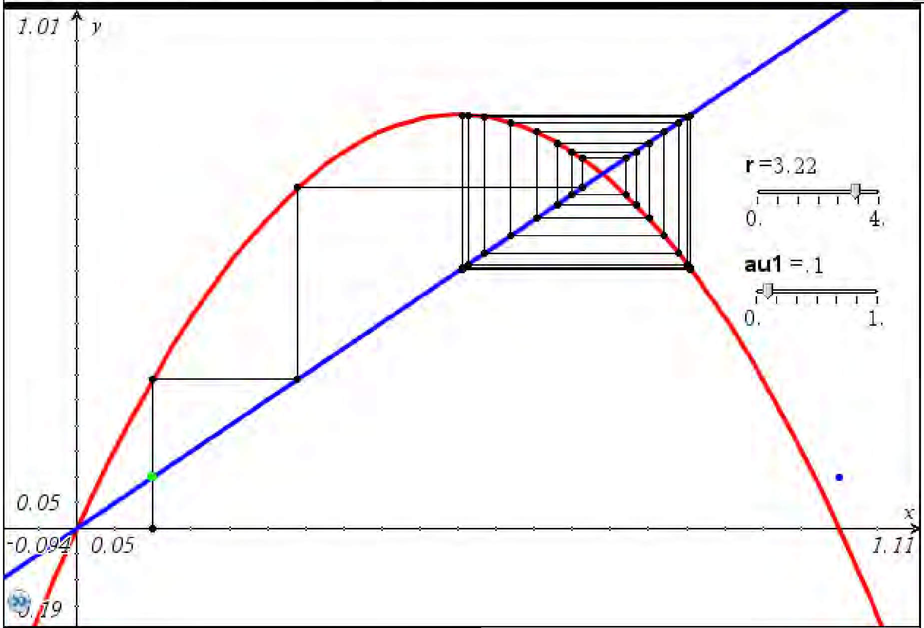
Der eine Streuplot ist der übliche Zeitgraph der Folge. Der andere verbindet die Datenpunkte direkt und ermöglicht auch eine Sicht auf das Folgenverhalten.

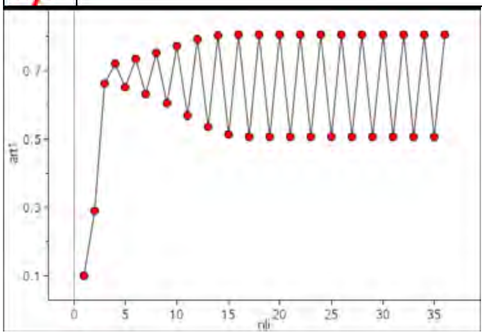
Die mathematische Aussagekraft ist aber beim Webgraphen deutlich größer.

Die Tabellenseite ist wie in Excel gemacht. Sie ist für die Streuplots nötig, aber nicht für die Spinnwebdarstellung.

Für Experimente mit eigenen Kurven ist die allgemeinere Datei günstiger

Man kopier besser nicht das Problem in dieser Datei, da die Datenhaltung der Treppchen für den Rechner aufwendig ist.



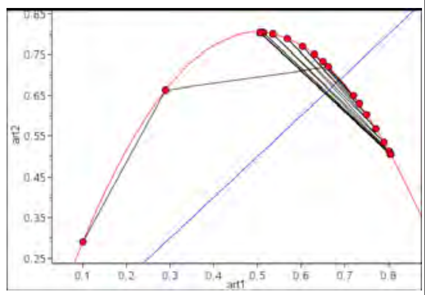


A nli	B art1	C art2
◆		
1	0.1	0.2898
2	0.2898	0.662727
3	0.662727	0.719734
4	0.719734	0.649529
5	0.649529	0.733004

Für die Zeitdarstellung links braucht man die Liste art1, sie ist die Folge u1. In B1 wird =au1 eingetragen. in B2 kommt =f(B1) dieser Zellinhalt wird nach unten kopiert. (re-unt-Ecke das Plus erscheint, anfassen, nach untern ziehen).
In C1 steht =b2, und das wird auch nach untern kopiert.
Beim rechten Data-Plot ist art2 über art1 aufgetragen und „Punkte verbinden" gewählt.

Datei
logistische-Parabel.tns

Der TI Nspire hat keine eigene Möglichkeit Spinnwebgraphen zu zeichnen. Das konnten TI92 bzw. TI voyage seit 1995!
Darum kann diese –oder die etwas allgemeinere Version- als **Musterdatei** dienen.
Auf der Notes-Seite trägt man das eigene f ein.
Beim **Hantieren** ist zu beachten: Als f1(x) ist die Trägerfunktion eingetragen, f2(x)=x, die Winkelhalbierende.
Wenn man bei f3 rechte Maustaste-> Graphiktyp -> Folge->Folge wählt, sieht man, wie u1 eingegeben ist, mit der Südtaste sieht man u2 als verschobene u1.
Wieder re Maus-> Graphiktyp -> Folge->Eigene erlaubt eine x-Liste und eine y-Liste, hier u1 und u2, eine Parameterdarstellung für Folgen.
Dann das nochmal und u1 und u1 (Punkte auf der Wh!!!!!)
Die Treppchen-Strecken sind dann mühsam von Hand eingefügt.
Wenn man so eine Datei nun als Muster nimmt, muss man diese Arbeit nicht selber machen.



Weitere Untersuchungen zur logistischen Parabel Haftendorn April 2011

Es ist hier ein "neues Problem" am TI eröffnet, da man nur so für Untersuchungen mit allgemeinem r dieselben Bzeichnungen verwenden kann, wie in den Seiten mit den konkreten Zeichnungen.

$\mathbf{f}(x):=r\cdot x\cdot(1-x)$ ▸ *Fertig* Allgemeiner Fixpunkt-Ansatz: $\mathbf{f}(x)=x$ ▸ $-r\cdot x\cdot(x-1)=x$

$\text{solve}(\mathbf{f}(x)=x,x)$ ▸ $x=\frac{r-1}{r}$ or $x=0$, Der linke Fixpunkt ist klar, der interessante ist

$\mathbf{xfix}:=\frac{r-1}{r}$ ▸ $\frac{r-1}{r}$. Für diesen ist die Steigung wichtig: $\frac{d}{dx}(\mathbf{f}(x))$ ▸ $-(2\cdot x-1)\cdot r$, Steigung am

Fixpunkt: $\mathbf{mxfix}:=\frac{d}{dx}(\mathbf{f}(x))|x=\mathbf{xfix}$ ▸ $-(r-2)$⚠. Erwartungsgemäß hängt dies von r ab.

Interessant sind die r-Werte mit Steigung 1 oder −1: $\text{solve}(\mathbf{mxfix}=1,r)$ ▸ $r=1$ oder $\text{solve}(\mathbf{mxfix}=-1,r)$ ▸ $r=3$

Für r=1 gilt kommt die Parabel mit Steigung 1 aus dem Ursprung $\mathbf{f}(x)|r=1$ ▸ $-x\cdot(x-1)$

Für r=3 $\mathbf{f}(x)|r=3$ ▸ $-3\cdot x\cdot(x-1)$ haben wir den Eintritt in die Bifurkationsparabel gefunden.

Das prüft man jetzt in dem anderen Problem durch Einstellen der Schieberegler.

Auf der anderen Notes-Seite sind Überlegungen zu den Iterierten.

Überlegungen zu den Iterierten

Die Iterierten entstehen, wenn man die Trägerfunktion immer wieder in sich selbst einsetzt.

Die Nummerierung über nehme isch von Turboplot, weil man dort auch das Feigenbaumdiagramm ansehen kann. Normal würde man mit 0 anfangen,

1. Iterierte $\mathbf{f}(x)$ ▸ $-r\cdot x\cdot(x-1)$

2. Iterierte $\mathbf{g2}(x):=\mathbf{f}(\mathbf{f}(x))$ ▸ *Fertig* Das ist $\mathbf{g2}(x)$ ▸ $-r^2\cdot(r\cdot x\cdot(x-1)+1)\cdot x\cdot(x-1)$,

$\text{expand}(\mathbf{g2}(x))$ ▸ $-r^3\cdot x^4+2\cdot r^3\cdot x^3-r^3\cdot x^2-r^2\cdot x^2+r^2\cdot x$ Polynom 4. Grades

Fixpunkte von g2:

$\text{solve}(\mathbf{g2}(x)=x,x)$ ▸ $x=\frac{-(\sqrt{r^2-2\cdot r-3}-r-1)}{2\cdot r}$ or $x=\frac{\sqrt{r^2-2\cdot r-3}+r+1}{2\cdot r}$ or $x=\frac{r-1}{r}$ or $x=0$

Es tauchen natürlich die beiden alten Fixpunkte auf. Dazu aber zwei neue. Sie esxistieren nur, wenn der Radikant der Wurzel positiv ist. Sie Auch Graph in diesem Problem.

$\text{solve}(r^2-2\cdot r-3=0,r)$ ▸ $r=-1$ or $r=3$ Also erst am r =3. Wie ist die Steigung in diesen

Fixpunkten? $\frac{d}{dx}(\mathbf{g2}(x))$ ▸ $-(2\cdot x-1)\cdot(2\cdot x^2\cdot r-2\cdot x\cdot r+1)\cdot r^2$ Also

$\text{solve}\left(\left(-(2\cdot x-1)\cdot(2\cdot x^2\cdot r-2\cdot x\cdot r+1)\cdot r^2|x=\frac{-\sqrt{r^2-2\cdot r-3}+r+1}{2\cdot r}\right)=-1,r\right)$ ▸ $r=-(\sqrt{6}-1)$ or $r=\sqrt{6}+1$⚠

$r=-(\sqrt{6}-1)$ or $r=\sqrt{6}+1$ ▸ $r=-1.44949$ or $r=3.44949$ Damit haben wir das r für die nächste Bifurkation exakt berechnet.

4. Iterierte $\mathbf{g4}(x):=\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{f}(x))))$ ▸ *Fertig*

$\mathbf{g4}(x)$

▸ $-r^4\cdot(r\cdot x\cdot(x-1)+1)\cdot(r^3\cdot x^2\cdot(x-1)^2+r^2\cdot x\cdot(x-1)+1)\cdot(r^7\cdot x^4\cdot(x-1)^4+2\cdot r^6\cdot x^3\cdot(x-1)^3+r^5\cdot x^2\cdot(x-1)^2+r^4\cdot x^2\cdot(x-1)^2+r^3\cdot x\cdot(x-1)+1)\cdot x\cdot(x-1)$

$\text{expand}(\mathbf{g4}(x))$

▸ $-r^{15}\cdot x^{16}+8\cdot r^{15}\cdot x^{15}-28\cdot r^{15}\cdot x^{14}+56\cdot r^{15}\cdot x^{13}-70\cdot r^{15}\cdot x^{12}+56\cdot r^{15}\cdot x^{11}-28\cdot r^{15}\cdot x^{10}$
$+8\cdot r^{15}\cdot x^9-r^{15}\cdot x^8-4\cdot r^{14}\cdot x^{14}+28\cdot r^{14}\cdot x^{13}-84\cdot r^{14}\cdot x^{12}+140\cdot r^{14}\cdot x^{11}-140\cdot r^{14}\cdot x^{10}$
$+84\cdot r^{14}\cdot x^9-28\cdot r^{14}\cdot x^8+4\cdot r^{14}\cdot x^7-6\cdot r^{13}\cdot x^{12}+36\cdot r^{13}\cdot x^{11}-90\cdot r^{13}\cdot x^{10}+120\cdot r^{13}\cdot x^9$
$-90\cdot r^{13}\cdot x^8+36\cdot r^{13}\cdot x^7-6\cdot r^{13}\cdot x^6-2\cdot r^{12}\cdot x^{12}+12\cdot r^{12}\cdot x^{11}-34\cdot r^{12}\cdot x^{10}+60\cdot r^{12}\cdot x^9$
$-70\cdot r^{12}\cdot x^8+52\cdot r^{12}\cdot x^7-22\cdot r^{12}\cdot x^6+4\cdot r^{12}\cdot x^5-6\cdot r^{11}\cdot x^{10}+30\cdot r^{11}\cdot x^9-61\cdot r^{11}\cdot x^8+64\cdot r^{11}\cdot x^7$
$-36\cdot r^{11}\cdot x^6+10\cdot r^{11}\cdot x^5-r^{11}\cdot x^4-6\cdot r^{10}\cdot x^8+24\cdot r^{10}\cdot x^7-36\cdot r^{10}\cdot x^6+24\cdot r^{10}\cdot x^5-6\cdot r^{10}\cdot x^4$
$-r^9\cdot x^8+4\cdot r^9\cdot x^7-8\cdot r^9\cdot x^6+10\cdot r^9\cdot x^5-7\cdot r^9\cdot x^4+2\cdot r^9\cdot x^3-r^8\cdot x^8+4\cdot r^8\cdot x^7-8\cdot r^8\cdot x^6+10\cdot r^8\cdot x^5$
$-7\cdot r^8\cdot x^4+2\cdot r^8\cdot x^3-2\cdot r^7\cdot x^6+6\cdot r^7\cdot x^5-7\cdot r^7\cdot x^4+4\cdot r^7\cdot x^3-r^7\cdot x^2-r^6\cdot x^4+2\cdot r^6\cdot x^3-r^6\cdot x^2$
$-r^5\cdot x^4+2\cdot r^5\cdot x^3-r^5\cdot x^2-r^4\cdot x^2+r^4\cdot x$

Auf die Idee, die Iterierten zu untersuchen, kommt man durch Betrachtung des Feigenbaum-diagramms.
Nach der ersten Bifurkation haben die Folgen zwei Häufungswerte. Sie werden im Wechsel angenommen. Wenn man also nur jedes zweite Folgenglied betrachtet, hat man den einen Häufungswert als Grenzwert. Genau das tut man, wenn man die zweite Iterierte ansieht. sie hat also zwei anziehende Fixpunke, die „alten“ Fixpunkte sind anstoßend geworden.
Wenn nun r weiter wächst wird die Steigung in diesen anziehenden Fixpunkten betragsmäßig auch größer, bis sie wieder -1 erreicht. Dann ziehen auch diese Fixpunkte nicht mehr an. Nun gilt entsprechendes für die vierte Iterierte, dort kommen vier neue anziehende Fixpunkte dazu.
Rechnerische Behandlung mit allgemeinem r ist nun kaum noch möglich. Aber man kann sie für feste r auf Schiebereglern noch recht genau erhunden.

Jetzt (2012) geht das noch deutlich einfacher, siehe oben

Iteration und rekursive Folgen mit TI nspire

jetzt (2011) eingebaut in TI

$f(x):=r\cdot x\cdot(1-x)$

$r:=2.8$

$r:=3.5$

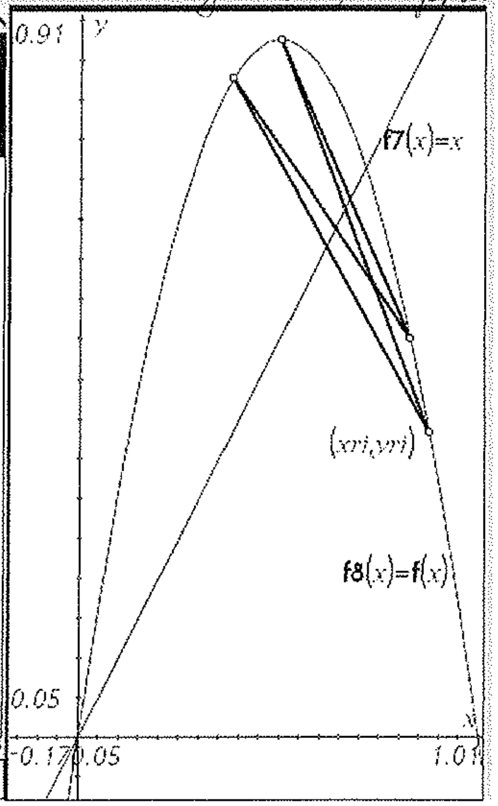
Trage bei b1 den Startwert ein.
Trage bei b2 ein =f(b1)
Kopiere diese Zelle nach unten.

Trage bei c1 ein =b2

Kopiere diese Zelle nach unten.

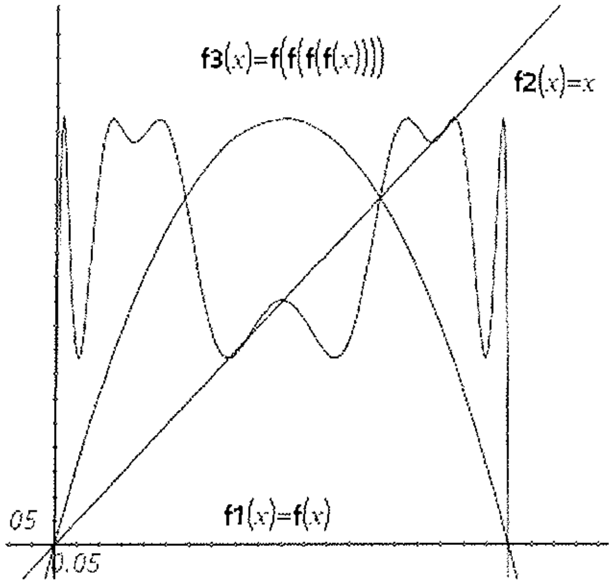
	A	B xri	C yri	D
1	1	.5	.875	
2	2	.875	.382813	
3	3	.382813	.826935	
4	4	.826935	.500898	
5	5	.500898	.874997	
6	6	.874997	.38282	
7	7	.38282	.826941	
8	8	.826941	.500884	
9	9	.500884	.874997	
10	10	.874997	.38282	
11	11	.38282	.826941	
12	12	.826941	.500884	
13	13	.500884	.874997	
14	14	.874997	.38282	
15	15	.38282	.826941	

C23



In diesem Fall der logistischen Parabel scheinen sich vier Werte abzuwechseln

Darum lohnt es, die 4. Iterierte zu bilden. Man sieht, dass sie vier anziehende Fixpunkte hat.



Der rechte Graph oben ist aus der Seite Graph&Geometrie entstanden.
Unten in der Eingabe Zeile ist Streu-Plot (Scatterplot) gewählt.
Dann sind die Namen xri und yri eingetragen.
Als Stil ist "Punkte verbinden" gewählt.

Wählt man nun im Calculator ein anderes r, wird auch die Punktfolge neu berechnet und dargestellt.

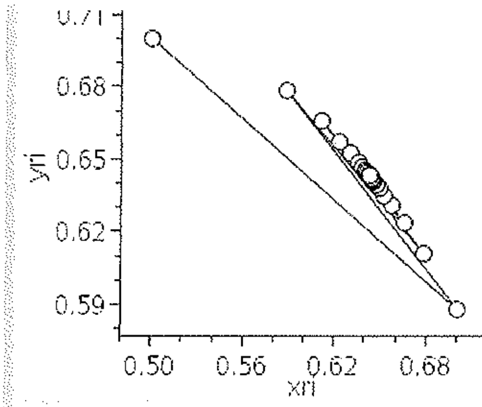
Datei iteration-tinspire.tns
und die Version für den Handheld iteration-tinspire-hh.tns

Jetzt (2012) geht das noch deutlich einfacher, siehe oben

Rekursive Folgen mit TI nspire SEITE 2

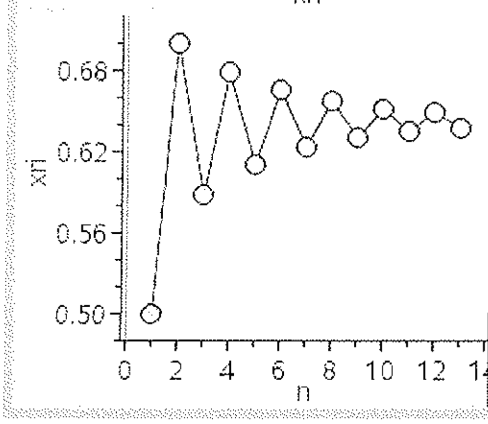
Eine andere Möglichkeit ist es, die Punkte mit dem Fenster Data&Statistik zu zeichnen.

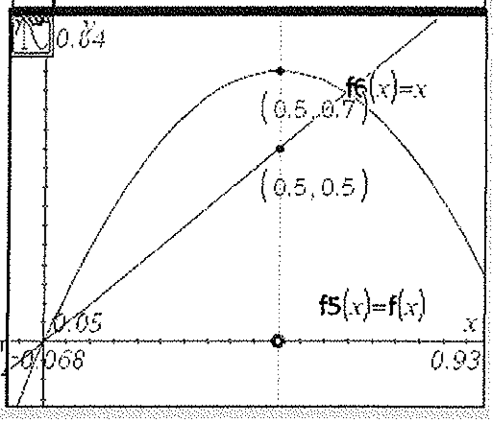
Man markiert z. B. die Spalten n und xri und wählt "Schnellgraph" (am PC re-Maus) Dann kommt der Graph unten links.
Bei Markierung von xri und yri kommt oben links.
Dann hat man noch (mit reMaus) Datenpunkte verbinden gewählt.
Den direkten Webgraphen gibt es am TI-nspire (noch) nicht.
(In der Datei zum Wachstum ist er für einige Schritte geometrisch simuliert.)



	A n	B xri	C yri	D	E	F
◆						
1	1	.5	.7			
2	2	.7	.588			
3	3	.588	.678...			
4	4	.678...	.610...			
5	5	.610...	.665...			
6	6	.665...	.623...			

A n

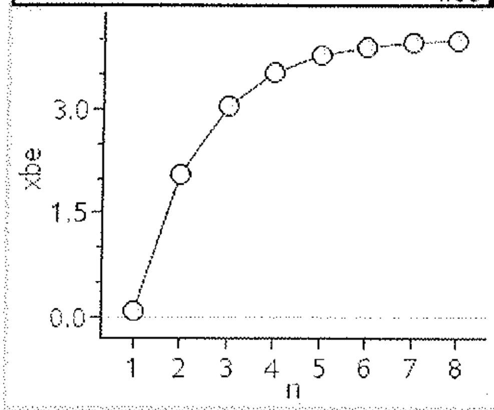


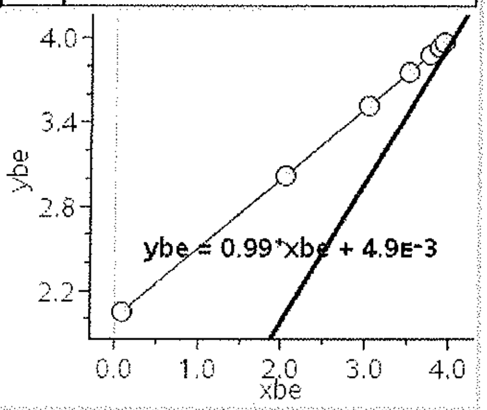


$g(x):=\frac{1}{2}\cdot x+2$	*Fertig*
solve$(g(x)=x,x)$	$x=4$
"x=4 ist also Fixpunkt"	"x=4 ist also Fixpunkt"
"begrenztes Wachstum"	"begrenztes Wachstum"
	4/99

	A n	B xb	C yb	D yw	E	F
◆						
1	1	.1	2.05	2.05		
2	2	2.05	3.025	3.025		
3	3	3.025	3.51...	3.51...		
4	4	3.51...	3.75...	3.75...		
5	5	3.75...	3.87...	3.87...		
6	6	3.87...	3.93...	3.93...		

F6





In dieser Iteration zum begrenzten Wachstum ist unten rechts (fast) die Winkelhalbierende mit "Einfügen einer beweglichen Geraden" eingefügt.
Das Eintragen einer weiteren Wertefolge oder einer Funktion ist mir imGraph&Geo-Fenster (Seite 1 oben) oder hier im Menu beim Markieren-Pfeil

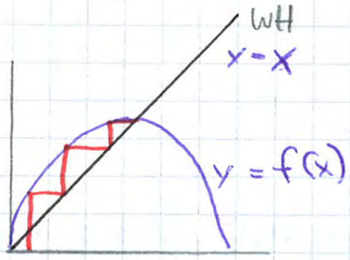
31.08.09

Logistische Parabeln, Standardform

Trägerfunktion: $y = r \cdot x\,(1-x)$ → Streckfaktor

$a_n = a(n)$
Index ↑ „Argument" $\mathbb{N}$

Folge: $a_n = r \cdot a_{n-1}\,(1-a_{n-1})$ a_0 „beliebig"



Berechnung der Fixpunkte

Ansatz: $x = f(x)$

$x = r \cdot x \cdot (1-x) \quad | : x$

$x=0$ 1. Lösung; nun $x \neq 0$

$1 = r \cdot (1-x) \quad | : r$

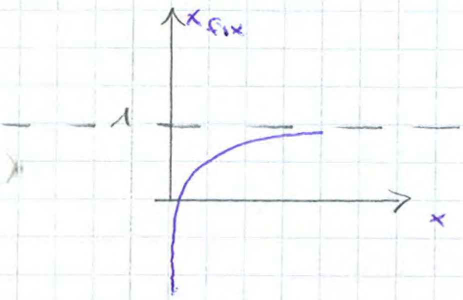
$\frac{1}{r} = 1 - x \quad | +x \;\; | -\frac{1}{r}$

$$\boxed{x = 1 - \frac{1}{r}}$$

Treppenplot

im Bsp: $r = 2{,}7 \Rightarrow x_{Fix} = 1 - \frac{1}{2{,}7} = 0{,}635$

Je größer r, desto dichter rückt der Schnittpunkt an 1



Anziehend bzw. Abstoßend? ⇒ Ableitung der Trägerfunktion

$f'(x) = (rx - rx^2)'$

→ $f'(x) = r - 2rx$ ⇒ für x ⇒ Fixpkt. einsetzen

$= r - 2r \cdot (1 - \frac{1}{r})$

$= r - 2r \cdot \frac{2r}{r}$

$= 2 - r$

im Bsp $f'(x_{fix}) = 2 - 2{,}7 = -0{,}7 = |0{,}7| < 1$ ⇒ anziehend

anderes Bsp. $x_{fix} = 3{,}3$: $2 - 3{,}3 = -1{,}3 = |1{,}3|$ ⇒ abstoßend

Grenzfall ist $x_{fix} = 3$: $2 - 3 = -1 = |1|$

ob anziehend o. abstoßend hängt nicht vom Startwert ab, nur von der Steigung

$|f'(x_{Fix})| < 1 \Rightarrow$ anziehend

$|f'(x_{Fix})| > 1 \Rightarrow$ abstoßend

$|f'(x_{Fix})| = 1 \Rightarrow$ unklar

Iterierte Funktion bedeutet: Einsetzen der Fkt. in die Funkt. für x.

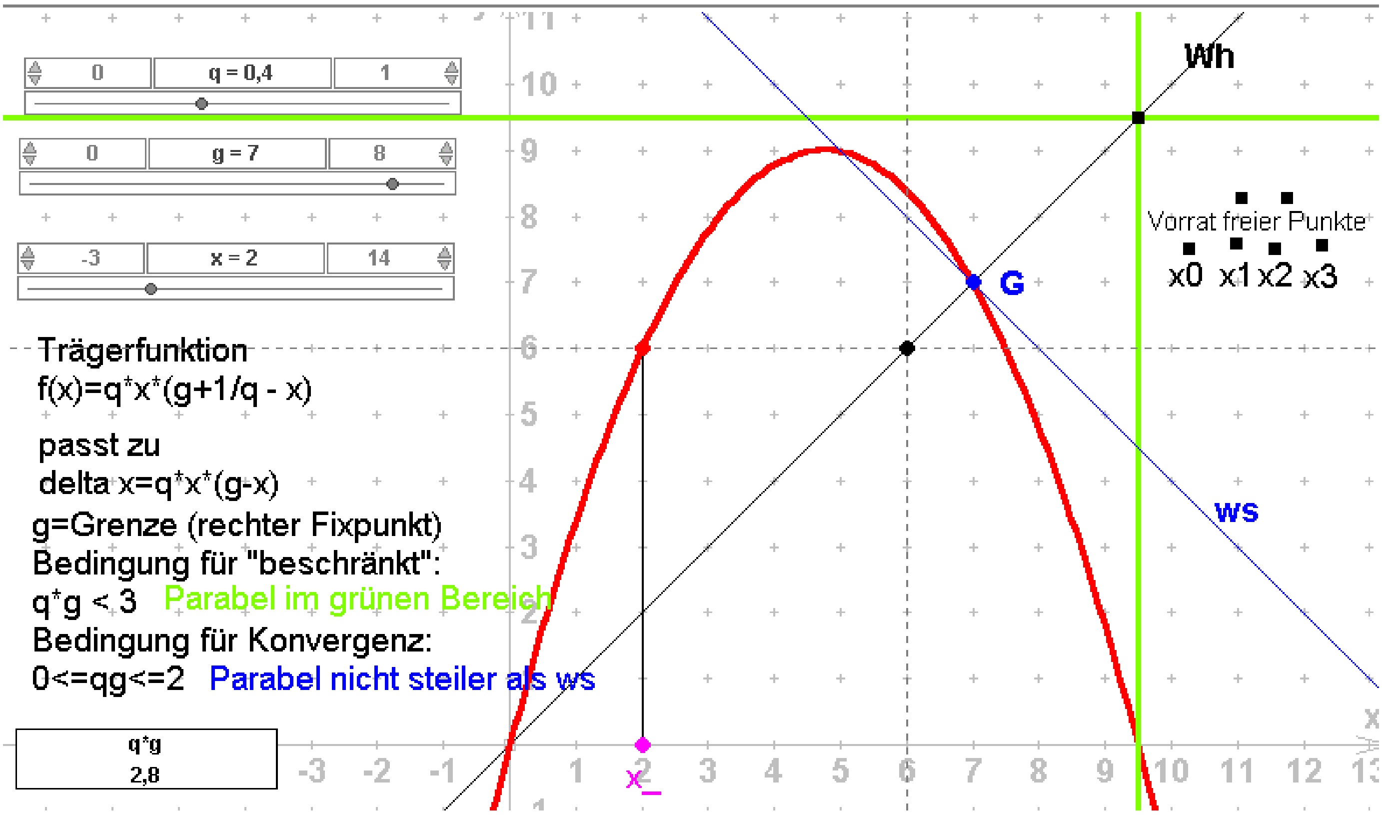
$f(x) = r \cdot x(1-x)$

$f(f(x)) = r\,[rx(1-x)][1-rx(1-x)]$ 2. Iterierte $g(x)$

man macht einen Doppelschnitt und betrachtet nur jeden 2. Wert

Analysis und Sek I "Wachstum" Logistische Parabel

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Uni Lüneburg, www.uni-lueneburg.de/mathe-lehramt 5. Juli 2004



Nutzen dieser Euklid-Dynageo-Datei:

A. Erklärung der Treppchendarstellung (Spinnweb~).
B. Erkundung der Wirkung von q bei festem g.
C. Erkundung der Wirkung von g bei festem q.
D. Bestätigung der links unten genannten Bedingungen für qg.
E. Überlegungen warum die Konvergenzbedingung so sein muss.
F. In Analysis kann diese Bedingung errechnet werden.
G. Überlegungen warum die Beschränktheitsbedingung so sein muss.
H. Diese Bedingung kann auch in der Sek I errechnet werden.(Ebenso die folgenden B.)
I. Erkundung einer Bedingung für monotones Wachstum der Folge.
J. Erkundung, wann die Folge gegen 0 strebt.

Hinweise:

zu A) Wähle am x-Regler einen Startwert, hier 2, setze den freien Punkt x0 auf x_.(* Verfolge die Striche zur Funktion, zur y-Achse, die graphische Spiegelung an der Wh, setze dort x1 hin. Setze mit dem Regler x- auf x1.*) Wiederhole(*....*) mit x2,x3 ...
zu E) Die Steigung im Fixpunkt muss betragsmäßig kleiner 1 sein (siehe Vorübungen mit Geraden).
zu F) Die Ableitung der Trägerfunktion ist an der Stelle g auf -1 zu setzen. Daraus ist qg zu bestimmen.
zu G) Der Bereich (grün) ist durch die Nullstelle bestimmt. Wenn der Scheitel der Parabel oben hinauswandert, kommen Folgenglieder zustande, die auf der x-Achse rechts von der Nullstelle liegen. Dann wird der nächtse Wert negativ und die Folge strebt gegen -unendlich
zu H) Die Nullstelle ist bei g+1/q und die Scheitelstelle auf der Hälfte. Der Scheitelwert muss kleiner als g+1/q sein.
zu I) Die Folge wächst ausschließlich, wenn die Steigung in G nicht negativ ist.
zu J) Die Folge stebt gegen 0, wenn g<=0 ist.

01.04.09

Mathe — 12.108 B. Früh – Einführung TI N-Spire 10^{15}–11^{45}

3. Std. — 12.113 – Software-Sprechstunde

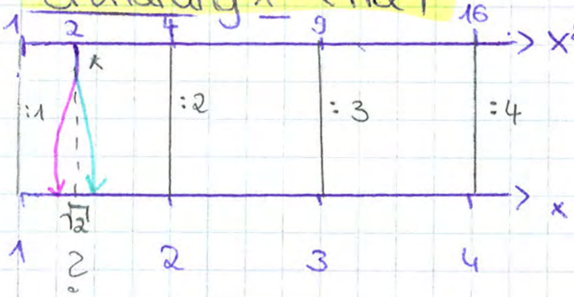
www: Galerie zu Fraktalen – Lindenmayersystem

Formelsammlung – Ja

DIN A4 Blatt – handschriftlich – beidseitig

Heronverfahren – Wurzelbestimmung –

Erklärung 1 (Ha)



* geteilt durch einen Näherungswert
↓ zu klein geteilt => zu großes Ergebnis
↓ zu groß geteilt => zu kleines Ergebnis

$$\boxed{\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) = a_{n+1}}$$

zu kl. zu gr.
zu gr. zu kl.

$a_1 = 1{,}4$

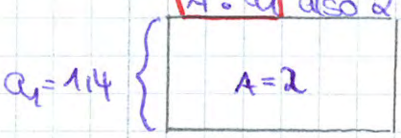
$a_2 = \left(1{,}4 + \frac{2}{1{,}4}\right) \cdot \frac{1}{2} = 1{,}4142$

$a_3 = 1{,}414213564$

$a_4 = 1{,}414213562$

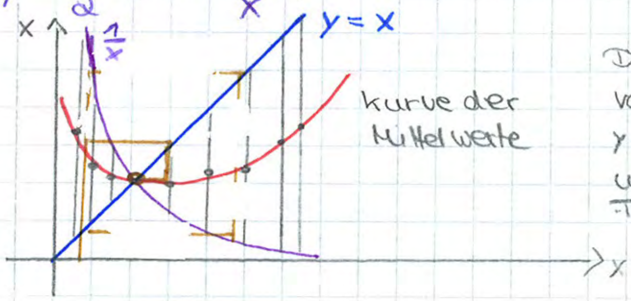
Erklärung 2 (Allg.)

$\boxed{A : a_1}$ also $2 : 1{,}4 = 1{,}42857$



Trägerfunktion dazu: (aus Erkl. 1)

$y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$



Die Mittlung von $y = x$ und $y = \frac{1}{x}$ ergibt unsere Trägerfkt.

Fixpunkt: $x = f(x)$

$x = \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{2}{x}\right) \quad | \cdot 2$

$2x = x + \frac{2}{x} \quad | \cdot x$

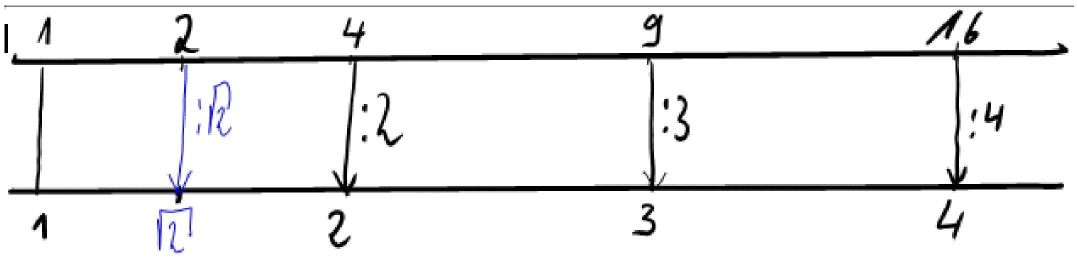
$2x^2 = x^2 + 2 \quad | - x^2$

$x^2 = 2 \quad | \sqrt{\ }$

$x = \sqrt{2}$

Heronverfahren für Quadratwurzeln (mit TI-voyage)

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Universität Lüneburg, 24. Oktober 2005



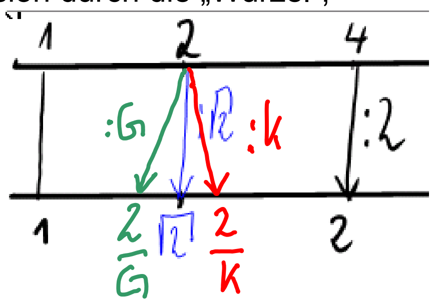
Quadratstrahl

Zahlenstrahl

Vom Zahlenstrahl zum Quadratstrahl kommt man durch Quadrieren, Multiplizieren mit sich.
Vom Quadratstrahl zum Zahlenstrahl kommt man durch Division durch die „Wurzel“,
aber leider nur, wenn man sie schon weiß.

Wenn man aber nun die Wurzel nicht weiß?

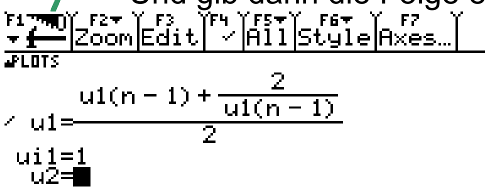
Dann teilt man durch eine Näherungszahl.
Ist die Näherungszahl K zu klein, kommt man zu groß aus.
Ist die Näherungszahl G zu groß, kommt man zu klein aus.
Also ist es eine brauchbare Idee, den Mittelwert zwischen der Näherungszahl und dem Quotienten 2/Näherungszahl zu nehmen. Haben die Näherungszahlen Nummern:



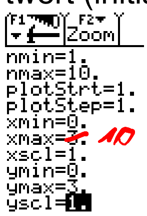
$a_0,\ a_1,\ a_2, ..., a_{n-1},\ a_n, ...$, dann nehmen wir also $a_n = \dfrac{a_{n-1} + \dfrac{2}{a_{n-1}}}{2}$.

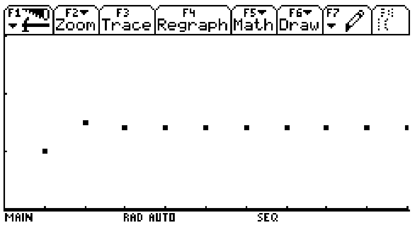
In einer Eingabe-Zeile vom TI-Rechner sieht das dann folgendermaßen aus:
u1(n)= (u1(n-1)+2/ u1(n-1))/2.
Richte erstmal den Rechner ein: MODE GRAPH --> ....4:SEQENCE ENTER

♦ y= Und gib dann die Folge ein. Es heißt ui1 für den Startwert (initial), gib eine Zahl ein.



Richte mit den Bereich ♦ Window ein.
Sieh dir mit Den Graphen an. ♦ Graph

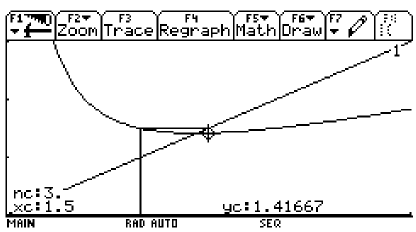




Mit F3 erscheint der Blinkepunkt, mit dem du mit der „West-Taste“ von Folgenpunkt zu Folgenpunkt springen kannst.

Mit der eingestellten Genauigkeit kommt kein noch besserer Wert. Bei MODE kann man dies verbessern.

Mit ♦ y= F7 AXES -->WEB
Kannst du zur Spinnweb-Darstellung wechseln.
Vorher noch im „Window“ xmax auf 3 setzen.
Wieder mit F3 schaltet man die „Spurverfolgung“ (TRACE) ein und erzeugt mit der „West-Taste“ Schritt für Schritt den Web-Graphen. Gezeichnet ist die Winkelhalbierende und die „Trägerfunktion“ der rekursiv



definierten Folge $y = f(x) = \dfrac{x + \dfrac{2}{x}}{2}$ Mit ♦ Table F1 Fomat 12,
eröffnet man die Sicht auf die Werte, vorher Mode float 12.

n	u1
1.	1.
2.	1.5
3.	1.4166666667

2011 ergänzt

Heronverfahren

Heron-Verfahren Haftendorn, 3. Mai 2011

Die Trägerfunktion lautet $f(x):=\frac{1}{2}\cdot\left(x+\frac{r}{x}\right)$ ▸ *Fertig*

Die rekursive Fomel lautet: $u1(n):=f(u1(n-1))$ ▸ *Fertig* Sehen Sie sich die Trägerfunktion im Graph-Fenster an. Dabei ist es sinnvoll, einen Schieberegler für r einzuführen, ebso für der Startwert a0. Jetzt ist also **r** und **a0**

Der Fixpunkt ist $\text{solve}(x=f(x),x)$ ▸ $x=-1.41421356237$ or $x=1.41421356237$ |, die ist die Dezimalzahl von Wurzel (2). Dass das Heronverfahren allgemein zur näherungsweisen Bestimmung der Wurzel aus r idient, wird unten noch bewiesen.

In Graph-Fenster ist auch unter Auswahl von Graphiktyp=Folge die ogige Formel für u1 eingetragen.

Re-Maus auf einem der Punkte lässt die Wahl von Attributen zu. Der unterste Eintrag ist die Darstellung. Zeit-Graph ist vorgewählt. Pfeil nach rechts lässt die Wahl Webgraph zu.

1.1

Die Darstellung des Schnittpunktes erzeugt für r=2 erwartungsgemäß 1.4142135...

$f(x)$ ▸ $\frac{x^2+2.}{2\cdot x}$ Da durch den Schieberegler nun r=2 ist kann man hier r nicht mehr sehen. Die Formel ist aber dennoch mit r verbunden.

Um weiterhin mit variablem r untersuchen zu können, muss ma die Funktion doppeln.

$ff(x):=\frac{1}{2}\cdot\left(x+\frac{rr}{x}\right)$ ▸ *Fertig* Nochmal: Fixpunkt

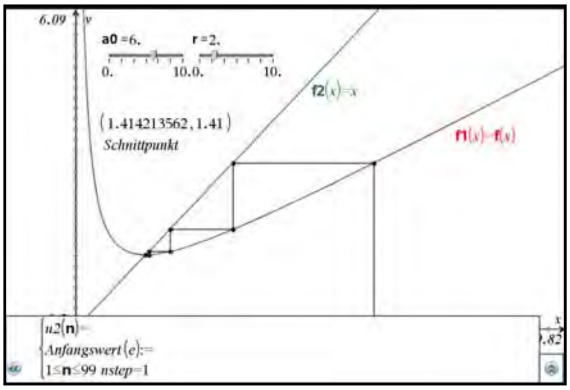
$\text{solve}(ff(x)=x,x)$ ▸ $x=-\sqrt{rr}$ and $rr\geq 0$ or $x=\sqrt{rr}$ and $rr\geq 0$

Ableitung $\frac{d}{dx}(ff(x))$ ▸ $\frac{x^2-rr}{2\cdot x^2}$ ⚠ und Einsetzen des Fixpunktes

$\frac{d}{dx}(ff(x))|x=\sqrt{rr}$ ▸ 0 ⚠

Also ist die Konvergenz für alle Wurzelbestimmungen superschnell.

1.2



1.3

n	folge	C	D	E	F	G
1	6.					
2	3.16666666667					
3	1.89912280702					
4	1.47612029496					
5	1.41551170981					
6	1.41421415763					
7	1.41421356237					
8	1.41421356237					
9	1.41421356237					
10	1.41421356237					
11	1.41421356237					
12	1.41421356237					
13	1.41421356237					

A1 | 1

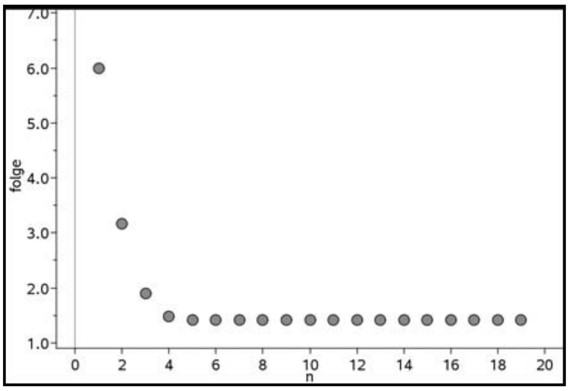
1.4

$\frac{1}{2}\cdot\left(1.5+\frac{2}{1.5}\right)$	1.41666666667
$\frac{2}{1.4166666666667}$	1.41176470588
$\frac{1}{2}\cdot(1.4166666666667+1.4117647058823)$	1.41421568627
$\sqrt{2}$	1.41421356237

© Dies sind einige Berechnungen "von Hand" *aus der Übungsstunde.*

4/99

1.5



1.6

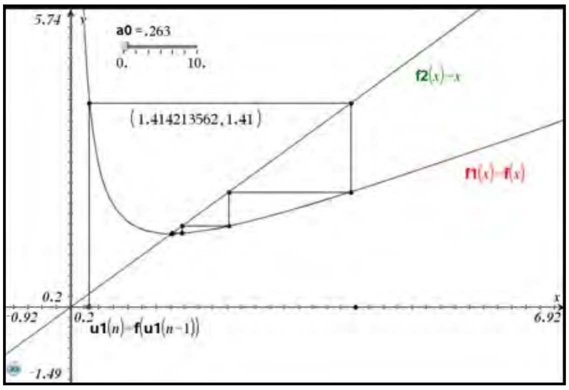
Heron für Wurzel aus 2

Heron 2

$f(x):=\frac{1}{2}\cdot\left(x+\frac{2}{x}\right)$ ▸ *Fertig* Trägerfunktion Hier ist darauf verzichtet, r variabel zu halten, r=2.

Anmerkung: im Graphfenster erhält man den Schnittpunkt mit größerer Stellenzahl, wenn man die angezeigte Zahl anklickt und mit Re-Maus Attribute wählt. Der erste Eintrag ist die Stellenzahl.

2.1

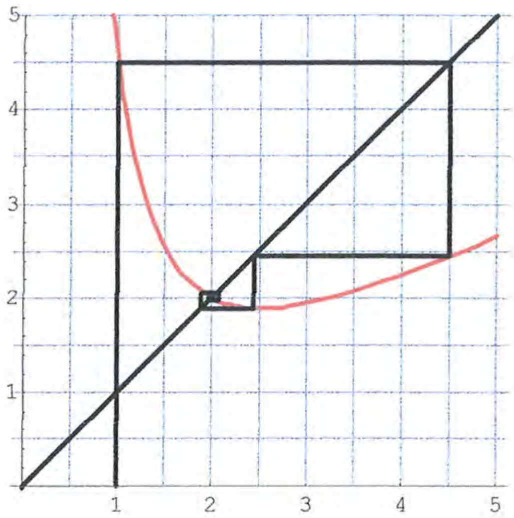


2.2

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Oktober 02 **Für Ingenieure ist nur k=2 wichtig.**

Ergänzung für Lehramtsstudenten, als Aufgabe formuliert

Die allgemeine Heron-Formel zur Bestimmung höherer Wurzeln lautet:



$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{r}{a_n^{k-1}}\right)$$

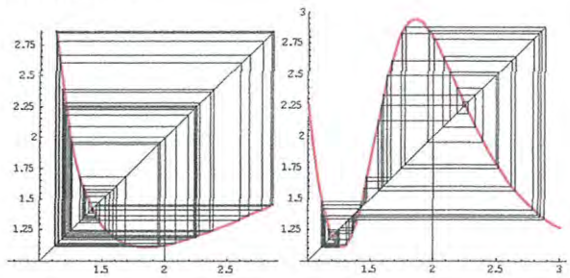
a) Weisen Sie nach, dass diese rekursive Folge für positive r den Fixpunkt $a = \sqrt[k]{r}$ hat.

b) Rechts ist die Webdarstellung für r=8 gezeichnet. Um welches k handelt es sich dann?
Verfolgen Sie die hier dargestellten Folgenwerte rechnerisch vier Schritte weit (als Dezimalzahlen).

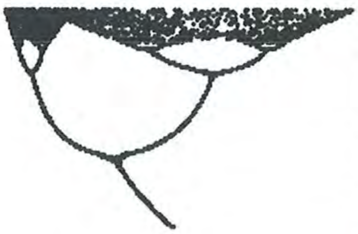
c) Entwickeln Sie in einer eigenen Zeichnung den Graphen der Trägerfunktion (zu b)) als Mittelwert zweier einfacherer Funktionen.
Wie ändert sich der Graph, wenn k wächst?

d) Der in a) berechnete Fixpunkt ist nicht immer anziehend. Berechnen Sie genau, für welche k und r er anziehend und für welche er abstoßend ist.

e) Für r=8 und k=6 erhält man für die Trägerfunktion f und für die zweite Iterierte folgende Graphen:



Erläutern Sie den Zusammenhang und begründen Sie das Verhalten der Folge qualitativ.



f) Bei der logistischen Parabel haben Sie ein "Feigenbaum-Diagramm" kennengelernt.
In gleicher Weise entsteht hier ein "Heron-Feigenbaum-Diagramm", wenn k variiert wird. Im Bild zeigt die Hochachse k von 3 bis 6.
Erläutern Sie die Graphik.
Wo finden sich die betrachteten Fälle wieder?

Als Erkundung mit Turboplot:
Wählen Sie "Iteration".
Tragen Sie die Trägerfunktion ein.
Experimentieren Sie mit verschiedenen r und k.
Das Feigenbaum-Diagramm heißt dort "Attraktordiagramm".
k muss a heißen und ist an der Rechtsachse abgetragen.

Die Trägerfunktion selbst heißt "erste Iterierte".
Sehen Sie sich an unter welchen Winkeln die zweiten Iterierten für a=4,5 die Wh schneiden. Wie hängt die Beobachtung mit dem Attraktordiagramm zusammen?

Sehen Sie sich auch das "Schaubild der Folge" an.

TI - NSpire | ⇒ graue Taste

Folgeglieder

seq (x^2 , x , 1 , 4) = 1, 4, 9, 16

Fkt. Startwert

Var.

seq (term(n) , n , anfang , ende)

explizite Folgen: Brauch man nicht das Vor-glied

Rekursive Folgen: hier geht man zurück, man brauch das vorherige Glied

Aufgabe:

Gegeben ist eine Folge aus 4 Werten, man soll sie fortsetzen. -

Beispiel: 6, 12, 24, 48, ...

⇒ in Koordinaten umwandeln $x = 1-4$ $y = 6, 12, \ldots$

(1|6) (2|12) (3|24) (4|48) ⇒ Fkt. 3. Grades

↳ $ax^3 + bx^2 + cx + d$

I: $6 = a1^3 + b \cdot 1^2 + c1 + d$

II: $12 = a2^3 + b2^2 + c2 + d$

⇒ TI: define $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ enter (Fertig)

solve ({ f(1)=6, f(2)=12, f(3)=24, f(4)=48 }; {a,b,c,d})

enter ⇒ a = 1, b = -3 c = 8 d = 0

dann: define $f1(x) = 1x^3 - 3x^2 + 8x + 0$ enter

→ seq (f1(i*), (i), 1, 4) enter : {6, 12, 24, 48}

* hätte auch x oder z sein können, haupts. f1(x), x sind gleich!

6	12	24	48	| : 3 | ⇒ $3 \cdot 2^n$
2	4	8	16	| ⇒ 2^n

Für Definition 2 Befehle:

1. Define␣f(x) = ...

oder 2. f(x):=

Analysis: Folgen - expl. Folgen

Folgen explizit mit TI-nspire

Gegeben wird eine Folge aus vier Werten, man soll sie fortsetzen.
So etwas kommt in Intelligenztests vielfach vor.
Gibt es Fälle, bei denen so eine Fortsetzung nicht eindeutig möglich ist?
Nimm z.B. die Folge 6, 12, 24, 48...

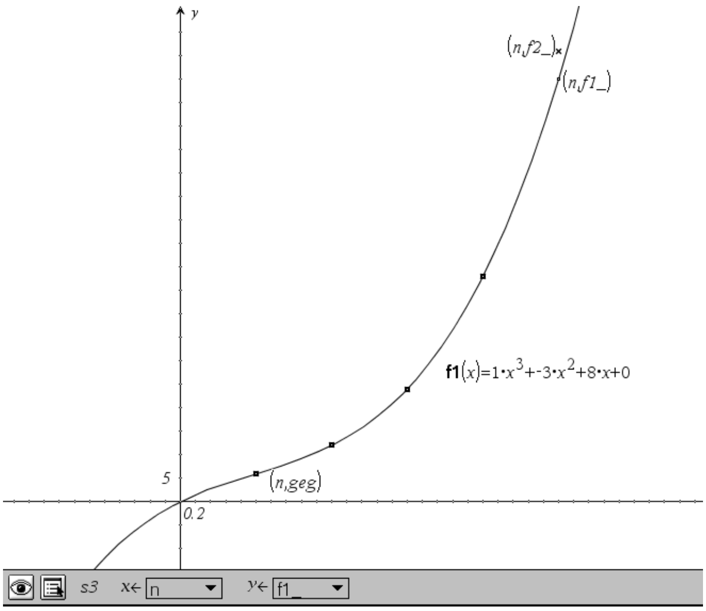
Schüler gibt Antwort hier ein

Vorgeschlagene Antwort:

In dieser Datei kannst du zu jeder vorgegeben Anfangssequenz eine Formel angeben, die anders weitergeht als die gemeinte Formel.

Define $f(x)=a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d$	*Fertig*
solve$(\{f(1)=6,f(2)=12,f(3)=24,f(4)=48\},\{a,b,c,d\})$	$a=1$ and $b=-3$ and $c=8$ and $d=0$
Define $f1(x)=1\cdot x^3+-3\cdot x^2+8\cdot x+0$	*Fertig*
seq$(f1(i),i,1,4)$	$\{6,12,24,48\}$
$f2(x):=3\cdot 2^x$	*Fertig*
seq$(f2(i),i,1,4)$	$\{6,12,24,48\}$
$\{f2(5),f1(5)\}$	$\{96,90\}$

©Probiere dies auch mit anderen Folgen



A n	B geg	C f1_	D f2_	E
◆				
1	6	6	6	
2	12	12	12	
3	24	24	24	
4	48	48	48	
5		90	96	

Merke

Explizite Folgen: seq(*Term(n),n, anfang, ende)*
oder zB in b1 eintragen term(a1) und nach unten kopieren

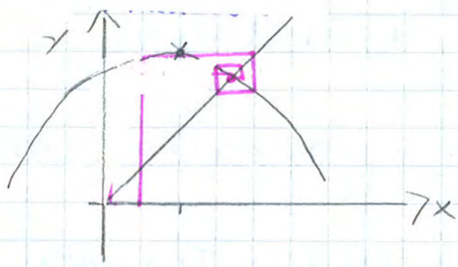
Rekursive Folgen: zum Beispiel in b1 den Startwert eintragen, in b2 dann =f(b1) eintragen und nach unten kopieren. f(x) muss dann der Term der Trägerfunktion sein.

Gleichungen lösen: solve({*li1=re1,li2=re2*},{*a,b*})
Wobei die Gleichungen a und b enthalten und man nach a und b auflösen will.

Mathe 4. Std. - Aufgabe Zettel

07.04.09

$-a \cdot (x-2)^2 + 4$



$-a(x^2-4x+4)+4$

$-ax^2+4ax-4a+4$

$f(x)=x$

$-ax^2+4ax-4a+4=x \quad | -x$

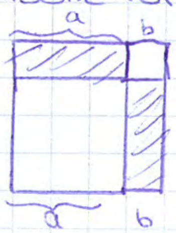
* $-ax^2+4ax-x-4a+4=0 \quad | +4a-4$ x ausklammern

$x^2 - \frac{4a-1}{a}x = \frac{4a-4}{-a}$

$\underbrace{x^2 - \frac{4a-1}{a}x + \left(\frac{4a-1}{2a}\right)^2} = \frac{4a-4}{-a} \frac{(4a-1)^2}{4a^2}$

$\left(x - \frac{4a-1}{2a}\right)^2 = \frac{-4a(4a-4)+(4a-1)^2}{4a^2}$

Binomische Formel



$\Rightarrow A = a^2 + 2ab + b^2$

Notwendigkeit von Beweisverfahren

Kreisteilungspolynom: $x^n - 1 = (x-1)(\text{polynom}_{n-1})$ 19 (Gwanow)

falsch, nicht nur 1-Koeffizient, sondern bei $n=105$ kommt 2

$\text{factor}(2^{4}-1) = 23 \cdot 89$

Mersenne Primzahlen sind Primzahlen der Gestalt 2^p-1

Vermutung: $2^{m^p}-1 = \text{prim}?$ nein denn $2^{(2^{13}-1)}-1$

Euler n^2-n+41

Zahlmeister

8 rubel 13 rubelstücke ∞

Welche Beträge kann er auszahlen? Wann kann er alles auszahlen?

Beweisprinzip: Vollständige Induktion

Induktion => hinaufführen (Physik) Deduktion => herunterführen (Mathe)

Turm von Hanoi:

n	a_n
1	1
2	3
3	7
4	15

$a_{n+1} = 2a_n + 1$ => sicher

$a_n = 2^n - 1$ => Vermutung

I.: Induktionsverankerung

$a_1 = 2^1 - 1 = 1$ ok

$a_2 = 2^2 - 1 = 3$ ok ...

II.: Induktionsannahme IA $\boxed{}$

für $\wedge n$ gilt: $a_n = 2^n - 1$

III.: Ziel: $a_{n+1} = 2^{n+1} - 1$ => Behauptung für n+1

IV.: $n \rightsquigarrow n+1$ Schritt von n auf n+1 -> Induktionsschritt

$$a_{n+1} \underset{\text{sicher}}{=} 2a_n + 1 \underset{IA}{=} 2\cdot(2^n - 1) + 1$$
$$= 2\cdot 2^n - 2 + 1$$
$$= 2^{n+1} - 1 \qquad \text{w. A.}$$

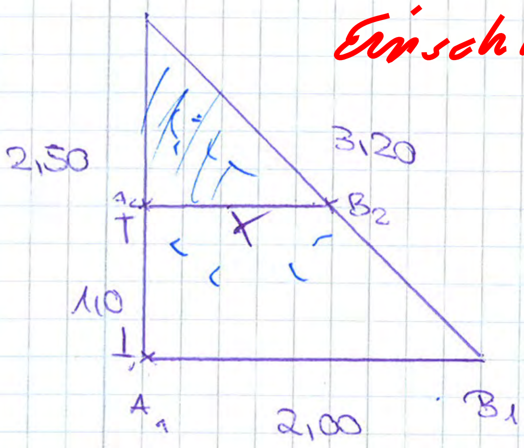
* Anmerkung Aufgabe:

$$-ax^2 + 4ax - 4a + 4 - x = 0 \quad | +4a - 4$$
$$-ax^2 + 4ax - x = 4a - 4$$
$$-ax^2 + x(4a-1) = 4a - 4 \quad | :-a$$
$$x^2 - \underbrace{\frac{4a-1}{+a}}_{:2 \to (\,)^2}\cdot x = \frac{4a-4}{-a}$$

(Quadratische Ergänzung)

weiter nächste Seite

Einschnitt



$$\frac{x}{200} = \frac{250-1}{2,50}$$

$$\frac{x}{250-1} = \frac{2}{2,50}$$

Strahlensatz ∇

8	+ 13	= 21	
16	+ 26	= 42	
24	39	= 63	
32	52	= 84	
40	$\boxed{65}$	= 105	
48	78	= 126	
56	91	= 147	
$\boxed{64}$	104	= 168	
72	117	= 189	
80	130	= 210	
88			
96			
104			
112			
120			
128			

1. $8 \cdot x$
2. $13 \cdot x$
3. $8x + 13x = 21x$
4. 13^x
5. 8^x
6. $13^x \cdot 8^x = 104^x$

$21x = 104^x \quad |:21$

$x = \frac{104^x}{21}$

Er kann alle Beträge auszahlen, die durch 8, 13 oder 21 teilbar sind.

$-ax^2 + 4ax - 4a + 4 - x = 0 \quad | +4a-4$

$-ax^2 + 4ax - x = +4a-4$

$x(-ax + 4a - 1) = - - ..$

unbrauchbar

oder $-ax^2 + x\cdot(4a-1) = 4a-4 \quad |:-a$

$x^2 - \frac{(4a-1)}{a}\cdot x = \frac{4a-4}{-a}$

Gehört zur Üb. Parabel, Iterierte
Warum steht das hier???? aber so!!!!! geht es zuende:

$-ax^2 + 4ax - 4a + 4 - x = 0$

$-ax^2 + 4ax - x = 4a - 4 \quad |:(-a)$

$x^2 - \frac{4a-1}{a}x + \left(\frac{4a-1}{2a}\right)^2 = \frac{4a-4}{-a} + \frac{(4a-1)^2}{(2a)^2}$

$\left(x - \frac{4a-1}{2a}\right)^2 = \frac{1}{4a^2}\left(-4a(4a-4) + 16a^2 - 8a + 1\right)$

$x = \frac{4a-1}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{8a+1}$

Russischer Zahlmeister --- ein hübsches Zahl-Problem

Der russische Zahlmeister hat zwei schier unerschöpfliche Geldsäcke, einer enthält ausschließlich 8-Rubel-Münzen, der andere nur 13-Rubel-Münzen. Welche Geldbeträge kann er auszahlen, welche nicht?

Zum Beispiel kann er 50 Rubel =3* 8 + 2* 13 auszahlen. 20 Rubel kann er sicher nicht auszahlen. Mathix behauptet, es gebe einen „Grenzbetrag“, von dem an jeder größere Betrag auszahlbar ist. Probieren Sie systematisch und notieren Sie passende Kombinationen. Finden Sie den „Grenzbetrag“ von Mathix oder wird es immer wieder nicht auszahlbare Beträge geben?

Russischer Zahlmeister 5. Stunde 08.04.09

a 8 ; b 13 sicher

c (8 + 13) <— speziel, allg: $\boxed{a\,8 + b\,13}$ Linearkombination aus 8 und 13

3 · 13 + 1 => auszahlbar, genauso: 8 · 8 + 1

= 40 -> 5 · 8 = 65 -> 5 · 13

Ab einer Zahl N ist jeder Betrag auszahlbar.

Beweis vollständige Induktion

I: Verankerung:

(52 ist auszahlbar), $\boxed{84}$ = 4 8 + 4 13

II: Annahme: n > $\boxed{}$ ist auszahlbar

III: Ziel: n+1 ist auszahlbar

IV: n ⇝ n+1

Wenn die Auszahlung von n = 3 13 erhält, dann nehme ich die 13ner weg und lege 5 · 8 hin. So gelange ich von 39 -> 40.
So ist n+1 ausgezahlt. Das Gleiche gilt für n = 8 8 dann nehme ich die 8er weg und lege 5 · 13 hin.

Beides nicht enthalten: n ≤ 2 · 13 + 7 8 = $\boxed{82}$

↓ letzte nicht auszahlbare Zahl

	8	13
85	9 - 8 8er	1 + 5 13er
86	1 + 5 8er	6 - 3 13er
87	6	3

www: Teilbarkeitsaussagen u. vollständige Induktion (PDF)

⇒ von je 3 Typen 1 machen ⇒ am Dienstag abgeben

18.04.11

Russischer Zahlmeister --- ein hübsches Zahl-Problem

Der russische Zahlmeister hat zwei schier unerschöpfliche Geldsäcke, einer enthält ausschließlich 8-Rubel-Münzen, der andere nur 13-Rubel-Münzen. Welche Geldbeträge kann er auszahlen, welche nicht?

Zum Beispiel kann er 50 Rubel =3* 8 + 2* 13 auszahlen. 20 Rubel kann er sicher nicht auszahlen. Mathix behauptet, es gebe einen „Grenzbetrag", von dem an jeder größere Betrag auszahlbar ist. Probieren Sie systematisch und notieren Sie passende Kombinationen. Finden Sie den „Grenzbetrag" von Mathix oder wird es immer wieder nicht auszahlbare Beträge geben?

Seite aus 2011 hier eingefügt, Vorlage im Web., Thema auch 2009

Er kann auszahlen:

$3327 = 8 \cdot 8 + 251 \cdot 13$ *

$3328 = 256 \cdot 13$

$3329 = 5 \cdot 8 + 253 \cdot 13$

$3330 = 10 \cdot 8 + 250 \cdot 13$

Induktions-schritt

Gedanken-schritt

↳ gedankliches Beweisschema

$1 = -3 \cdot 13 + 5 \cdot 8$
$= -39 + 40$

$1 = 5 \cdot 13 - 8 \cdot 8$
$= 65 - 64$

oder $3328 = 13 \cdot 8 + 248 \cdot 13$

Induktionsverankerung: das erste Ergebnis muss stimmen *

$82 = 7 \cdot 8 + 2 \cdot 13$

83 = geht nicht

$84 = 4 \cdot 8 + 4 \cdot 13$

8 8er weg oder 3 13er weg geht nicht

Beh.: Ab 84 kann jeder Betrag ausgezahlt werden

$\boxed{\text{Russischer Zahlmeister}}$

Probiere, welche Summen er auszahlen kann
Ab welchem Betrag kann er alles auszahlen?

5 8

Rubelsorten, die er hat.

Suche Vielfache mit Unterschied 1

$3 \cdot 5 = 15 \quad 2 \cdot 8 = 16$

$3 \cdot 8 = 24 \quad 5 \cdot 5 = 25$

Hufnagel 09
nach Stowasser 78

gar nicht Tauschen kann man, wenn man weder 3 (5) noch 3 (8) hat

also $2 \cdot 5 + 2 \cdot 8 = 26$ also kommt man nicht auf $\boxed{27}$

$28 = 4 \cdot 5 + 1 \cdot 8$

Induktions Anfang, Verankerung.

n sei ausgezahlt

Wenn das mit 3 (5) geschehen ist,
nehme man nun 2 (8) dafür ⇒
Wenn das mit 3 (8)
nehme man nun 5 (5) ⇒

$\Big\}$ n+1 ist ausgezahlt

---

8 13

$3 \cdot 13 = 39 \quad 5 \cdot 8 = 40$

$8 \cdot 8 = 64 \quad 5 \cdot 13 = 65$

nicht tauschbar $2 \cdot 13 + 7 \cdot 8 = 26 + 56 = 82$

also $\boxed{83}$ nicht auszahlbar

ab 84 ist alles auszahlbar.

$84 = 4 \cdot 8 + 4 \cdot 13$ ← Ind. Anfang
Verankerung.

Vielfachsummendarstellung. $1 = 5 \cdot 13 - 8 \cdot 8$

$1 = 5 \cdot 13 - 8 \cdot 13 + 8 \cdot 13 - 8 \cdot 8$

die andere VSD $1 = -3 \cdot 13 + 5 \cdot 8$

Vielfachsummendarstellung wird mit Erweiterten Euklidischen Algorithmus erzeugt, siehe Vorl. Krypto

Russischer Zahlmeister, allgemein

Münzen a b $\quad 1 = ra + sb$

$\mathrm{ggT}(a,b)=1 \quad \exists\ r\,s\,D \quad$ oBdA $\begin{matrix} s<0 \\ r>0 \end{matrix}$

Beh: $\boxed{\begin{array}{ll} \varphi := (a-1)(b-1) & \text{ist auszahlbar} \\ n > \varphi & \text{" "} \\ \varphi - 2 & \text{" "} \end{array}}$ aber lässt den Induktionsschritt nicht zu

Bew: $\varphi = (a-1)(b-1)$

$$= ab - a - b + 1 = ab - a - b + ra + sb$$

$$= \underbrace{(r-1)}_{>0}a + \underbrace{(s-1+a)}_{\substack{>0 \\ \text{wenn } s<0}}b = \underbrace{(r-1-b)}_{\substack{>0 \\ \text{wenn } r<0}}a + \underbrace{(s-1)}_{>0}b$$

$\Rightarrow \varphi$ auszahlbar

$s<0 \Rightarrow (-s)b \longrightarrow ra$

der andere Tausch $1 = ra - ab + ab + sb$

$$= \underbrace{(r-b)}_{<0}a + \underbrace{(s+a)}_{>0}b$$

$(b-r)a \longrightarrow (s+a)b$

Der Induktionsschritt klappt nicht, wenn beide Tauschvorgänge nicht gehen

$(-s-1)b + (b-r)a = -sb - ra - b + ab - a$

$= -(sb+ra) - a - b + ab = ab - a - b - 1 = \varphi - 2$

qed.

Ha 09

a	b	φ	$\varphi-2$		$1 = ra + sb$
7	9	$6 \cdot 8 = 48$	46	~~47~~	$1 = 4 \cdot 9 - 5 \cdot 7$
					$1 = -3 \cdot 9 + 4 \cdot 7$

Haftendorn 06

Vollständige Induktion

Beweisverfahren, mit dem man zeigen kann, dass eine Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (oder $\forall n \in T \subseteq \mathbb{N}$)

Gegeben ist ein Zusammenhang, ein Prozess, ein Verfahren o.ä. bei dem die die Aussage $A(n)$ durch * "Induktion" (= Raten, Hingucken, Idee ...) gewonnen wird. In "Aufgaben" wird $A(n)$ gegeben.

* "nur" Induktion im eigentl. Sinn

"vervollständigte" Induktion

IV ① Verankerung: Man zeigt, dass $A(1)$ wahr ist (oder $A(start)$)

IA ② Man nimmt an, dass $A(n)$ für irgendein n wahr ist und man notiert auch „das Ziel" $A(n+1)$. Dieser Schritt (Schritt) Induktionsannahme

IS ③ Schritt von n auf $n+1$ $\boxed{n \rightsquigarrow n+1}$

Man zeigt, dass auch $A(n+1)$ eine wahre Aussage ist, wenn $A(n)$ eine Aussage ist.

Dabei bestimmt man $A(n+1)$ aus dem Gegebenen Zusammenhang (Verfahren ...) so, achtet darauf, dass $A(n)$ "auftritt" und verwendet dann die vorausgesetzte Wahrheit von $A(n)$

Beispiel $A(n)$: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} n(n+1)$

① $n=1$ $\quad 1 \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} 1(1+1) = 1$ IV

$1 = 1$ wahre A.

② IA Ziel $\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$

③ IS $n \to n+1$ $\quad \sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \underset{JA}{=} \frac{1}{2} n(n+1) + n+1 = (\frac{1}{2} n + 1)(n+1)$

$= \frac{1}{2}(n+2)(n+1)$ qed

lern-vollst-induktion.pdf

Teilbarkeit, Beweis mit vollständiger Induktion

Behauptung $\boxed{6 \mid 7^n - 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ Ha 06

Erklärung: $a \mid b \iff \exists k \in \mathbb{N} : a \cdot k = b$
$a, b \in \mathbb{N}$, lies "a teilt b" $13 \mid 91$, denn mit $k = 7 \in \mathbb{N}$ $13 \cdot k = 91$

Beweis mit Vollständiger Ind.:
Verankerung: $n = 1$ $6 \mid 7^1 - 1 = 6$ wahre Aussage $6 \cdot 1 = 6$

Noch ein paar Proben um besser zu verstehen
$n = 2$ $6 \mid 49 - 1 \iff 6 \mid 48$ w. A. $n = 3$ $6 \mid 342$ wahr $k = 57$ und $6 \cdot 57 = 342$

IA $6 \mid 7^n - 1 \iff \exists k \in \mathbb{N} : 6 \cdot k = 7^n - 1$

Ziel: $6 \mid 7^{n+1} - 1 \iff \exists k^* : 6 \cdot k^* = 7^{n+1} - 1$

$n \rightsquigarrow n+1$ $7^{n+1} - 1 = 7^n \cdot 7 - 1 \underset{IA}{=} (6k+1) 7 - 1 = 6 \cdot 7k + 7 - 1$

$= 6 \cdot 7k + 6 = 6(\underbrace{7k+6}_{\in \mathbb{N}, \text{ da } k \in \mathbb{N}}) = 6 \cdot k^*, \; k^* \in \mathbb{N}$ q.e.d.

Reiche Aufgabenquelle, denn es gilt:
$r \mid (r+1)^n - 1$

Direkter Beweis mit Auflösen der Klammer,
linke Seite $= (r+1)^n - 1 = r^n + n r^{n-1} + \dots + n r + 1 - 1$
↑ aus Pascal Dreieck

$= r(\underbrace{r^{n-1} + n r^{n-2} + \dots + n}_{\in \mathbb{N}}) = r \cdot k$ mit $k \in \mathbb{N}$

qed

Betrachtung: Dieser Beweis ist eleganter.
Dafür kann man mit obigem Beweis "Vollst. Induktion" üben und hat noch Transferaufgaben.

$10 \mid 11^n - 1$

Hier ist auch eine Endziffernüberlegung möglich.

$12 \mid 13^n - 1$ u.s.w.

Teilbarkeitsaussagen und Vollständige Induktion

Definition: $a,b\in\mathbb{Z}:\quad a \text{ teilt } b \Leftrightarrow a\,|\,b \Leftrightarrow \exists\, k\in\mathbb{Z}: a\cdot k=b$

Behauptung: $\boxed{\forall n:\quad 3\,|\; n^3-n}$

Beweis: Induktions-**Verankerung** (IV) $\quad n=1\;\; re=1-1=0,\;\; 3\cdot 0=0, 3\,|\,0\;\; o.k.$

Induktions-**Annahme**:(IA) bis n gilt: $\quad 3\,|\; n^3-n,$ also $\exists k\in\mathbb{Z}:\; 3\cdot k = n^3-n$

Induktions –**Ziel**:

für $n+1$ gilt: $\quad 3\,|\;(n+1)^3-(n+1),$ also $\exists r\in\mathbb{Z}:\; 3\cdot r=(n+1)^3-(n+1)$

Induktions-**Schritt** $n\to n+1$

$$\text{rechte Seite}=(n+1)^3-(n+1)=n^3+3n^2+3n+1-n-1$$

$$=n^3-n+3(n^2+n)\underset{IA}{=}3\cdot k+3(n^2+n)=3\cdot\left(\underbrace{k+n^2+n}_{\in\mathbb{Z}}\right)$$

Die Klammer ist also das *r* aus dem Ziel. quod erat demonstrandum q.e.d.

Aufgaben

Von den folgenden Aussagen sind einige richtig und einige falsch. Bei den richtigen wird Ihnen die Vollständige Induktion gelingen, bei den falschen klappt entweder die Verankerung nicht, während der Induktionsschritt gelingt, oder die Verankerung gelingt, aber der Induktionsschritt gelingt nicht.

Zum Abgeben: jeder Typ einmal und der Beweis der allgemeinen Aussage.

A $2\,|\,n^2+n$	**B** $2\,|\,3^n+4$	**C** $6\,|\,7^n-1$	**D** $(a-1)\,|\,(a^n-1)$	**E** $11\,|\,12^n-1$
F $6\,|\,n^3+5n$	**G** $3\,|\,4\cdot n^3-n$	**H** $6\,|\,n^3-7n$	**J** $5\,|\,n^3-2n+6$	**K** $10^n \underset{18}{\equiv} 4$

L

Was gilt anstelle von K wirklich?

Teilbarkeitsaussagen und vollständige Induktion Lösungen (Studi) !

Aufgabe A

Behauptung: $\forall n: 2 \mid n^2 + n$

Induktionsverankerung:

$n = 1$; rechte Seite: $1^1 + 1 = 2 \rightarrow 2 \mid 2$ ✓ o.k.

$n = 2$; rechte Seite: $2^1 + 2 = 4 \rightarrow 2 \mid 4$ ✓ o.k.

Induktionsannahme: bis n gilt:

$2 \mid n^2 + n \iff \exists k \in \mathbb{N}: \quad 2 \cdot k = n^2 + n$

Induktionsziel: für n + 1 gilt:

$2 \mid (n+1)^2 + (n+1) \iff \exists k^* \in \mathbb{N}: \quad 2 \cdot k^* = (n+1)^2 + (n+1)$

Induktionsschritt: $n \mapsto (n+1)$

Rechte Seite:

$(n+1)^2 + (n+1) = n^2 + 2n + 1 + n + 1$

$= n^2 + n + 2n + 2$

$= 2 \cdot k + 2n + 2 = 2\,(k + n + 1)$ $\qquad (k + n + 1) = k^* \in \mathbb{N}$ q.e.d.

Aufgabe B

Behauptung: $\forall n: 2 \mid 3^n + 4$

Induktionsverankerung:

$n = 1$; rechte Seite: $3^1 + 4 = 7 \rightarrow 2 \mid 7$ falsch

$n = 2$; rechte Seite: $3^2 + 4 = 13 \rightarrow 2 \mid 13$ falsch

JV gelingt nicht

Induktionsannahme: bis n gilt:

$2 \mid 3^n + 4 \iff \exists k \in \mathbb{N}: \quad 2 \cdot k = 3^n + 4$ $\quad k > 1$

Induktionsziel: für n + 1 gilt:

$2 \mid 3^{(n+1)} + 4 \iff \exists k^* \in \mathbb{N}: \quad 2 \cdot k^* = 3^{(n+1)} + 4$ $\quad , k^* > 1$

Induktionsschritt: $n \mapsto (n+1)$

Rechte Seite:

$3^{(n+1)} + 4 = (3^n \cdot 3) + 4$

$= (2 \cdot k - 4) \cdot 3 + 4$

$= 6 \cdot k - 12 + 4$

$= 6 \cdot k - 8$

$= 2\,(3 \cdot k - 4)$ $\qquad (3 \cdot k - 4) = k^* \in \mathbb{N}$ ~~q.e.d.~~ JS gelingt

Beweis mit vollst. Ind. also nicht gelungen

Teilbarkeitsaussagen und vollständige Induktion Lösungen (Studi)

Aufgabe C (Spezialfall von D)

Aufgabe D

Behauptung: $\forall n: (a-1) \mid (a^n - 1)$

Induktionsverankerung:

$n = 1$; rechte Seite: $(a^1 - 1) = (a-1) \rightarrow (a-1) \mid (a-1)$ ✓ o.k.

$n = 2$; rechte Seite: $(a^2 - 1) = (\cancel{a^2 - 1}) \rightarrow (a-1) \mid (a^2-1)$ ✓ o.k.

$(a-1)(a+1) = (a^2 - 1)$

Induktionsannahme: bis n gilt:

$(a-1) \mid (a^n - 1) \quad \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}: \quad (a-1) \cdot k = (a^n - 1)$

Induktionsziel: für $n + 1$ gilt:

$(a-1) \mid (a^{(n+1)} - 1) \quad \Leftrightarrow \exists k^* \in \mathbb{N}: \quad (a-1) \cdot k^* = (a^{(n+1)} - 1)$

Induktionsschritt: $n \mapsto (n+1)$

Rechte Seite:

$(a^{(n+1)} - 1) = (a^n \cdot a) - 1$

$= ((a-1) \cdot k + 1) \cdot a - 1 = (ak - k + 1) \cdot a - 1$

$= a^2 \cdot k - a \cdot k + a - 1$

$= (a-1)(ka+1) \qquad (ka+1) = k^* \in \mathbb{N}$ q.e.d.

Aufgabe E (Spezialfall von D)

Aufgabe F

Behauptung: $\forall n: 6 \mid n^3 + 5n$

Induktionsverankerung:

$n = 1$; rechte Seite: $1^3 + 5 \cdot 1 = 6 \rightarrow 6 \mid 6$ ✓ o.k.

$n = 2$; rechte Seite: $2^3 + 5 \cdot 2 = 18 \rightarrow 6 \mid 18$ ✓ o.k.

Induktionsannahme: bis n gilt:

$6 \mid n^3 + 5n \quad \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}: \quad 6 \cdot k = n^3 + 5n$

Induktionsziel: für $n + 1$ gilt:

$6 \mid (n+1)^3 + 5(n+1) \quad \Leftrightarrow \exists k^* \in \mathbb{N}: \quad 6 \cdot k^* = (n+1)^3 + 5(n+1)$

Induktionsschritt: $n \mapsto (n+1)$

Rechte Seite:

$(n+1)^3 + 5(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5$

$= n^3 + 5n + 3n^2 + 3n + 1 + 5$

$= 6 \cdot k + 3n^2 + 3n + 6$

$= 6 \cdot k + 3(n^2 + n + 2)$

Teilbarkeitsaussagen und vollständige Induktion Lösungen (Studi)

$= 6\,(k + \frac{1}{2}(n^2 + n + 2))$ $\quad (k + \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)) = k^* \in \mathbb{N}$ q.e.d.

$= k + \underbrace{\frac{n(n+1)}{2}}_{\text{Gaußzahl} \in \mathbb{N}} + 1 \in \mathbb{N}$

Aufgabe G

Behauptung: $\forall n: 3 \mid 4n^3 - n$

Induktionsverankerung:

$n = 1$; rechte Seite: $4 \cdot 1^3 - 1 = 3 \rightarrow 3 \mid 3$ ✓ o.k.

$n = 2$; rechte Seite: $4 \cdot 2^3 - 2 = 30 \rightarrow 3 \mid 30$ ✓ o.k.

Induktionsannahme: bis n gilt:

$3 \mid 4n^3 - n \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{N}: \quad 3 \cdot k = 4n^3 - n$

Induktionsziel: für $n + 1$ gilt:

$3 \mid 4 \cdot (n+1)^3 - (n+1) \quad \Leftrightarrow \quad \exists k^* \in \mathbb{N}: \quad 3 \cdot k^* = 4 \cdot (n+1)^3 - (n+1)$

Induktionsschritt: $n \mapsto (n+1)$

Rechte Seite:

$4 \cdot (n+1)^3 - (n+1) = 4 \cdot (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - (n + 1)$

$= 4 \cdot n^3 + 12n^2 + 12n + 4 - n + 1$

$= 4 \cdot n^3 - n + 12n^2 + 12n + 3$

$= 3 \cdot k \quad + 3\,(4n^2 + 4n + 1)$

$= 3\,(k + 4n^2 + 4n + 1) \quad (k + 4n^2 + 4n + 1) = k^* \in \mathbb{N}$ q.e.d.

Aufgabe H

Behauptung: $\forall n: 6 \mid n^3 - 7n$

Induktionsverankerung:

$n = 1$; rechte Seite: $1^3 - 7 \cdot 1 = -6 \rightarrow 6 \mid -6$ ✓ o.k.

$n = 2$; rechte Seite: $2^3 - 7 \cdot 2 = -6 \rightarrow 6 \mid -6$ ✓ o.k.

Induktionsannahme: bis n gilt:

$6 \mid n^3 - 7n \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \cancel{\mathbb{N}}\,\mathbb{Z}: \quad 6 \cdot k = n^3 - 7n$

Induktionsziel: für $n + 1$ gilt:

$6 \mid (n+1)^3 - 7 \cdot (n+1) \quad \Leftrightarrow \quad \exists k^* \in \cancel{\mathbb{N}}\,\mathbb{Z}: \quad 6 \cdot k^* = (n+1)^3 - 7 \cdot (n+1)$

Induktionsschritt: $n \mapsto (n+1)$

Rechte Seite:

$(n+1)^3 - 7 \cdot (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 7n - 7$

$= n^3 - 7n + 3n^2 + 3n + 1 - 7$

$= 6 \cdot k + 3n^2 + 3n - 6 = 6 \cdot k \quad + 3\,(n^2 + n - 2)$

Teilbarkeitsaussagen und vollständige Induktion Lösungen (Studi)

$= 6\,(k + \frac{1}{2}\,(n^2 + n - 2)$ $(k + \frac{1}{2}\,(n^2 + n - 2) = k^* \in \cancel{\mathbb{N}}$ $\mathbb{Z}$ q.e.d.

$6\,(\underbrace{k + \frac{n(n+1)}{2} - 1}_{\text{ganz Zahl},\ \in \mathbb{N}})$

Aufgabe J

Behauptung: $\forall n: 5 \mid n^3 - 2n + 6$

Induktionsverankerung:

n = 1; rechte Seite: $1^3 - 2 \cdot 1 + 6 = 5 \rightarrow 5 \mid 5$ ✓ o.k.

n = 2; rechte Seite: $2^3 - 2 \cdot 2 + 6 = 10 \rightarrow 5 \mid 10$ ✓ o.k.

Induktionsannahme: bis n gilt:

$5 \mid n^3 - 2n + 6 \iff \exists k \in \mathbb{N}: \quad 5 \cdot k = n^3 - 2n + 6$

Induktionsziel: für n + 1 gilt:

$5 \mid (n+1)^3 - 2 \cdot (n+1) + 6 \iff \exists k^* \in \mathbb{N}: \quad 5 \cdot k^* = (n+1)^3 - 2 \cdot (n+1) + 6$

Induktionsschritt: $n \mapsto (n+1)$

Rechte Seite:

$(n+1)^3 - 2 \cdot (n+1) + 6 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 2n - 2 + 6$

$= n^3 - 2n + 6 + 3n^2 + 3n + 1 - 2$

$= 5 \cdot k \quad + 3n^2 + 3n - 1$

$= 5 \cdot k \quad + 3\,(n^2 + n - \frac{1}{3})$

$= 5\,(\underbrace{k + \frac{3}{5}\,(n^2 + n - \frac{1}{3})}_{k^*})$ $\cancel{(k + \frac{1}{2}\,(n^2 + n - 2)} = k^* \notin \mathbb{N}$

i.A. ist k^* nicht aus $\mathbb{N}$ IS gelingt nicht

Aufgabe ~~K~~

Behauptung: $\forall n: 10^n \underset{18}{\equiv} 4$

Induktionsverankerung:

n = 1; rechte Seite: $10^1 \underset{18}{\equiv} 10 \quad 10 \neq 4$

n = 2; rechte Seite: $10^2 \underset{18}{\equiv} 10 \quad \cancel{10 \neq 4}$ also denn $11 \cdot 18 + 10 = 100$, $10 \underset{18}{\not\equiv} 4$

Also eine neue Behauptung: $\boxed{\forall n: 10^n \underset{18}{\equiv} 10}$

Gleichzeitig als Induktions~~annahme~~ verankerung verwendet!

Induktionsziel: für n + 1 gilt:

$10^{(n+1)} \underset{18}{\equiv} 10$

Induktionsschritt: $n \mapsto (n+1)$

Rechte Seite:

$10^{(n+1)} \underset{18}{\equiv} 10^n \cdot 10 \underset{18}{\equiv} 10 \cdot 10 \underset{18}{\equiv} 100 \underset{18}{\equiv} 10$ q.e.d.

$n \to n+1$ für $\boxed{10^n \equiv 4}$

$10^{n+1} \underset{18}{\equiv} 10^n \cdot 10 \underset{18}{\equiv} 4 \cdot 10$

$\equiv 40 \equiv 36 + 4 \underset{18}{\equiv} 4$

IS gelingt
IV nicht

Jara v.d. Harel - 3008018 - 08.04.09

Teilbarkeitsaussagen u. vollständige Induktion

A) I.V : $n = 1$ re $= 1^2 + 1 = 2$; $2 \cdot 1 = 2$ o.k.

IA: bis n gilt $2 \mid n^2 + n$, also $\exists k \in \mathbb{Z} : 2 \cdot k = n^2 + n$

IZ: für n+1 gilt: $2 \mid (n+1)^2 + (n+1)$, also $\exists r \in \mathbb{Z} : 2 \cdot r = (n+1)^2 + (n+1)$

Schritt $n \rightsquigarrow n+1$:

rechte Seite $= n^2 + 2n + 1 + n + 1 = n^2 + n + 2n + 2 = \underbrace{n^2 + n}_{2 \cdot k} + 2(n+1)$

$= 2 \cdot \underbrace{(k + n + 1)}_{\in \mathbb{Z}}$ q.e.d.

B) IV: $n = 1$ re $= 3^1 + 4 = 7$; $2 \cdot x = 7$ geht nicht

$n = 2$ re $= 3^2 + 4 = 13$ $2 \cdot x = 13$ geht nicht

$n = 3$ re $= 3^3 + 4 = 31$ $2 \cdot x = 31$ geht nicht

C) IV : $n = 1$ re $= 7^1 - 1 = 6$; $6 \cdot 1 = 6$ o.k

IA : bis n gilt $6 \mid 7^n - 1$, also $\exists k \in \mathbb{Z} : 6 \cdot k = 7^n - 1 \Leftrightarrow 6k - 1 = 7^n$

IZ : für n+1 gilt: $6 \mid 7^{n+1} - 1$, also $\exists r \in \mathbb{Z} : 6 \cdot r = 7^{n+1} - 1$

Schritt $n \longrightarrow n+1$:

rechte Seite $= 7^{n+1} - 1 = 7^n \cdot 7^1 - 1 = (6k - 1) \cdot 7 + 1 = 6 \cdot k \cdot 7 - 7 + 1$

$= 6 \cdot 7 \cdot k - 6 = 6 \cdot \underbrace{(7k + 1)}_{\in \mathbb{Z}}$ q.e.d.

(A) links rechts

Induktionsverankerung IV : $n = 1$ $2 \cdot 0 = 0$ $0^2 + 0 = 0$ ok

Annahme. $2 \cdot k = n^2 + n$

Ziel: $n+1$ gilt: $2 \mid (n+1)^2 + (n+1)$, also $2 \cdot k = (n+1)^2 + (n+1)$

Schritt: $n \leadsto n+1$:

$$(n^2 + 2n + 1) + n + 1 = n^2 + 2n + 2 + n = \underbrace{n^2 + n}_{2k} + 2(n+1)$$

$$= 2 \underbrace{(k + n + 1)}_{\in \mathbb{Z}}$$

q.e.d.

(B) $2 \mid 3^n + 4 \Rightarrow 2 \cdot n = 3^n + 4$

IV: $n = 1$ $2 \cdot 1 = 2$; $3^1 + 4 = 7$ $n = 0$ $2 \cdot 0 = 0$, $3^0 + 4 = 5$

$n = 2$ $2 \cdot 2 = 4$; $3^2 + 4 = 13$

$n = 3$ $2 \cdot 3 = 6$; $3^3 + 4 = 31$

(C) $6 \mid 7^n - 1$ $6 \cdot n = 7^n - 1$

IV: $n = 1$: $6 \cdot 1 = 6$; $7^1 - 1 = 6$ o.k.

IA: $6 \cdot k = 7^n - 1$

IZ: $6 k^* = 7^{n+1} - 1$

Schritt: $7^{n+1} - 1 = 7^n \cdot 7^1 - 1 = 7^n \cdot 7 - 1$ $= 6(1^n \cdot 1)$

$7^1 \cdot \underbrace{7^n - 1}_{6(k}$

$3 \cdot k = n^3 - n$

$(n+1)^3 - (n+1)$

$= n^3 + 3n^2 + 3n \cancel{+1} - n \cancel{-1}$

$\underbrace{n^3 - n}_{3 \cdot k} + 3(n^2 + n)$

(D) IV: $(a-1)\cdot k = (a^n - 1)$

$n = 1 \quad a-1 = a^1 - 1 \quad$ o.k.

IA $(a-1)\cdot k = (a^n - 1) \quad \Leftrightarrow (a-1)k + 1 = a^n$

IZ: für $n+1$ gilt: $k\cdot(a-1) = a^{n+1} - 1$

Schritt $n \to n+1$:

(2) $a^{n+1} - 1 = \underbrace{a^n}_{k} \cdot a^1 - 1 \quad = [(a-1)\cdot k + 1]\, a^{\xi} - 1$

$[ak - k + 1]\cdot a - 1 = a^2 k - ak + a - 1$

(E) $11 \mid 12^n - 1$

IV: $n = 1$; $12^1 - 1 = 11$; $11\cdot 1 = 11 \quad$ ok.

IA: $11\cdot k = 12^n - 1 \quad \Leftrightarrow 12^n = 11k + 1$

IZ: $11k = 12^{n+1} - 1$

Schritt: $12^{n+1} - 1 = 12^n \circ 12^1 - 1 = (11k + 1)\cdot 12 - 1 = 11\cdot k\cdot 12 + 12 - 1$

$= 12k\cdot 11 + 11 = 11\underbrace{(12k + 1)}_{\in \mathbb{Z}}$ q.e.d

(F) IV: $n = 1$: $1^3 + 5\cdot 1 = 6$; $6\cdot 1 = 6$ o.k.

IA: $6\cdot k = n^3 + 5n$

IZ: $6k = (n+1)^3 + 5(n+1)$

Schritt: $n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5 = \underbrace{n^3 + 5n}_{6\cdot k} + 3n(n+1) + 5$

$= 6k + 3n^2 + 3n + 5$

(G) $3 \mid 4\cdot n^3 - n$

IV: $n = 1$: $4\cdot 1^3 - 1 = 3$; $3\cdot 1 = 3$ o.k.

IA: $3\cdot k = 4n^3 - n$

IZ: $3k = 4\cdot(n+1)^3 - (n+1)$

Schritt: $4\cdot(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - n - 1 = 4n^3 + 12n^2 + 12n + 4 - n - 1$

$= \underbrace{4n^3 - n}_{3\cdot k} \underbrace{+ 12n^2 + 12n + 3}_{3\cdot(4n^2 + 4n + 1)} = 3\cdot\underbrace{(k + 4n^2 + 4n + 1)}_{\in \mathbb{Z}}$ q.e.d.

(H) IV: $n=1$ $\quad 1^3 - 7 \cdot 1 = -6$, $6 \cdot 1 = 6$

$n=2 \quad 2^3 - 7 \cdot 2 \neq 6 \cdot 2$

(J) IV: $n = 1 \quad 1^3 - 2 \cdot 1 + 6 = 1 - 2 + 6 = 5$, $5 \cdot 1 = 5$ o.k.

IA: $5 \cdot k = n^3 - 2n + 6$

IZ: $5 \cdot k = (n+1)^3 - 2 \cdot (n+1) + 6$

Schritt: $n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 2n - 2 + 6$

$= \underbrace{n^3 - 2n + 6}_{5 \cdot k} + 3n^2 + 3n - 1$

(k) IV: $n = 1 \quad 10^1 \underset{18}{\equiv} 4$

(C) $\quad 6 \mid 7^n - 1 \qquad 6k = 7^n - 1$

IA: $\quad 6k = 7^n - 1 \quad | +1$

$6k + 1 = 7^n$

Schritt $k = 7^{n+1} - 1 = 7^n \cdot 7^1 - 1$

$= (6k+1) \cdot 7^1 - 1$

$= 6 \cdot 7 \cdot k + \underbrace{7 - 1}_{6} \quad = 6 \underbrace{(7k+1)}_{\in \mathbb{Z}}$

(D)

Behauptung: $12 \mid 13^n - 1$

[def: $a \mid b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : a \cdot k = b$

es existiert ... mit den Eigenschaften dass

a teilt b ... genau dann wenn ... aus ... gilt.

6. Std.

Verank. $n=1$: rechts $= 13^1 - 1 = 12 = 12 \cdot 1 \in \mathbb{N}$

Üb: $n=2$: rechts $= 13^2 - 1 = 169 - 1 = 168 = 12 \cdot 14$

IA: $12 \mid 13^n - 1 \Leftrightarrow \exists k \; k \cdot 12 = 13^n - 1 \Leftrightarrow k \cdot 12 + 1 = 13^n$

IZ: $12 \mid 13^{n+1} - 1 \Leftrightarrow \exists k^* \; k^* \cdot 12 = 13^{n+1} - 1$

$n \rightarrow n+1$:

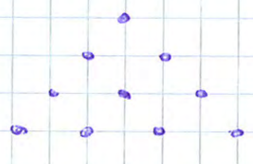
$\boxed{\text{Ziel} = k^* \cdot 12}$

$$re = 13^{n+1} - 1 = \underset{\text{IA??}}{13^n \cdot 13^1} - 1 \underset{\text{IA}}{=} (k \cdot 12 + 1) \cdot 13^1 - 1$$

$$= k \cdot 12 \cdot 13 + 13 - 1 = 12 \underbrace{(13k+1)}_{\in \mathbb{N}, \text{ da } k \in \mathbb{N}} = k^* \cdot 12$$

vollständige Induktion bei endlichen Summen

Figurische Zahl



1
3
6
10

Dreieckszahl

$S_n = 1 + 2 + \ldots + n$

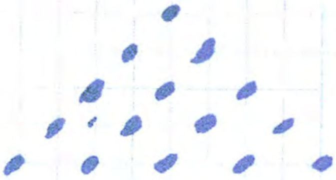
$$\begin{array}{l} 1 + 2, \ldots, 99 + 100 \\ 100 + 99 + \ldots + \quad + 1 \\ \hline 101 + 101 + \quad + 101 \end{array}$$

$2 \cdot S_{100} = 100 \cdot 100$

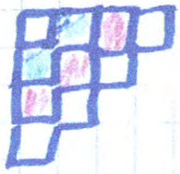
$S_{100} = \frac{100 \cdot 100}{2}$

14.04.09

Summe der natürlichen Zahlen



$1 \}\, 3 \}\, 6 \}\, 10 \}\, 15$



Haftendorn 09

$$1+2+3+\dots+n = \sum_{i=1}^{n} i =: s_n$$

$s_1 \quad s_2=3 \quad s_3=6 \quad s_4=10 \dots$

$$\langle s_n \rangle = \{1, 3, 6, 10, 15, \dots\}$$

Gauß

$$
\begin{array}{llcr}
 & 1 \quad 2 \quad 3 \;\dots\dots & +99+100 & = s_{100} \\
+ & 100+99+\dots & 2+1 & = s_{100} \\
 & 101+101+\dots & +101+101 & = 2\cdot s_{100}
\end{array}
$$

Also $2 \cdot s_{100} = 100 \cdot 101$

$$s_{100} = \frac{100 \cdot 101}{2}$$

analog

$$
\begin{array}{llcr}
 & 1 \quad +2+ & +n-1+n & = s_n \\
+ & n \quad +n-1 & +2 \quad +1 & = s_n \\
 & n+1 & n+1 \quad n+1 & = 2s_n
\end{array}
$$

$$2s_n = n\cdot(n+1)$$

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2} = \boxed{\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)}$$

Dreieckzahlen

1, 3, 6, 10 ...

, Gaußreihe

Gaußsumme

7. Std

Vollständige Induktion

14.04.2009

- gelingt nicht, wenn die Behauptung falsch ist.

Gegenbeispiele, die zeigen, dass Verankerung und!!!!! Induktionsschluss gelingen müssen

① Beh: n^2+n+1 ist gerade $\Leftrightarrow n^2+n+1 = 2k$

$n \to n+1$ Ziel $(n+1)^2+(n+1)+1 = 2\cdot r$

$li = n^2+2n+1+n+1+1 = 2k+2n+1+1 = 2\cdot\underbrace{(k+n+1)}_{r\in\mathbb{N}}$

→ Schritt ist gelungen

IV: $n=1$: $1+1+1$ unger. $\Rightarrow$ f. A.

$n=2$: "

$n=3$ "

Überlegen $n^2+n+1 = \underbrace{n(n+1)}_{\text{gerade}}+1$ } ungerade

② Behauptung: $6 \mid n^2+5n$

IV: $n=1$: $1^2+5\cdot1=6$ $6\cdot x=6$ also $n^2+5n=6\cdot k$

Ziel $n\to n+1$ $(n+1)^2+5\cdot(n+1) = 6\cdot r$

$li = n^2+2n+1+5n+5 = 6k+2n+6 = 6\underbrace{(k+\frac{1}{3}n+1)}_{\text{nicht immer } \in \mathbb{N}}$

$\mathbb{N} = 0,1,2$ positive ganze Zahlen

$\mathbb{Z} = -2,-1,0,1$ negative & positive ganze Zahl

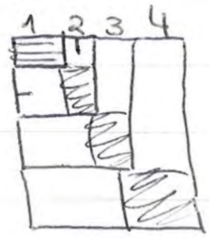
<u>Figurierte Zahl</u>

1, 3, 6 Gauß-Zahlen, Dreieckzahlen

$1+2+3+\ldots+n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ (sigma)

n	a_n
1	1
2	9
3	36
4	100

+8, +27, +64



$\Rightarrow$ dritte Potenzen: n^3

sicher ist: $a_n = \left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2$

unsicher ist: $a_n = 1+2^3+3^3+\ldots+(n)^3$

Summenformel, Beweis mit vollständiger Induktion

Behauptung: $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ HaO6

Die Summe der 3. Potenzen ist das Quadrat einer passenden Dreieckszahl, anschaulicher Beweis für den Unterricht steht unten.

Beweis mit vollst. Ind.

Verankerung: $n=1$ Rechte Seite $\frac{1}{4}\cdot 1^2(1+1)^2 = \frac{1}{4}\cdot 2^2 = 1 = 1^3$ linke S.

zum Verstehen: $n=2$ $\frac{1}{4}\cdot 2^2(2+1)^2 = \frac{4}{4}\cdot 9 = 9 = 1+8 = 1^3+2^3 =$ linke S.

IA $1+2^3+\dots n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

Ziel $1+2^3+\dots+(n+1)^3 = \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2$

$n \rightsquigarrow n+1$ linke Seite $\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \underbrace{1+\dots+n^3}+(n+1)^3$

$\overset{IA}{=} \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 + (n+1)^3$

$= \left(\frac{1}{4}n^2 + (n+1)\right)(n+1)^2$

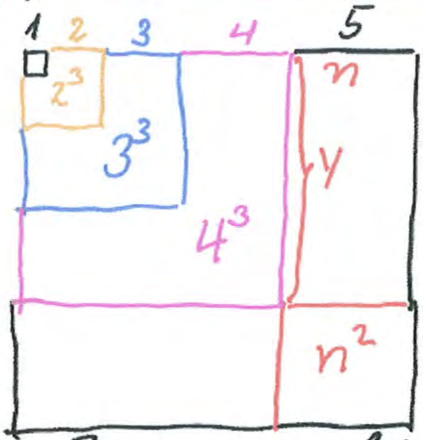
$= \frac{1}{4}\left(n^2+4(n+1)\right)(n+1)^2 = \frac{1}{4}(n^2+4n+4)(n+1)^2$

$= \frac{1}{4}(n+2)^2(n+1)^2$ q.e.d.

dies ist das Ziel gewesen.

Gauß $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)$

Anschaulicher Beweis:



← Konstruktion: Stets ein Kästchen mehr und daraus ein Quadrat zeichnen.
Die Quadratkanten sind also die Gaußzahlen (= Dreiecksz.)
$y = \frac{1}{2}(n-1)\cdot n$ Beim Schritt n kommt also ein ⅃ dazu mit
$2ny+n^2 = 2n\cdot\frac{1}{2}(n-1)n + n^2 = n^2(n-1+1) = n^3$

Zusammen folgt: $1+2^3+3^3+\dots+n^3 = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ q.e.d.

Betrachtung: für den Unterricht ist der untere Beweis besser. Es reicht aber nicht, nur zu beobachten, dass ⅃ n^3 Kästchen haben. (für einen Beweis)

Behauptung: $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 \overset{?}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Induktionsbeweis

Behauptung = IA $\qquad$ Ziel: $1+\ldots+n^3+(n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+1+1)^2}{4}$

Tabelle $\quad n \mid a_n$ = IV

$n \rightsquigarrow n+1 \qquad$ li $= 1+\ldots+n^3+(n+1)^3$

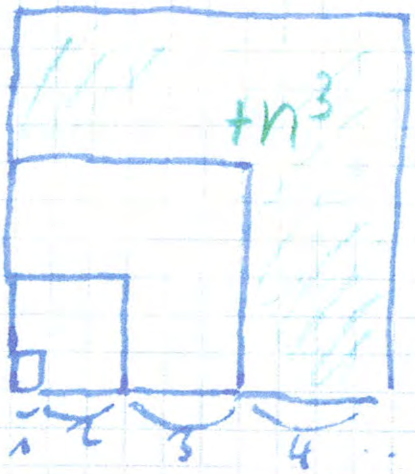
$\overset{IA}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$

$= \frac{(n+1)^2}{4}\left(n^2+4(n+1)\right) \qquad$ NR: $n^2+4n+4=(n+2)^2$

$= \frac{(n+1)^2\,(n+2)^2}{4} \qquad$ q.e.d.

14.04.09

$a_n = \sum_{i=1}^{n} \boxed{?} = (?)^2$



kubikzahlen.pdf

Summe der dritten Potenzen / der Kubikzahlen

Haftendorn 09

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = a_n}$$

Unten Gauß-kante

$a_n = a_{n-1} + n^3 \qquad a_1 = \underline{\underline{1}} \qquad \left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)^2 = 1^2 = \underline{\underline{1}}$

$a_2 = 1 + 2^3 = \underline{\underline{9}} \qquad \left(\frac{2\cdot 3}{2}\right)^2 = 3^2 = \underline{\underline{9}} \qquad$ IV

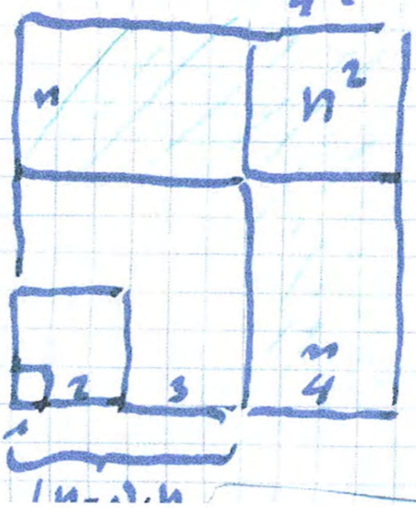
IA $\quad a_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \qquad$ Ziel $\quad a_{n+1} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$

$n \rightsquigarrow n+1$

$a_{n+1} = a_n + (n+1)^3 \underset{IA}{=} \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2 + (n+1)^3$

$= \frac{1}{4}(n+1)^2\left(n^2 + 4(n+1) \right) = \frac{1}{4}(n+1)^2\left(n^2+4n+4\right)$

$= \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 \qquad \underline{\underline{qed}}$



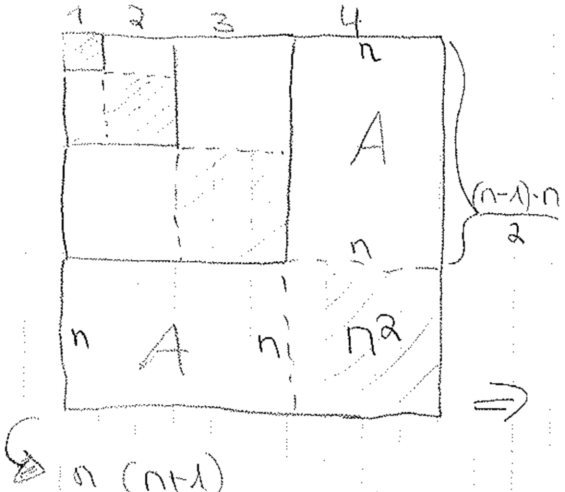
Angesetzter Winkel im Takt n

$= n^2 + 2\frac{(n-1)(n)}{2}\cdot n$

$= n^2 + (n-1)n^2$

$= n^2(1 + n - 1) = \underline{n^3}$

14.4.09



n	a_n	
1	1	$\downarrow +8$
2	9	$\downarrow +27$
3	36	$\downarrow +64$
4	100	

$\frac{n(n+1)}{2}$ = Breite

$$\Rightarrow \quad A\,A\,n^2 = n^2 + \overset{4+4}{2}\cdot \underbrace{\frac{(n-1)n}{2}}_{\text{Höhe}} \cdot \underbrace{n}_{\text{Breite}}$$

$$= n^2 + n^3 - n^2 = n^3 \quad \text{q.e.d.}$$

⇒ direkten, konstruktiven, geometrisch-algebraischen Beweis

verschiedene Beweistypen

Gesucht ist $T(n)$ mit:

$$1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = T(n)$$

5

9

$$an^3 + bn^2 + cn + d = T(n)$$

$1 : T(1) = a + b + c + d$
$5 : T(2) = 8a + 4b + 2c + d$
$14 : T(3) = 27a + 9b + 3c + d$
$30 : T(4) = 64a + 16b + 4c + d$

$a = \frac{1}{3}, \; b = \frac{1}{2}, \; c = \frac{1}{6}, \; d = 0$

selbst oder mit solve lösen

Übungen Vollst. Induktion
ggf. rekursive Formel $\longrightarrow$ explizite Formel

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1 + 2^2 + 3^2 + \dots n^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + \dots + n^2$$

Summe der Quadratzahlen

Formel selbst entwickeln:
Vermutung Polynom 3. Grades
=> aus vier Werten herstellen

Hartlieb 09

quadratzahlen.pdf

$a_1 = 1$ $\quad p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$a_2 = 5$ $\quad 1 = a + b + c + d$

$a_3 = 14$ $\quad 5 = 8a + 4b + 2c + d$

$a_4 = 30$ $\quad 14 = 27a + 9b + 3c + d$

$30 = 64a + 16b + 4c + d$

$a = \frac{1}{3} \quad b = \frac{1}{2} \quad c = \frac{1}{6} \quad d = 0$

$$a_n = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n)$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1)(2n+1)}$$

$2n^2 + 3n + 1 = 0$

$n^2 + \frac{3}{2}n + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = -\frac{1}{2} + \frac{9}{16}$

$n = -\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}$

$n = -1 \vee n = -\frac{1}{2}$

$(n+1)(n+\frac{1}{2}) \cdot 2$

$(n+1)(2n+1)$

IV klar bei dem Ansatz

IA $a_n = \frac{1}{6} n (n+1)(2n+1)$

$n \rightsquigarrow n+1$

Ziel $a_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)$

Rekursion sicher $a_{n+1} = a_n + (n+1)^2$

$$a_{n+1} = a_n + (n+1)^2 = \frac{1}{6}\left(n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2\right)$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6) = \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + 7n + 6) = *$$

NR $(n+2)(2n+3) = 2n^2 + 3n + 4n + 6 = 2n^2 + 7n + 6$

$$* = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$$

qed

folgen-explizit.pdf

Folgen explizit mit TI-nspire

Gegeben wird eine Folge aus vier Werten, man soll sie fortsetzen.
So etwas kommt in Intelligenztests vielfach vor.
Gibt es Fälle, bei denen so eine Fortsetzung nicht eindeutig möglich ist?
Nimm z.B. die Folge 6, 12, 24, 48...

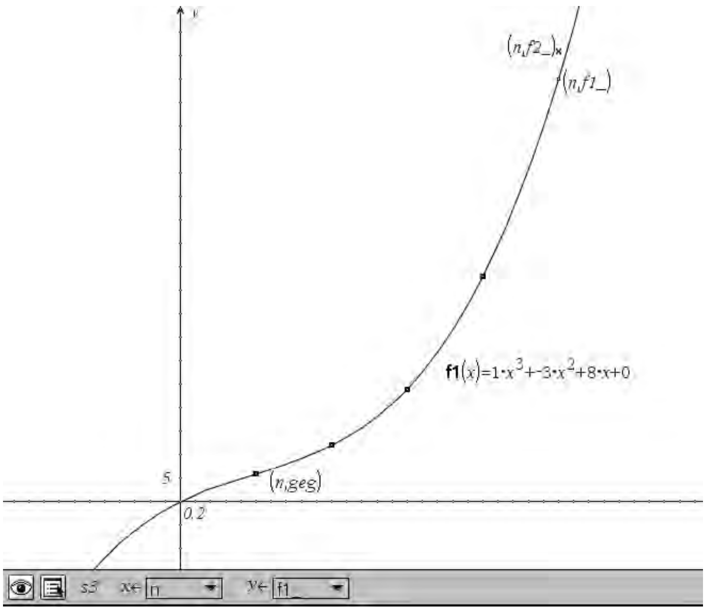
Schüler gibt Antwort hier ein

Vorgeschlagene Antwort:

In dieser Datei kannst du zu jeder vorgegeben Anfangssequenz eine Formel angeben,
die anders weitergeht als die gemeinte Formel.

Define $f(x)=a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d$	*Fertig*
solve$(\{f(1)=6,f(2)=12,f(3)=24,f(4)=48\},\{a,b,c,d\})$	$a=1$ and $b=-3$ and $c=8$ and $d=0$
Define $f1(x)=1\cdot x^3+-3\cdot x^2+8\cdot x+0$	*Fertig*
seq$(f1(i),i,1,4)$	$\{6,12,24,48\}$
$f2(x):=3\cdot 2^x$	*Fertig*
seq$(f2(i),i,1,4)$	$\{6,12,24,48\}$
$\{f2(5),f1(5)\}$	$\{96,90\}$

©Probiere dies auch mit anderen Folgen



	A n	B geg	C f1_	D f2_	E
◆					
1	1	6	6	6	
2	2	12	12	12	
3	3	24	24	24	
4	4	48	48	48	
5	5		90	96	

Merke

Explizite Folgen: seq(*Term(n),n, anfang, ende)*
oder zB in b1 eintragen term(a1) und nach unten kopieren

Rekursive Folgen: zum Beispiel in b1 den Startwert eintragen, in b2 dann =f(b1) eintragen und nach unten kopieren. f(x) muss dann der Term der Trägerfunktion sein.

Gleichungen lösen: solve({*li1=re1,li2=re2*},{*a,b*})
Wobei die Gleichungen a und b enthalten und man nach a und b auflösen will.

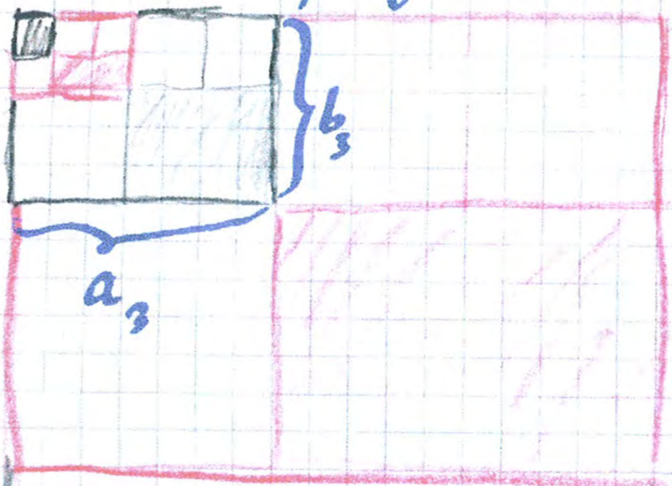
Rechteckfolge Theon von Smyrna

16.4.09

Haftendorn 09

Haftendorn 09

theonfolge.pdf



Setze rechts 2 Quadrate unten 1 Quadrat an und ergänze zum Rechteck

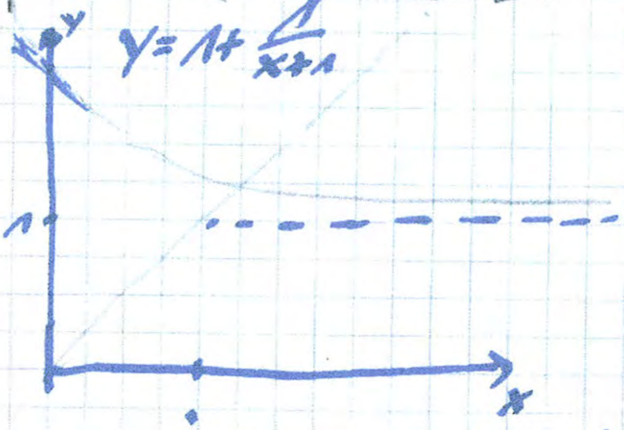
n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	1	3	7	17	41	99	230	577
b_n	1	2	5	12	29	70	169	408
$q_n = \frac{a_n}{b_n}$	1	1,5	1,4	$1{,}41\overline{6}$	1,4138	1,41429	1,41430	

$a_{n+1} = a_n + 2 b_n$

$b_{n+1} = a_n + b_n$

$$\boxed{q_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{a_n + 2b_n}{a_n + b_n} = \frac{q_n + 2}{q_n + 1}}$$

$$q_{n+1} = 1 + \frac{1}{q_n + 1}$$



Fixpunkt $x = 1 + \frac{1}{x+1}$

$x - 1 = \frac{1}{x+1}$

$x^2 - 1 = 1$

$x^2 = 2$

$\underline{\underline{x = \pm\sqrt{2}}}$

Grenzwert existiert, da $|f'(1)| < 1$ (bekanntlich $f'(0) = -1$ dann kleiner)

Fazit:

$\boxed{\text{Die Rechteckfolge von Theon nähert sich dem DIN-Format.}}$

DIN-Format-Reihe A0, A1, ...

15.04.09

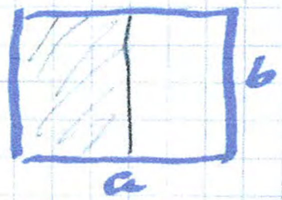
Herleitung der Seitenlängen

din-format.pdf

Hat ein Rechteck das Seitenverhältnis $\sqrt{2}:1$, dann hat das halbierte Blatt dasselbe Seitenverhältnis.

Bew. (konstruktiv)

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a/2} \Leftrightarrow a^2 = 2b^2$$
$$\underline{\underline{a = \sqrt{2}\,b}}$$



DIN
= Das Ist Norm
früher
Deutsche Industrie-Norm

Also fordert man:

DIN-Format Seitenverhältnis $\boxed{\sqrt{2}:1}$

DIN A0 definiert als $\boxed{1m^2}$ b, a

$$\left.\begin{array}{l} a\cdot b = 1m^2 \\ \wedge \quad \frac{a}{b} = \sqrt{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{2}\,b\cdot b = 1m^2$$
$$b^2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,m^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,m^2$$
$$b = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}}\,m$$

DIN A0 $\quad a_0 = \sqrt{2}\cdot b = 1{,}1892\,m \quad b_0 = 0{,}840896\,m$

A 1 $\quad a_1 = b_0 \quad b_1 = \frac{1}{2}a_0$

A n $\quad \boxed{a_n = b_{n-1} \quad b_n = \frac{1}{2}a_{n-1}}$

A1 $\quad a_1 = 0{,}840896\,m \quad b_1 = 0{,}594604\,m$

A 2 $\quad a_2 = 0{,}594604\,m \quad b_2 = 0{,}420448\,m$

A 3 $\quad a_3 = 42{,}0448\,cm \quad b_3 = 29{,}7302\,cm$

A 4 $\quad a_4 = 29{,}7302\,cm \quad b_4 = 21{,}0224\,cm$

A 5 $\quad a_5 = 21{,}0224\,cm \quad b_5 = 14{,}8651\,cm$

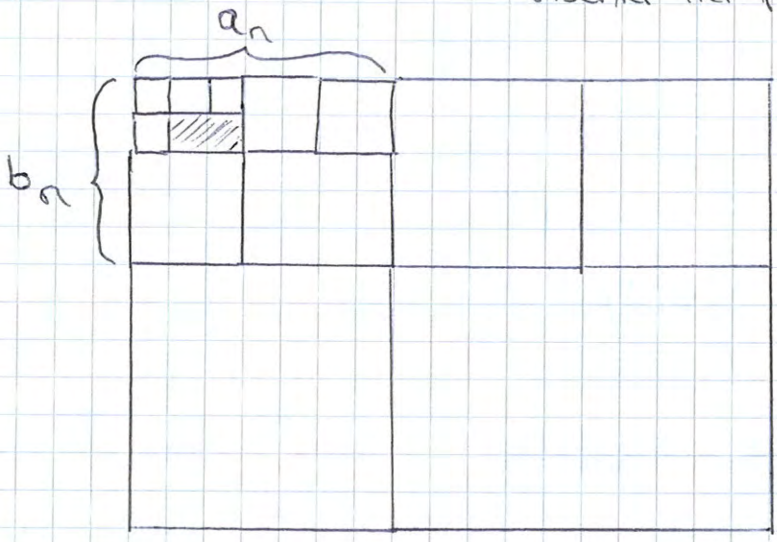
A 6 $\quad a_6 = 14{,}8651\,cm \quad b_6 = 10{,}5112\,cm$

Postkarte
10,5 × 15

15.4.09
8. Std.

Rechteckfolge von Theon ≈ 100 n. Chr., Alexandria

(Tochter Hempathia)



rechts 2 Quadrate unten 1 Quadrat ansetzen, zum Rechteck ergänzen

n	a_n	b_n
1	1	1
2	3	2
3	7	5
4	17	12
5	41	29
6	99	70
7	230	169
8	577	408

$a_4 = a_3 + b_3 \cdot 2$

$b_4 = a_3 + b_3$

analog mit gleicher Log

$a_n = a_{n-1} + b_{n-1} \cdot 2$

$b_n = a_{n-1} + b_{n-1}$

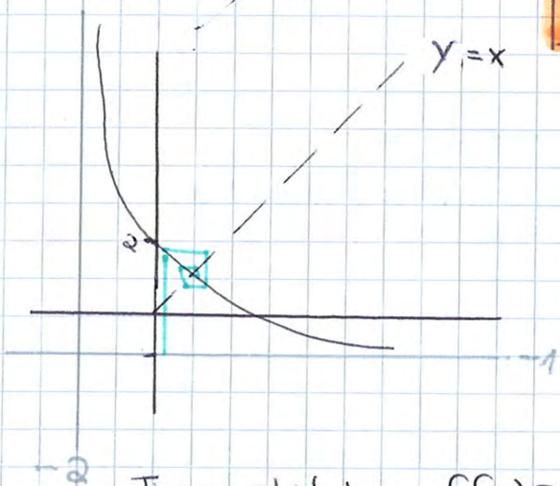
Seitenverhältnisse

$$q_n = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_{n-1} + b_{n-1} \cdot 2}{a_{n-1} + b_{n-1}} \quad \frac{:(b_{n-1})}{:(b_{n-1})}$$

$$q_n = T(q_{n-1}) \Rightarrow \boxed{q_n = \frac{q_{n-1} + 2}{q_{n-1} + 1}}$$

$\Rightarrow$ Trägerfkt: $y = \frac{x+2}{x+1}$

$y = 1 + \frac{1}{x+1}$



Polstelle: $x + 1 = 0 \quad | -1$

$x = -1$

Asymptote: $x + 2 = 0 \quad | -2$

$x = -2$

NS: $y = \frac{0+2}{0+1} = 2$

Fixpunkt: $f(x) = x$

$x = \sqrt{2}$
pos.

$$1 + \frac{1}{x+1} = x \quad | -1$$

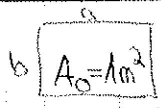
$$\frac{1}{x+1} = x - 1 \quad | \cdot (x+1)$$

$$1 = (x-1)(x+1) = (x^2 - 1) \quad | +1$$

$$2 = x^2$$

Achtung: didaktische Einführung in geom. Reihe unten auf dieser Seite

$\sqrt{2} \Rightarrow$ DIN - Formate



$$\frac{a}{b} = \sqrt{2} \quad | \cdot b$$

$$a = \sqrt{2} \cdot b$$

Fläche: $a \cdot b = \sqrt{2} \cdot b \cdot b = 1m^2 \quad | : \sqrt{2}$

$$b^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \quad | \sqrt{\ }$$

$$b = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 0{,}84\ldots$$

Explizite Folgen und Grenzwerte

$$a_n = \frac{2n+5}{n} \underset{:n}{=} \frac{\frac{2n}{n} + \frac{5}{n}}{\frac{n}{n}} = \frac{2 + \frac{5}{n}}{1} \quad \frac{5}{n} \xrightarrow{\text{Nullfolge}} 0 \quad = \frac{2}{1}$$

Eine Zahl heißt Grenzwert, wenn sie ein Epsilon-Streifen umgibt..

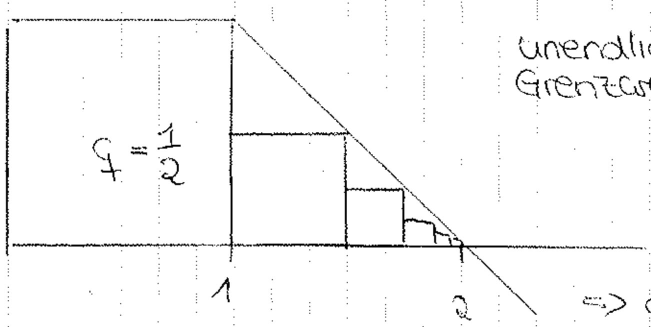
Bsp:

1. $$\frac{5n^2 + 7n}{3n^2 + 19n + 10} \Rightarrow \frac{5}{3}$$

2. $$\frac{5n^2 + 7n}{3n^3 + 19n + 10} \Rightarrow \frac{0}{3} = 0$$

3. $$\frac{5n^3 + 7n}{3n^2 + 19n + 10} \Rightarrow \frac{5}{0} \Rightarrow +\infty$$

Geometrische Reihen und Folgen



unendliche Summe mit dem Grenzwert 2

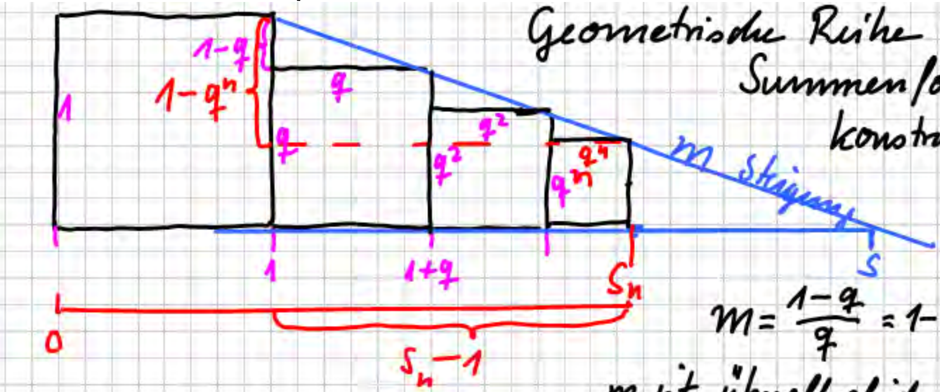
$\Rightarrow$ geht über 2 nicht hinaus

Achtung, dies ist nur die Einführung am Rand der Tafel mit der Diskussion, ob die Zeichnung über den Rand hinaus geht. Das glauben nämlich viele Studis.
Dann Übelegungen mit der Geraden... sie folgen hier 7 Seiten weiter, (21.4.09)
Die Lernseite aus dem Web folgt jetzt gleich.

Diese Visualisierung eignet sich sehr gut, das Phänomen der unendlichen Summen überhaupt einzuführen.

Geometrische Reihe

Summenformel mit konstruktivem Beweis



$m = \frac{1-q}{q} = 1 - \frac{1}{q}$

m ist überall gleich $m_2 = \frac{q-q^2}{q^2} = \frac{q(1-q)}{q\cdot q} = \frac{1-q}{q}$ usw.

Also $m = \frac{1-q}{q} = \frac{1-q^n}{S_n-1}$

$(1-q)(S_n-1) = q(1-q^n)$

$(1-q)S_n - 1 + q = q - q^{n+1}$

$(1-q)S_n = 1 - q^{n+1}$

$$\boxed{S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

$a_0 = 1$

a_0 allg $\Rightarrow S_n = a_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Bestimmung von s ohne Grenzprozess

$m = \frac{1-q}{q} = \frac{1}{s-1}$

$s-1 = \frac{q}{1-q}$

$s = \frac{q+1-q}{1-q}$

$\xrightarrow{n\to\infty}$ $\boxed{s = \frac{1}{1-q}}$

a_0 allg $s = a_0 \frac{1}{1-q}$

2/2

Geom. Reihe

Beweis mit vollständiger Induktion

Notiztitel 14.11.200

$a_0;\ a_n = a_{n-1}\cdot q$ geom Folge $a_0;\ a_1 = a_0\cdot q$ $a_n = a_0 q^n$

$S_0 = a_0$ $S_n = S_{n-1} + a_n$ rekursiv explizit

Behauptung $\boxed{S_n = a_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$ Es folgt $\boxed{S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a_0\frac{1}{1-q}}$ für $|q|<1$

Beweis mit vollst. Ind.

IV $n=0$ $S_0 = a_0\frac{1-q}{1-q} = a_0$ ok $S_1 = a_0\frac{1-q^2}{1-q} = a_0\frac{(1-q)(1+q)}{1-q} = a_0(1+q)$ ok

IA S_n-Formel gilt Ziel $S_{n+1} = a_0\frac{1-q^{n+2}}{1-q}$

$n \curvearrowright n+1$

$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \underset{IA}{=} \frac{a_0}{1-q}\left(1-q^{n+1}\right) + a_0 q^{n+1}$

$= \frac{a_0}{1-q}\left(1-q^{n+1} + (1-q)q^{n+1}\right)$

$= \frac{a_0}{1-q}\left(1-q^{n+1} + q^{n+1} - q^{n+2}\right)$

$= \frac{a_0}{1-q}\left(1 - q^{n+2}\right) = a_0\frac{1-q^{n+2}}{1-q}$ q.e.d.

1

Übungsaufgaben zu Folgen, Reihen und Rekursion

1.) Zeigen Sie: die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist stets eine Quadratzahl

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=a(n)^2 \quad \text{es ist } a(n) \text{ gesucht}$$

2.) $1+3^2+5^2+...+(2n-1)^2=\frac{1}{3}n\left(4n^2-1\right)$

3.) $<a_n>=\{6,\ 12,\ 24,\ 48,\ ......\}$ Was ist richtig?

A $a_n=n^3-3n^2+8n$ oder B $a_n=3\cdot 2^n$

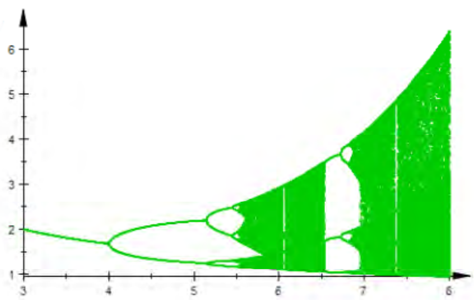
4.) Bearbeiten Sie die Folgenübung auf der Rückseite.

5.) In der Familie der Zwillinge Fritzi und Franzi spielt jeder ein Instrument. Der Pate schenkt Fritzi zur Taufe, dass er Anfang jeden Jahres 200 € auf ein Sparkonto zu 4% Zinsen einzahlt. Damit soll Fritzi mit 12 Jahren ein gutes Instrument kaufen können.

a. Wie viel Geld ist nach Ablauf von 12 Jahren vorhanden, wenn die Bedingungen gleich bleiben? Stellen Sie eine geometrische Folge und zugehörige Reihe auf, visualisieren Sie die jährlichen Werte mit Sicht auf Datenpunkte und Tabelle.
b. Die Uroma schenkt Franzi zur Taufe 1000 € als Festgeld für 10 Jahre zu 5% Zinsen. Was hat Franzi nach 10 Jahren?
c. Wann haben beide gerade gleich viel Geld? Visualisieren Sie beide Sparformen gemeinsam.
d. Warum ist es schwierig, diesen Zeitpunkt aus Formeln zu berechnen? Wie bekommt man eine Näherungslösung?

6.) Es geht um das Heron-Verfahren zur Bestimmung von Quadratwurzeln. Es hat die Trägerfunktion f mit $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\dfrac{r}{x}\right)$.

a. Geben Sie die zugehörige rekursive Formel an und berechnen Sie für r=2 für den Startwert 1 einigeWerte.
b. Zeichnen Sie die Trägerfunktion aus zwei Bausteinen. Zeigen und erklären Sie, wie Folgenwerte graphisch gewonnen werden.
c. Beweisen Sie, dass $x_{fix}=\sqrt{r}$ Fixpunkt ist, und dass für alle Radikanden r superschnelle Konvergenz (d.h. $f'(x_{fix})=0$) vorliegt.
d. Visualisieren Sie mit TI so, dass dies (also c)) mit einem Schieberegler für r überzeugend dargestellt wird.
e. Für höhere Wurzeln gibt es die Trägerfunktion h mit $h(x)=\frac{1}{2}\left(x+\dfrac{r}{x^{k-1}}\right)$
Zeigen, Sie, dass $x_{fix}=\sqrt[k]{r}$ Fixpunkt ist.
f. Zeigen Sie am TI diese Annäherung im Spinnweb-Graphen mit Variation von k und r=8. Skizzieren Sie grob auf Ihrem Blatt.
g. Sehen Sie sich das Feigenbaumdiagramm hierzu an und deuten Sie es.



Es folgt Seite 2

Folgen-Übung – Aufgaben

Ha

Def. $\langle a_i \rangle$ geometrische Folge $\Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{R}: a_{n+1} = q\,a_n$
$\langle a_i \rangle$ arithmetische Folge $\Leftrightarrow \exists d \in \mathbb{R}: a_{n+1} = a_n + d$

Finden Sie jeweils das Bildungsgesetz und geben Sie eine explizite Formel an und 3 weitere Folgenglieder.

a) $5, 11, 17, 23, 29, \ldots$

b) $7, 14, 28, 56,$

c) $7, 21, 49, 105, \ldots$

d) $48, -24, 12, -6, \ldots$

☺ $0{,}9,\ 0.99,\ 0.999,\ 0{,}9999, \ldots$

Wenn Sie das nicht erst einmal selbst versuchen, bringen Sie sich um einen großen Teil der Lernerfolges.

Die Lösungen finden Sie auf dem Blatt „folgenübung.pdf“ bei Didaktik lernpakete www.mathematik-verstehen.de

Folgen – Übung

Ha

Def. $\langle a_i \rangle$ geometrische Folge $\Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{R}: a_{n+1} = q\, a_n$
$\langle a_i \rangle$ arithmetische Folge $\Leftrightarrow \exists d \in \mathbb{R}: a_{n+1} = a_n + d$

Finden Sie jeweils das Bildungsgesetz und geben Sie eine explizite Formel an und 3 weitere Folgenglieder.

a) 5, 11, 17, 23, 29, … 35, 41, 47

Lösg. $+6$ $+6$ arithmetische F.
$n = 1$ 2 3 4 5 6
$a_1 = 5$ $a_n = 5 + (n-1)\cdot 6$
$= -1 + 6n = 6n - 1$

Bei Zählung ab $n=0$ ist $a_n = 5 + n\cdot 6$ richtig.

b) 7, 14, 28, 56, 112 224 448

Lösg. $\cdot 2$ $\cdot 2$ $\cdot 2$ geom. Folge
$n = 0$ 1 2 3 … $a_n = 7\cdot 2^n$

c) 7, 21, 49, 105, … 217, 441, 889

Lösg. $+14$ $+28$ $+56$ ← immer + b)
also geometrische Reihe
$q = 2$ $a_0 = 7 = s_0$

$s_n = 7\,\dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$

Probe $s_2 = 7\cdot\dfrac{2^3-1}{2-1} = 49$
$s_1 = 7\cdot(2^2-1) = 21$

Also $s_n = 7\left(2^{n+1}-1\right)$

d) 48, −24, 12, −6, … 3, −1,5, 0,75

Lös: $:(-2)$ $:(-2)$ $:(-2)$ geometrische Folge mit $q = -2$
$n =$ 0 1 2 3 …
$a_n = (-1)^n \dfrac{48}{2^n}$

Probe $a_0 = (-1)^0 \dfrac{48}{2^0} = 48$
$a_1 = (-1)\,\dfrac{48}{2} = 24$ o.k.

f) ☺ 0,9, 0.99, 0.999, 0,9999, … 0,99999, … Klar $\xrightarrow{n\to\infty} 1$

Lös. $+0.09$ $+0.009$ $+0.0009$ geometrische Reihe $q = \frac{1}{10}$
$:10$ $:10$ ← geom. Folge $S = 0{,}9\,\frac{1}{1-0{,}1} = 1$

g) 4, 3, 7, 6, 10, 9, 13, ….

h) 1, −3, −2, 6, 7, −21, −20, ….

Matheblatt von Martina aus Österreich.

1. Die Punkte A (1/-4) B (2/-8) und C (-1/-2) liegen auf der Parabel p_1. Bestimmen Sie deren Gleichung und zeichnen Sie p_1.

2. Der Punkt D (3/2) und der Scheitel S_2 (4/1) bestimmen die Parabel p_2. Geben Sie die Gleichung von p_2 an und zeichnen Sie p_2.

3. Die Normalparabel p_3 berührt die x-Achse und geht durch den Punkt E (2/- 5/4). Bestimmen Sie p_3 (2 Lösungen) und zeichnen Sie beide Parabeln.

4. Die Parabel p_4 schneidet die y-Achse bei $y_0 = -2$ und hat den Scheitel S_4 (-1/-1). Bestimmen Sie die Gleichung von p_4 und zeichnen Sie p_4.

5. Die Parabel p_5 mit dem Scheitel S_5 (-2/-1) berührt die Gerade g_5: $y = -2x-4$; Geben Sie Gleichung von p_5 an, berechnen Sie Koordinaten des Berührpunktes T und zeichnen Sie p_5 und T.

6. Die Parabel p_6: $y = -(x-1)^2 + 2$ schneidet die Gerade g_6: $y = 3/2\ x + 1/2$. Zeichnen Sie p_6 und g_6. Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte P_1 und P_2 rechnerisch.

7. Die Parabel P_6 schneidet die Parabel p_7: $y = x^2 + 4x - 3$ in P_3 und P_4. Bestimmen Sie P_3 und P_4 rechnerisch und zeichnen Sie p_7 bei 6. ein.

8. Die Parabelschar p_8: $y = x^2 - (2\ k + 1)\ x + 2\ k + 5/4$ wird betrachtet (k ist reelle Zahl).
   a. Bestimmen Sie die Trägerfunktion der Parabelscheitel und zeichnen Sie sie.
   b. Zeichnen Sie die Parabel für k aus {-2,-1,0,1,2}
   c. Geben Sie die Nullstellen von p_8 in Abhängigkeit von k an (Fallunterscheidung).

9. Die Parabel P_9: $y = x^2 - 2$ hat die Tangente t_1 und t_2 die beide durch den Punkt P_9 (1/-13/4) laufen. Berechnen Sie Gleichungen der Tangente und geben Sie Koordinaten der Berührpunkte T_1 und T_2 an. Zeichnen Sie p_9 und die Tangente t_1 und t_2.

10. Die Parabeln p_{10}: $y = x^2 + b\ x - 3$ und p_{11}: $y = -x^2 + 2\ x - 33/8$ sollen sich berühren. Bestimmen Sie mögliche b, zeichnen Sie die Parabeln und bestimmen Sie rechnerisch die Berührpunkte.
    Für welche b schneiden Sie die Parabeln der Schar p10 die Parabel p11, bzw. für welche b haben sie keinen gemeinsamen Punkt?

Mathematik-Klassenarbeit 11-3 Nr.1 am 26.9.90 Ha Name:

Aufgabe 1

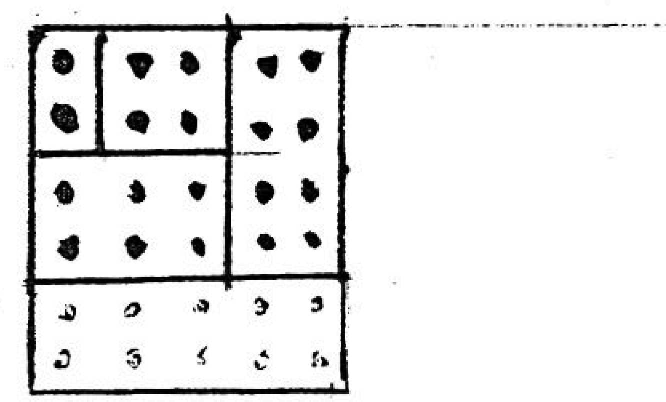
11 ; 111 ; 1111 ; 11111; ... Eine oder zwei dieser Folgen
11 ; 11 ; 11 ; 11 ; ... sind geometrische Folgen.
11 ; 22 ; 33 ; 44 ; ... Welche und welche nicht? (Begr.)
9 ; 6 ; 4 ; ... Berechnen Sie für die
geometrischen Folgen q , a_{35} und s_{35} . (Startwert sei a_0).
Berechnen Sie den Grenzwert s, falls er existiert.

Aufgabe 2

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion 11 teilt ($12^n - 1$).

Aufgabe 3

Die Folge der Rechteckszahlen
$\langle r_n \rangle$: 2 ; 6 ; 12 ; 20 ; 30 ;...
entsteht dadurch, daß stets an der längeren Seite zwei Punktreihen hinzugefügt werden.



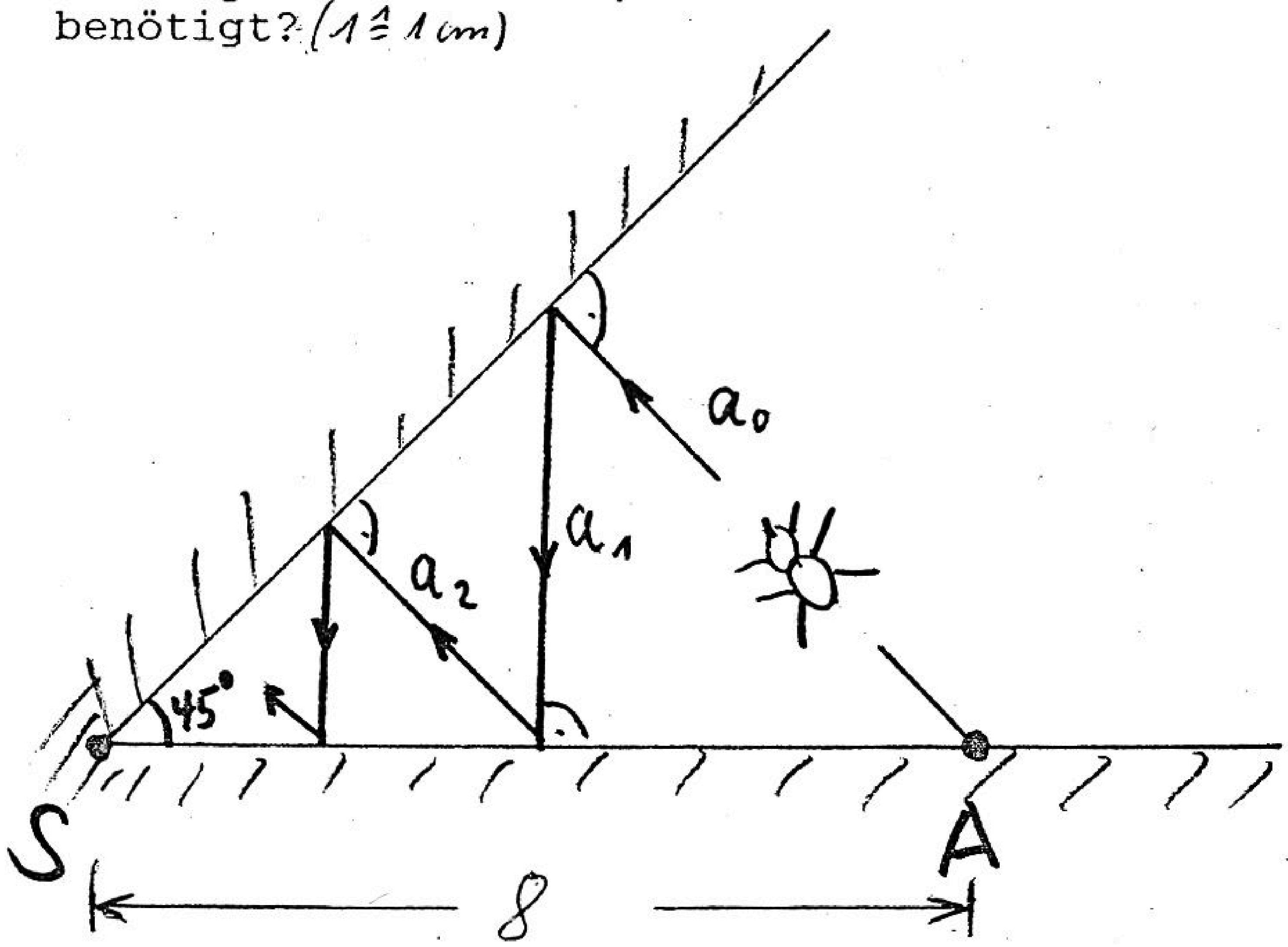
a) Zeichnen Sie **drei** weitere Schritte und geben Sie r_6 ; r_7 ; r_8 an.
b) Stellen Sie eine Rekursionsformel auf.
c) Raten Sie eine explizite Formel.
Falls Sie noch Zeit oder anderswo keine Ideen mehr haben:
Beweisen Sie sie mit vollst. Induktion.

Aufgabe 4

Eine vom mathematischen Geist beseelte Spinne wandert zwischen den Schenkeln eines Winkels, indem Sie stets den kürzesten Weg zum anderen Schenkel wählt.

a) Begründen Sie, daß $a_0 = 4\sqrt{2}$ und $a_{n+1} = a_n \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ gilt.

b) Auch ohne die Begründung können Sie im folgenden diese Formeln benutztn. !!! geom. Folge !!!
Welchen Weg hat die Spinne nach 7 geraden Wegstücken zurückgelegt? Mit einer Formel berechnen!
Wie weit hat sie es auf ihrem Weg an A bis S ?
Wielange braucht sie, wenn sie für 10 cm 2 Sekunden benötigt? ($1 \hat{=} 1$ cm)



Mathematik-Klassenarbeit 11-3 Nr.1 am 26.9.90 Ha Name:

Σ 14

Aufgabe 1

11 ; 111 ; 1111 ; 11111; ... Eine oder zwei dieser Folgen 1
11 ; 11 ; 11 ; 11 ; ... sind geometrische Folgen. 5
11 ; 22 ; 33 ; 44 ; ... Welche und welche nicht? (Begr.) 1
9 ; 6 ; 4 ; ... Berechnen Sie für die 7
geometrischen Folgen q , a_{35} und s_{35} . (Startwert sei a_0).
Berechnen Sie den Grenzwert s, falls er existiert.

a) 11 111 1111 11111 Stets ein anderer Faktor ⇒ keine geom. Folge 1

b) $11 \xrightarrow{\cdot 1} 11 \xrightarrow{\cdot 1} 11 \ldots$ Faktor $q=1$ geom. Folge 2

c) $11 \xrightarrow{\cdot 2} 22 \xrightarrow{\cdot \frac{3}{2}} 33 \xrightarrow{\cdot \frac{4}{3}} 44$ versch. Faktoren keine geom. Folge 1

$\xrightarrow{+11}$ $\xrightarrow{+11}$ $\xrightarrow{+11}$ (übrigens arithmetische Folge)

d) $9 \xrightarrow{\cdot \frac{2}{3}} 6 \xrightarrow{\cdot \frac{2}{3}} 4 \xrightarrow{\cdot \frac{2}{3}} \left(\frac{8}{3}\right)$ gleicher Faktor $q = \frac{2}{3} = 0,\overline{6}$ 2

zu b) $q=1$ $a_{35} = 11$ 1 $s_{35} = \cancel{a_0 \cdot q}$ $36 \cdot 35 = \begin{matrix} 396 \\ 385 \end{matrix}$ 1 Start fraglich 1 bei $s_0 = a_0$ bei $s_1 = a_1$

zu d) $q = \frac{2}{3}$ $s_{35} = a_0 \cdot \frac{1-q^{35+1}}{1-q} = 9 \cdot \frac{1-q^{36}}{\frac{1}{3}} = 27 \cdot 0,9999985$
$= 26,999988$ 3

$a_{35} = a_0 \cdot q^{35} = 0,0000062$ 1

Grenzwert $s = a_0 \frac{1}{1-q} = 9 \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 27$ 1

Aufgabe 2

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion 11 teilt ($12^n - 1$). 13

$a_n = 12^n - 1$ $a_1 = 12^1 - 1 = 11$ wird von 11 geteilt Verankerung klappt 3

zur Probe: $a_2 = 12^2 - 1 = 144 - 1 = 143 = 13 \cdot 11$

Behauptung es gibt $r \in N$ mit $a_n = r \cdot 11$ 2

$12^n - 1 = r \cdot 11$

$\Longleftrightarrow 12^n = r \cdot 11 + 1$ IA

Schritt $n \to n+1$ Ziel $12^{n+1} - 1 = k \cdot 11$ 1

$12^{n+1} - 1 = 12^n \cdot 12 - 1 \underset{IA}{=} (r \cdot 11 + 1) \cdot 12 - 1 = r \cdot 11 \cdot 12 + 12 - 1$

1 3

$= r \cdot 11 \cdot 12 + 11$

2 $= \underbrace{(r \cdot 12 + 1)}_{k \in N} \cdot 11$

1 qed.

Aufgabe 3

Die Folge der Rechteckszahlen r_5 r_6 r_7 r_8

$\langle r_n \rangle$: 2 ; 6 ; 12 ; 20 ; 30 ; 42 | 56 | 72 4

entsteht dadurch, daß stets an der längeren Seite zwei Punktreihen hinzugefügt werden.

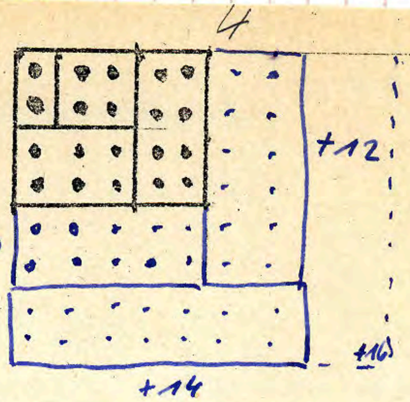
a) Zeichnen Sie drei weitere Schritte und geben Sie r_6 ; r_7 ; r_8 an.

b) Stellen Sie eine Rekursionsformel auf.

c) Raten Sie eine explizite Formel.

Falls Sie noch Zeit oder anderswo keine Ideen mehr haben:

Beweisen Sie sie mit vollst. Induktion.



16

$a_1 = 2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 1\cdot 2$

$a_2 = 2+4 = a_1 + 2\cdot 2 = 6 = 2\cdot 3$

$a_3 = a_2 + 6 = a_2 + 2\cdot 3 = 12 = 3\cdot 4$

$a_4 = a_3 + 8 = a_3 + 2\cdot 4 = 20 = 4\cdot 5$

$a_5 = a_4 + 10 = a_4 + 2\cdot 5 = 30 = 5\cdot 6$ war noch nicht gezeichnet, aber angegeben.

$a_6 = a_5 + 12 = 30 + 12 = 42 = 6\cdot 7$

$a_7 = a_6 + 14 = 42 + 14 = 56 = 7\cdot 8$

$a_8 = a_7 + 16 = 56 + 16 = 72 = 8\cdot 9$

$a_n =$ offenbar $= n\cdot(n+1)$

Also Rekursion: $a_{n+1} = a_n + 2n$

Also Beh. $a_n = n(n+1)$ 4 Rekursion $\boxed{a_{n+1} = a_n + 2n}$ 4

Vollst. Induktion:

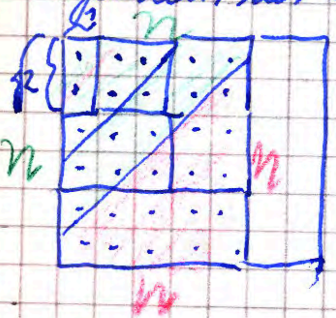
Voraussetzung s.o. 1 Ziel $a_{n+1} = (n+1)(n+2)$ 1

$a_{n+1} \overset{2}{\underset{\text{rek}}{=}} a_n + 2(n+1) \overset{3}{\underset{\text{IA}}{=}} n(n+1) + 2(n+1)$

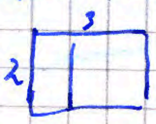
$= (n+1)(n + 2) = (n+1)(n+2)$ 2 4 ed.

zusätzliche möglich + 9

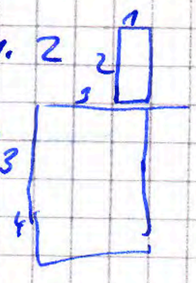
Geometrischer Weg. Rechtecke verdrehen $a_1 = 1\cdot 2$



$a_2 =$

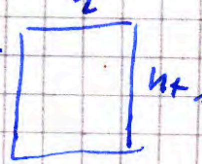


$= 2\cdot 3$



a_3

$a_n =$



$= n(n+1)$

Gaußzahlen = Dreieckszahlen doppelt hingelegt

$a_n = 2\cdot \frac{1}{2} n(n+1) = n(n+1)$

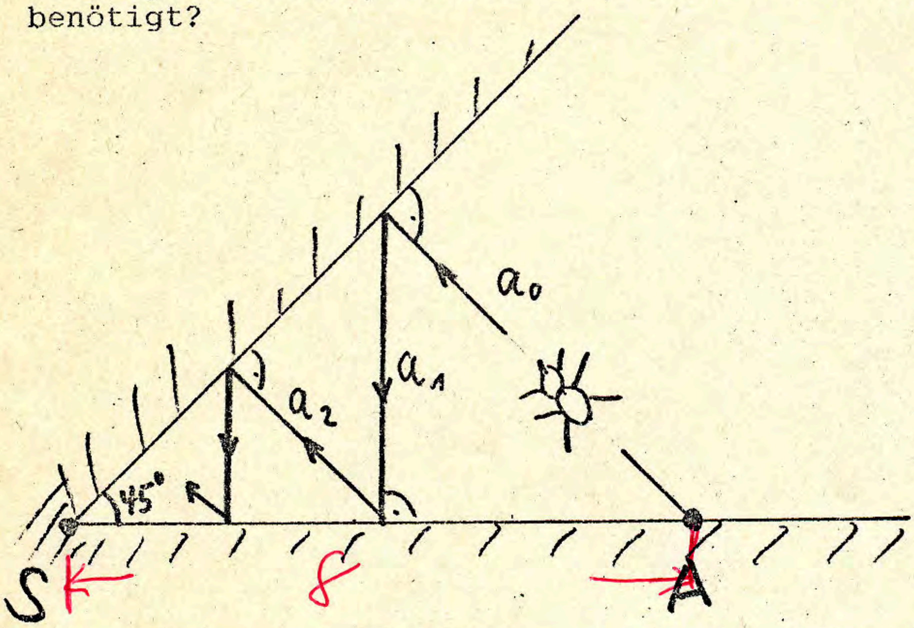
$a_n = n(n+1)$
$= n^2 + n$

Aufgabe 4

Eine vom mathematischen Geist beseelte Spinne wandert zwischen den Schenkeln eines Winkels, indem Sie stets den kürzesten Weg zum anderen Schenkel wählt.

a) Begründen Sie, daß $a_0 = 4\sqrt{2}$ und $a_{n+1} = a_n \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ gilt. 6

b) Auch ohne die Begründung können Sie im folgenden diese Formeln benutztn. !!! geom. Folge !!!
Welchen Weg hat die Spinne nach 7 geraden Wegstücken zurückgelegt? Mit einer Formel berechnen! 4
Wie weit hat sie es auf ihrem Weg an A bis S ? 3
Wielange braucht sie, wenn sie für 10 cm 2 Sekunden benötigt? 2



Σ 15

Zwischen
14
13
16
15
58 12,1
60

a) Wegen des 45°-Winkels ist $\overline{SA}$ Diagonale im einem Quadrat mit der Kantenlänge a_0 3

$\overline{SA} = 8 \qquad 8 = \sqrt{2} \cdot a_0 \Rightarrow a_0 = \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8}{2}\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

a_0 ist ebenso Diag. im Quad. Kante a_1 $\Rightarrow a_0 = \sqrt{2}\, a_1$

$\Leftrightarrow a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\, a_0$

a_n ist " Diag. im Quadra Kante a_n 3

Also $a_n = \sqrt{2}\, a_{n+1} \Leftrightarrow a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, a_n$

b) Also ist (a_n) geometrische Folge mit $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 1

$a_n = a_0 \cdot q^n \qquad S_n = a_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ (andere Tafel)

$S_7 = 4\sqrt{2}\, \frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^8}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = 4\sqrt{2}\, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\left(1-\frac{1}{2^4}\right) = \frac{8}{\sqrt{2}-1}\left(1-\frac{1}{16}\right)$

$= 19{,}313709\,(1-0{,}0625) = 19{,}313709 \cdot 0{,}9375 = 18{,}106602$ 3

Von A bis S ist der Grenzwert $s = \frac{a_0}{1-q} \underset{\text{s.o.}}{=} 19{,}313709 = \frac{8}{\sqrt{2}-1}$ 2

Sie braucht $s \cdot \frac{2\,\text{sek}}{10\,\text{cm}} = 19{,}31..\,\text{cm} \cdot \frac{2\,\text{sek}}{10\,\text{cm}} = 3{,}8627417$ sek, in 3,9 sek ist sie da. 1

Mathematik-Klassenarbeit **11–3** Nr.1 am 26.9.90 Ha Name:

Aufgabe 1

11 ; 111 ; 1111 ; 11111; ...
11 ; 11 ; 11 ; 11 ; ...
11 ; 22 ; 33 ; 44 ; ...
9 ; 6 ; 4 ; ...

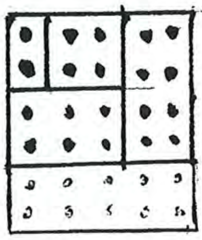
Eine oder zwei dieser Folgen sind geometrische Folgen. Welche und welche nicht? (Begr.) Berechnen Sie für die geometrischen Folgen q , a_{35} und s_{35} . (Startwert sei a_0). Berechnen Sie den Grenzwert s, falls er existiert.

Aufgabe 2

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion **11 teilt ($12^n - 1$).**

Aufgabe 3

Die Folge der Rechteckszahlen
$\langle r_n \rangle$: 2 ; 6 ; 12 ; 20 ; 30 ;...
entsteht dadurch, daß stets an der längeren Seite zwei Punktreihen hinzugefügt werden.



a) Zeichnen Sie **drei** weitere Schritte und geben Sie r_6 ; r_7 ; r_8 an.
b) Stellen Sie eine Rekursionsformel auf.
c) Raten Sie eine explizite Formel.
Falls Sie noch Zeit oder anderswo keine Ideen mehr haben:
Beweisen Sie sie mit vollst. Induktion.

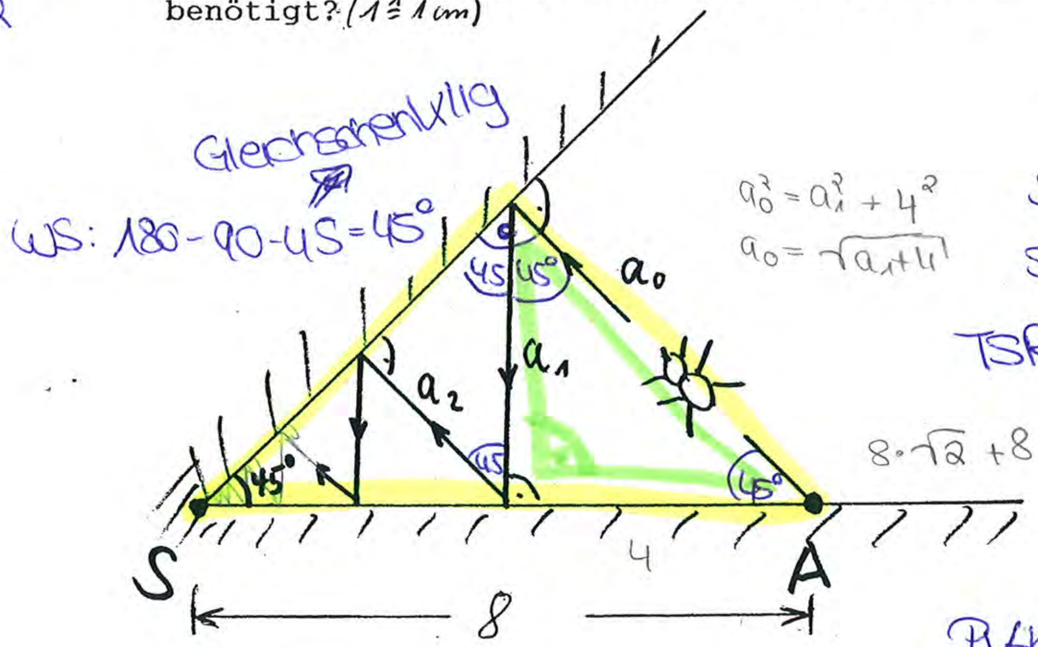
Aufgabe 4

Eine vom mathematischen Geist beseelte Spinne wandert zwischen den Schenkeln eines Winkels, indem Sie stets den kürzesten Weg zum anderen Schenkel wählt.

a) Begründen Sie, daß $a_0 = 4\sqrt{2}$ und $a_{n+1} = a_n \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ gilt.

b) Auch ohne die Begründung können Sie im folgenden diese Formeln benutztn. !!! geom. Folge !!!
Welchen Weg hat die Spinne nach 7 geraden Wegstücken zurückgelegt? Mit einer Formel berechnen!
Wie weit hat sie es auf ihrem Weg an A bis S ?
Wielange braucht sie, wenn sie für 10 cm 2 Sekunden benötigt? $(1 \hat{=} 1\,cm)$

$\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin 45°$



$\sin \alpha = \frac{a_0}{8}$ | ·8

$\sin \alpha \cdot 8 = a_0$

$\sin 45 \cdot 8$

TSR: Gradzahl = GRD Auto Reel

seq $(8 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2}^i, i, 1, 10)$ enter

Pythagoras

$2(a_0)^2 = 8^2$

$2a_0^2 = 64$ | :2

$a_0^2 = 32$ | $\sqrt{\ }$

a) $a_0 = \sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2}$
$= 4\sqrt{2}$
q.e.d.

$a_{n+1} = a_n \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= 2(a_{n+1})^2 = (a_1)^2 \Leftarrow$ Pythagoras

$(a_{n+1})^2 = \frac{(a_1)^2}{2}$ $\sqrt{\ }$

$a_{n+1} = \frac{a_1}{\sqrt{2}}$

$a_{n+1} = a_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

b) $a_n = a_1 \cdot \frac{1}{(\sqrt{2})^{n-1}}$ $a_1 = 4 \cdot \sqrt{2}$

$a_1 = 4 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}^0} = 4 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{1} = \sin 45° \cdot 8$

$a_2 = 4 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 4$

$a_3 = 4 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}^2} = 28284 = \sin 45° \cdot 4$

$a_4 = 4\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}^3} = 2$

Jana v.d. Marel - 3008018 14.04.09
Verenice Pomorin, Julia Burkhart

Aufgabe 1

geometrische Folge

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

arithmetische Folge

$$d = a_{n+1} - a_n$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

Die 2. und 4. Folge ist geometrisch, da zwischen ihren Gliedern ein konstanter Quotient q liegt.

① $11, 111, 1111, 11111$

$q = 10{,}0909$, $q = 10{,}009009$, $q = 10{,}00090009$

weder arithmetisch noch geometrisch. q ist nicht konstant

② $11, 11, 11, 11$
$q = 1$, $q = 1$, $q = 1$

geometrische Folge, da $q = 1$ konstant bleibt

③ $11, 22, 33, 44$
$d = 11$ $d = 11$ $d = 11$

arithmetische Folge, da der Abstand d zwischen 2 Folgegliedern gleich bleibt.

④ $9, 6, 4$
$q = \frac{2}{3}$, $q = \frac{2}{3}$

geometrische Folge, da $q = \frac{2}{3}$ bleibt.

zu ②
$$a_{35} = 11 \cdot 1^{35-1} = 11 \cdot 1^{34} = 11$$
$$S_{35} = 11 \cdot \frac{1^{35} - 1}{35 - 1} = 11 \cdot \frac{0}{34} = 0$$

zu ④
$$a_{35} = 9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{35-1} = 9 \cdot 0{,}000001 = 0{,}000009$$
$$S_{35} = 9 \cdot \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{35} - 1}{\frac{2}{3} - 1} = 9 \cdot \frac{-0{,}\overline{999}}{-0{,}\overline{333}} \approx 3 \quad (= 2{,}999\ldots)$$

Aufgabe 2) Behauptung $11 \mid 12^n - 1$

IV: $n = 1$ $\quad re = 12^1 - 1 = 11 \; ; \; 1 \cdot 11 = 11$ $\quad$ ok

IA: bis n gilt: $11 \mid 12^n - 1$, also $\exists k \in \mathbb{Z}: 11 \cdot k = 12^n - 1 \quad | +1$

$$\Leftrightarrow 11k + 1 = 12^n$$

IZ: für n+1 gilt: $11 \mid 12^{n+1} - 1$, also $\exists r \in \mathbb{Z}: 11 r = 12^{n+1} - 1$

Schritt $n \rightsquigarrow n+1$:

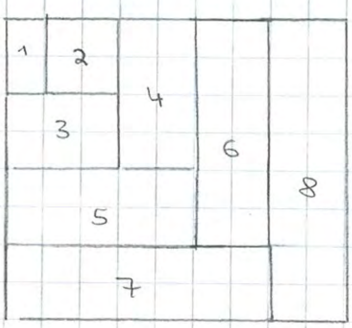
rechte Seite $= 12^{n+1} - 1 = 12^n \cdot 12^1 - 1 = (11k+1) \cdot 12 - 1 =$

$$11 \cdot 12 \cdot k + 12 - 1 = 11 \cdot 12 \cdot k + 11 = 11 \cdot \underbrace{(12k+1)}_{\in \mathbb{Z}}$$

$=$ q.e.d.

Aufgabe 3)

a)



$r_n = 2, 6, 12, 20, 30, \ldots$

$r_6 = 6 \cdot 7 = 42$

$r_7 = 7 \cdot 8 = 56$ $\qquad r_n = n^2 + n$

$r_8 = 8 \cdot 9 = 72$

b)

n	r_n		
1	2		
2	6	+4	
3	12	+6	)+2
4	20	+8	)+2
5	30	+10	)+2
6	42	+12	)+2
7	56	+16	)+2
8	72	+18	)+2

IV: $n = 1$ $\quad re = 1^2 + 1 = 2$

$n = 2 \quad = 2^2 + 2 = 6$

$n = 3 \quad = 3^2 + 3 = 12$ $\quad$ ok

IA: bis n gilt: $r_n = n^2 + n$, also $\exists n \in \mathbb{Z}$

IV: für n+1 gilt: $r_{n+1} = (n+1)^2 + n+1$, also $\exists n+1 \in \mathbb{Z}$

Schritt $n \rightsquigarrow n+1$:

$$(n+1)^2 + (n+1) = n^2 + 2n + 1 + n + 1 = \underbrace{n^2 + n} + 2n + 2$$

$$= r_n + 2 \cdot (n+1)$$

Aufgabe 4

$a_0 = 4 \cdot \sqrt{2} \qquad a_{n+1} = a_n \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

$a_1 = a_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 4 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 4$ — 1. gerade Strecke

$a_2 = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}$

$a_3 = \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4}{2} = 2$ — 2. g. S.

$a_4 = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$

$a_5 = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$ — 3. g. St.

$a_6 = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$a_7 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}5$ — 4. ger. Str.

$a_8 = 0{,}5 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}}$

$a_9 = \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{4}$ — 5. ger. Str.

$a_{10} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4\sqrt{2}}$

$a_{11} = \frac{1 \cdot 1}{4 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{8}$ — 6. ger. Strecke

$a_{12} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{8\sqrt{2}}$

$a_{13} = \frac{1 \cdot 1}{8 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{16}$ — 7. ger. Strecke

$$\boxed{q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{4 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Weg nach 7 geraden Stücken:

$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

$S_{13} = 4 \cdot \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{13} - 1}{\frac{1}{\sqrt{2}} - 1} \approx 13{,}506$ $\Leftarrow$ 19,1628

Grenzwert: 19,3137

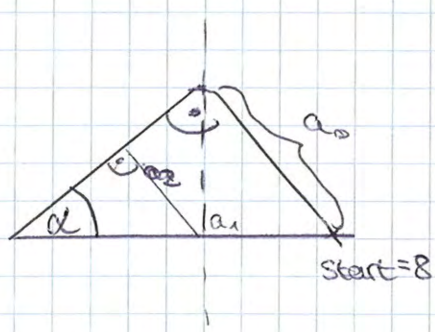
a_n-tes Glied:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 4 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$

von A → S = 8cm

von A → S durch $a_0, a_1, \ldots$ =

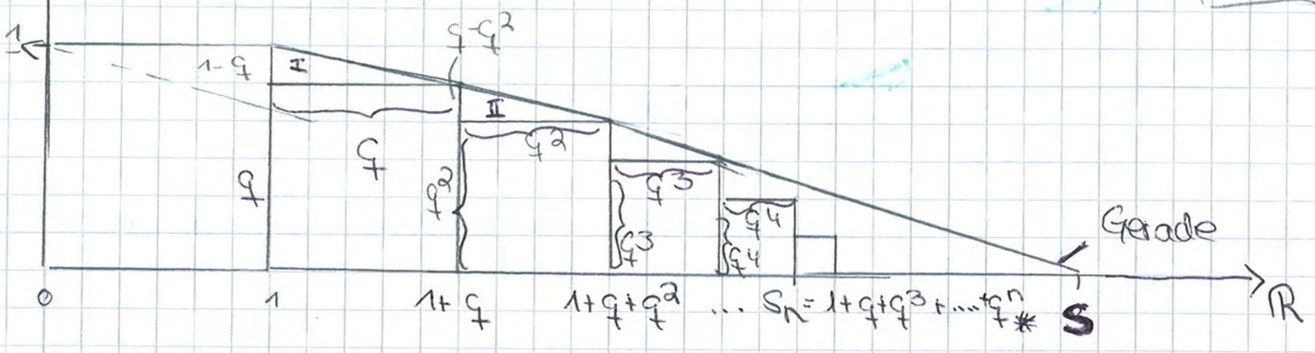
$a_0 = \sin \alpha \cdot \text{Start}$
$a_1 = a_0 \cdot \cos \alpha$
$a_2 = a_1 \cdot \cos \alpha \Rightarrow a_n = a_0 \cdot \cos \alpha$



Geometrische Folgen und Reihen

21.4.09

9 Std



$$\mathrm{I}: \frac{1-q}{q} \qquad \mathrm{II}: \frac{q-q^2}{q^2} = \frac{\cancel{q}(1-q)}{q\cancel{q}} = \frac{1-q}{q} = \mathrm{I}$$

Gleichungskette

$$\left.\begin{array}{l} a_0 = 1 \\ a_1 = q \\ a_2 = q^2 \\ a_3 = q^3 \end{array}\right\}$$

explizit: $a_n = q^n$ (n-tes Glied: $a_n = a \cdot q^{n-1}$)

rekursiv: $a_{n+1} = q \cdot a_n$

(A) Analytischer Ansatz

$y = mx + b$ ⟹ parallele zu unserer geraden durch 1 auf x-Achse

$$g(x) = -\left(\frac{1-q}{q}\right)(x-1) + 1 = -\frac{1-q}{q}x + \frac{1-q}{q} + 1 = \frac{q-1}{q}x + \frac{1-q+q}{q}$$

$$= \boxed{\frac{q-1}{q}x + \frac{1}{q}}$$

Ansatz für S:

$$0 = \frac{q-1}{q}x + \frac{1}{q} \qquad | \cdot q \quad (q \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow 0 = q-1\,x + 1 \qquad | -1$$

$$-1 = q-1\,x \qquad | : (q-1)$$

$$\frac{-1}{q-1} = x \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{1-q}} \Rightarrow$$

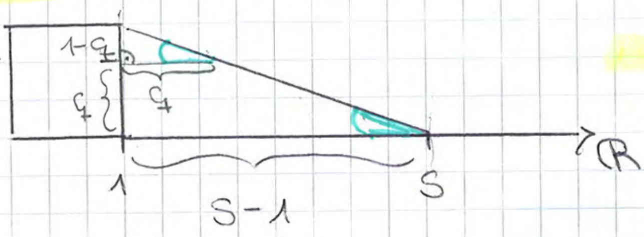
für $q = \frac{3}{4}$: $S = \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = \underline{\underline{4}}$

$$\boxed{\text{allg. zentr. Streckung: } S = a_0 \cdot \frac{1}{1-q}}$$

$$* \; S_n = \sum_{i=1}^{n} q^i$$

(B) Geometrischer Ansatz (nicht Pytogoras, sondern Ähnlichkeit)

Ähnlichkeitsdreieck



$$\frac{S-1}{1} = \frac{q}{1-q} \qquad \text{(Gleiche Seitenverhältnisse => Strahlensätze)} \quad | \cdot 1$$

$$S-1 = \frac{q}{1-q} \qquad | + 1$$

$$S = \frac{q}{1-q} + 1$$

$$\boxed{S = \frac{q + (1-q)}{1-q} = \frac{1}{1-q}}$$

Jetzt suchen wir die Endliche Summe

S_n : $g(S_n) = q^n$ für x in die Geradengleichung eingesetzt!

$$\frac{q-1}{q} \cdot S_n = q^n \qquad | : \frac{q-1}{q}$$

$$\boxed{S_n} = \left(-\frac{1}{q} + q^n\right) \frac{q}{q-1} = \frac{-1+q^{n+1}}{\cancel{q}} \cdot \frac{\cancel{q}}{q-1} = \boxed{\frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

=> wenn n gegen ∞ geht!

(C) $$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}$$

q^{n+1} → 0 wenn $q < 1$

Untersuchen von Reihen

(1) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$

(2) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$

(3) $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$

(4) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n \to \infty]{}$

22.04.09

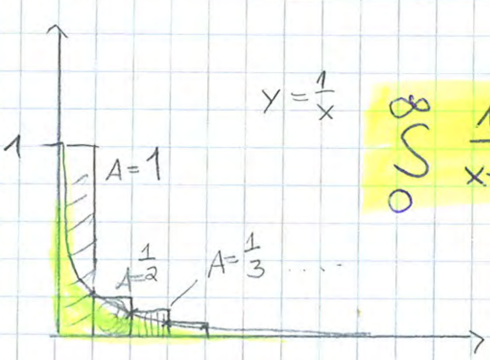
Untersuchung von Folgen

① $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}$

$\frac{1}{2} \quad \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{\frac{1}{2}} \quad \underbrace{\frac{1}{16} + \frac{1}{16} \dots + \frac{1}{16}}_{\frac{8}{16} = \frac{1}{2}} \longrightarrow \infty$

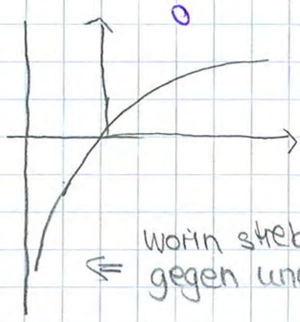
$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ abziehen um auf $\frac{1}{2}$ zu kommen: $\frac{7}{12} - \frac{1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

⇒ diese Summe ist eine Minorante für die harmonische Reihe (eine Folge die „unter" der harmonischen Reihe liegt und die geht gegen ∞ ⇒ ∞ viele $\frac{1}{2}$.)



$\int_0^{\infty} \frac{1}{x+1} \cdot dx \Rightarrow \lim_{c \to \infty} \int_0^{c} \frac{1}{x+1} \cdot dx = \lim \left[\ln(x+1) \right]_0^c$

$= \left[(\ln(c+1)) - \underbrace{(\ln(0+1))}_{0} \right] = \infty$



woran strebt es?

⇐ gegen unendlich

gute Visualisierung mit GeoGebra, im Web

- Die harmonische Reihe divergiert
- „Es kommt immer was dazu" ist kein Argument!

= konvergieren: hat einen Grenzwert (geht gegen 2)

= divergieren: ~~hat~~ keinen Grenzwert (kein ε-Schlauch)

= bestimmte Divergenz geht ins ∞.

⇒ strebt gegen = konvergiert gegen

(2) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} = 1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, +\frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \dots + -$

Leibniz-Reihe $\rightarrow \sum = 0{,}693.097 \mathrel{\hat{=}} \underline{\underline{\ln 2}}$

Die Reihe strebt also gegen $\ln 2 = 0{,}69314718055995\dots$

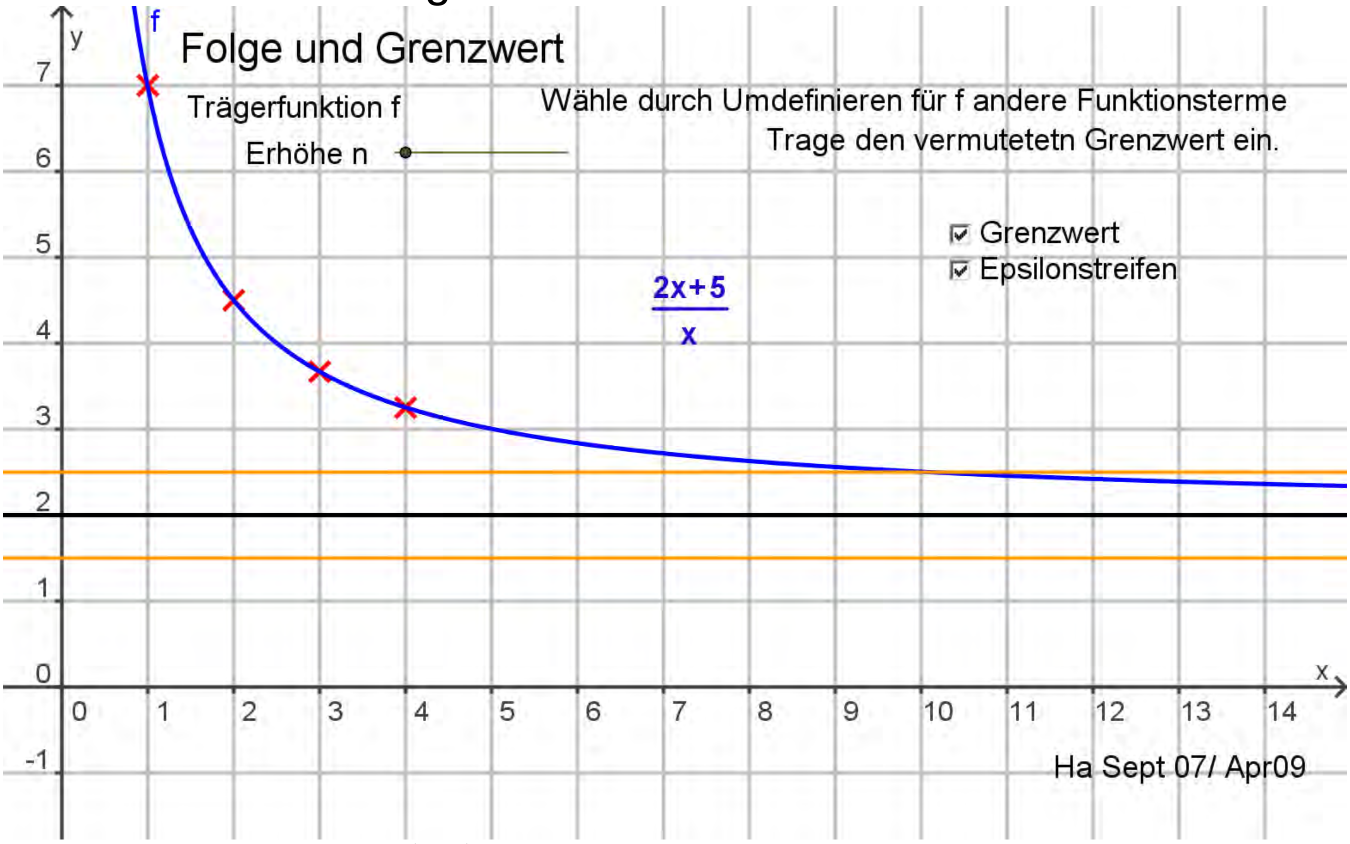
(4) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{\text{strebt gegen}} e$

ohne Beweise

Bsp: $\frac{1+\frac{1}{n}}{n^2} \rightarrow 0$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \rightarrow 1$

Grenzwert einer Folge



Gegeben ist eine Folge $\langle a_n \rangle$ und eine Zahl g,

im Beispiel $\langle a_n \rangle$ mit $a_n = \dfrac{2n+5}{n} = 2 + \dfrac{5}{n}$ und $g = 2$

Definition: g heißt **Grenzwert der Folge** $\langle a_n \rangle$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index N gibt, so dass alle Folgenglieder mit größerem Index von g einen Abstand haben, der kleiner ist als $\varepsilon > 0$.
Formale Schreibweise dieses Textes:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \quad \Leftrightarrow \quad \left(\forall\ \varepsilon > 0 \ \ \exists\ N : \quad \forall\ \ n \geq N \Rightarrow |a_n - g| < \varepsilon \right)$$

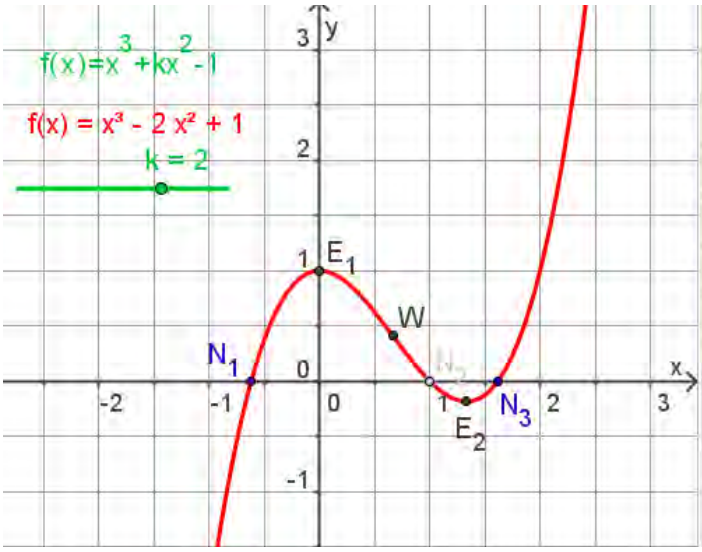
Oben ist N=11, in der zugehörigen GeoGebra-Datei kann man ε variieren.
Zu reellen Folgen lässt sich meist eine reelle **Trägerfunktion** angeben, die denselben Berechnungsterm hat, und zwar statt mit n geschrieben mit x.

Oben ist $a_n = f(n) = \dfrac{2n+5}{n}$ und $f(x) = \dfrac{2x+5}{x}$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+5}{n} \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+5}{x} = 2$$

Man sagt auch: f hat die waagerechte Asymptote $y = 2$.

GeoGebra: Funktionen und Tabellen



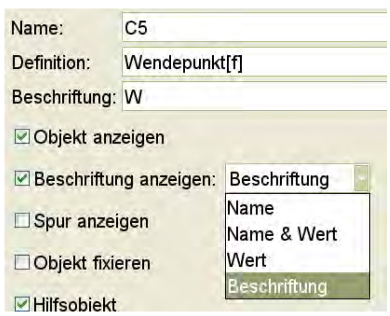
	A	B	C	D
1	Stell...	Werte	k	2
2	-1	-2	Extrema	
3	-0.5	0.38	(0, 1)	(1.33, -0.19)
4	0	1	Wendepunkt	
5	0.5	0.63	(0.67, 0.41)	
6	1	0	Nullstellen	
7	1.5	-0.13	(-0.62, 0)	
8	2	1	(1, 0)	
9	2.5	4.13	(1.62, 0)	
10	3	10		

Hier ist eine Funktionenschar aus Polynomen 3. Grades dargestellt. Rechts im Tabellenteil sind eine dynamische Wertetabelle, der Parameter k, die Extrema, der Wendepunkt und die Nullstellen angezeigt. Variiert man k, ändern sich alle Werte in der Tabelle entsprechend.

Damit ist eine schulische Standardsituation aufgegriffen, die auf diese Weise didaktisch sinnvoll visualisiert wird.

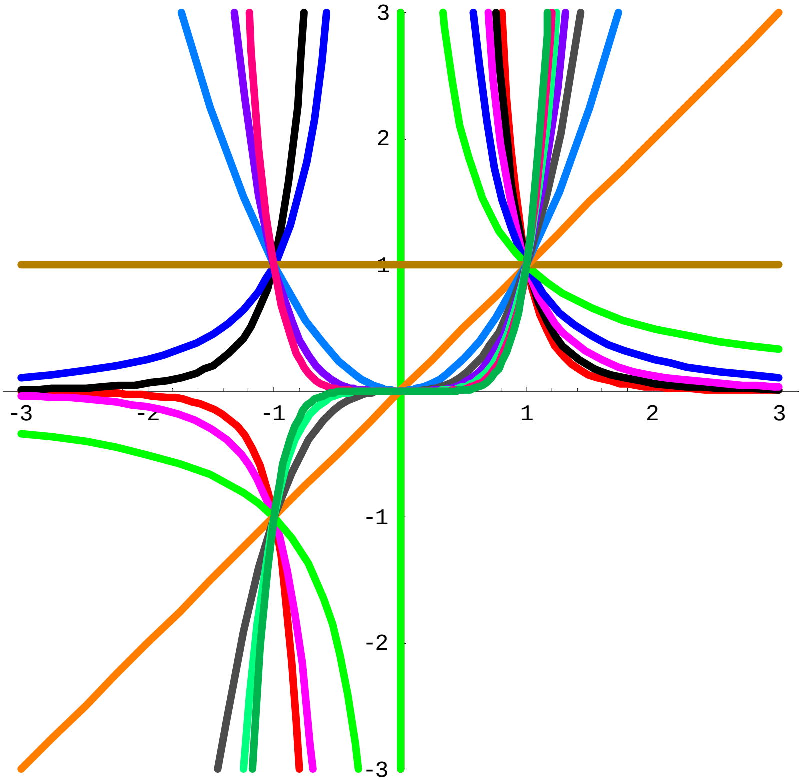
Da die Tabellenmöglichkeiten von GeoGebra noch nicht so bekannt sind, soll hier beschrieben werden, wie man diese Datei baut. Mit „HF-Eingabe" bezeichne ich die Eingabezeile im Hauptfenster, mit „T-Eingabe C4" die Eingabe in der Tabellenzelle C4.

1. HF-Eingabe k=2, f(x)=x^3-k x^2+1 , HF-Text „f(x) = "+f (rote Formel)
2. Ansicht, Tabellenansicht, links zwischen Algebrafenster und Tabellenfenster mit der Maus die linke Begrenzung des Tabellenfensters bis zur Mitte ziehen.
3. T-Eingabe: A1 Stellen B1 Werte C1 „k" D1 k „k" ist der Text k, k allein ist der Wert.
4. T-Eingabe: A2 -1, A2 Eintragen: =A1+0.5, Zelle markieren, unten rechts blaues Karo (wie Excel) nach unten ziehen. Das heißt: **Formel kopieren**.
5. T-Eingabe: B2: =f(A2) **Formel nach unten kopieren**.
6. T-Eingabe: C2 „Extrema" C3 extrema[f] Es werden rechts die Extrema eingetragen.
7. T-Eingabe: C4 „Wendepunkt" C5 wendepunkt[f]

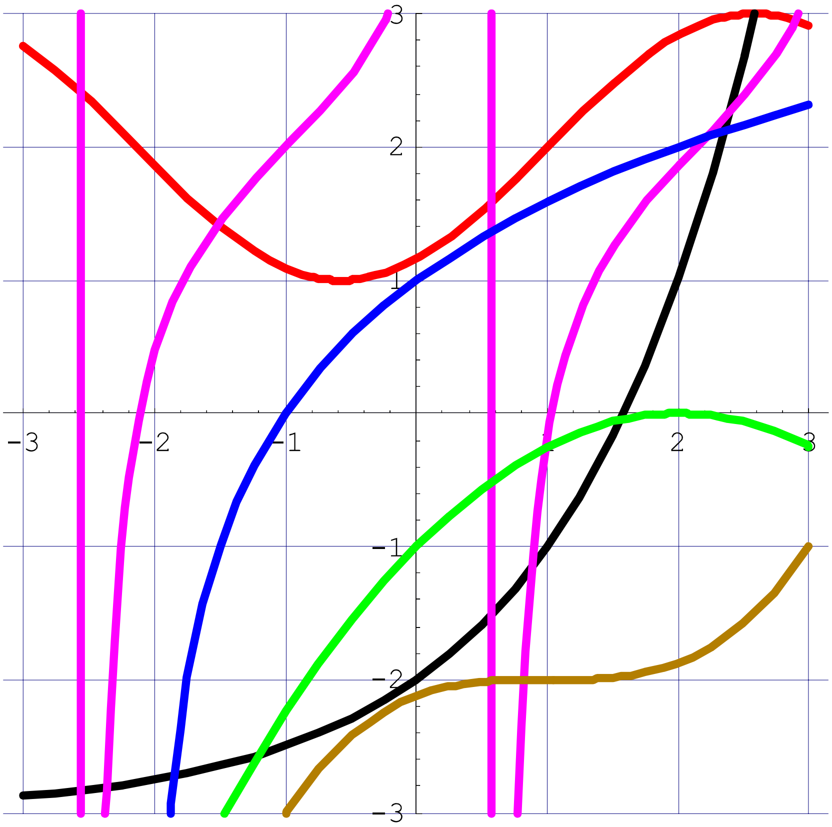


Achtung, die Logik ist nun Folgende: Der Wendepunkt steht in Zelle C5, daher wird C5 in der Zeichnung eingetragen. Wenn dort aber W stehen soll, geht das nicht mit „Umbenennen", sondern folgendermaßen: Im Eigenschaftsmenu bei „Beschriftung" W eintragen und bei „Beschriftung anzeigen" nicht Name wählen sondern Beschriftung.

Sinnvollerweise wird C5 nur bei „Hilfsobjekte aufgeführt. Will man W im Algebrafenster sehen, muss man andersherum vorgehen und W=wendepunkt[f] in HF-Eingabe schreiben, dann könnte man in T-Eingabe C5 einfach W eintragen.



Aufgabe 1) Welche Funktionsfamilie ist dargestellt? Der entscheidende Parameter k unterscheidet sich zwischen zwei Nachbarkurven genau um 1. Beschriften Sie mit jeden Ast mit dem passenden k.
Einige der Kurven bilden mit der Winkelhalbierenden im 1. Quadranten ein Flächenstück, das aussieht wie ein halbiertes Blatt.
Bestimmen Sie dieses Flächenstück in Abhängigkeit von dem Parameter k.
Denken Sie sich das halbe Blatt zu einem symmetrischen ganzen Blatt ergänzt.
Stellen Sie eine Liste (6 Elemente) auf, welchen Anteil am Einheitsquadrat dieses Blatt jeweils hat. Mit einer Skizze.
Wo schneidet die Tangente an der Stelle x=1 die x-Achse(in Abhängigkeit von k für diese 6 Funktionen)?Mit einer Skizze.



Aufgabe 2) Welche Funktionen sind dargestellt? Verschiebungen und Exponenten sind ganze Zahlen, Stauchfaktoren 1/(gerade Zahl)

Aufgabe 3) Zeichnen Sie einen Graphen von

$$f(x) = 4 \cdot \cos\left(\frac{x}{3}\right)$$

und integrieren Sie zwischen den beiden Nullstellen, die dem Ursprung am nächsten sind.
Legen Sie durch diese Nulldurchgänge und den Scheitel eine Näherungsparabel. Integrieren Sie auch diese, vergleichen Sie die Werte und nehmen Sie Stellung zur Tauglichkeit der Näherung. An welcher Stelle unterscheiden Sie die beiden Funktionen (senkrecht gemessen) am meisten (numerische Lösung)?

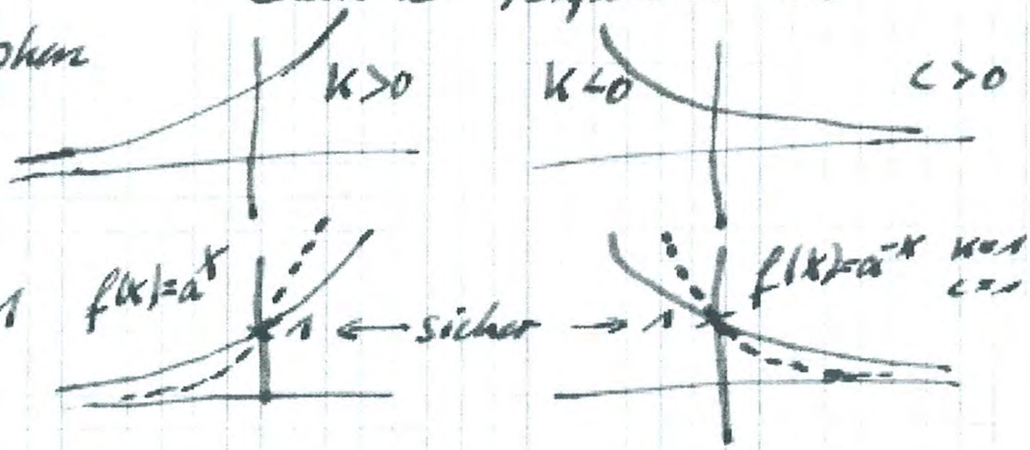
Lernpaket Exponentialfunktionen

$\boxed{\text{Ha 1.6.06}}$

Def $f: x \rightarrow c \cdot a^{kx}$ $a>0$, $x \in \mathbb{R}$

Basis a , Exponent kx

Graphen
$c>0$

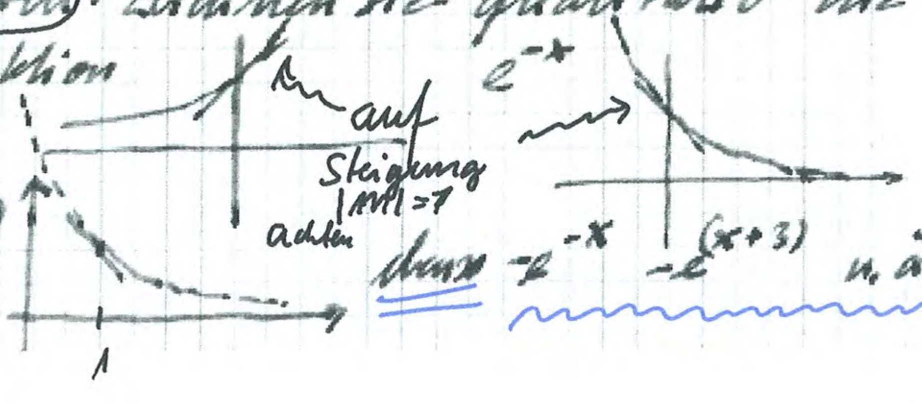


Def. Unter den Funktionen f mit $f(x)=a^x$ ist die e-Funktion diejenige, die in $(0|1)$ die Steigung 1 hat

Aufgabe: Bauen Sie eine Geogebra datei, bei der a als Parameter definiert wird, definieren Sie $f(x)=a^x$, lassen Sie Geogebra die Tangente in $(0|1)$ zeichnen und variieren Sie dann a. Beobachten Sie die Steigung der Geraden. Achtung Kommastellen maximal nehmen.

Handwerkliche Erkenntnis $\boxed{e = \ldots\ldots}$

Aufgaben: Zeichnen Sie qualitativ die e Funktion



dann $-e^{-x}$ $-e^{(x+3)}$ u. ä.

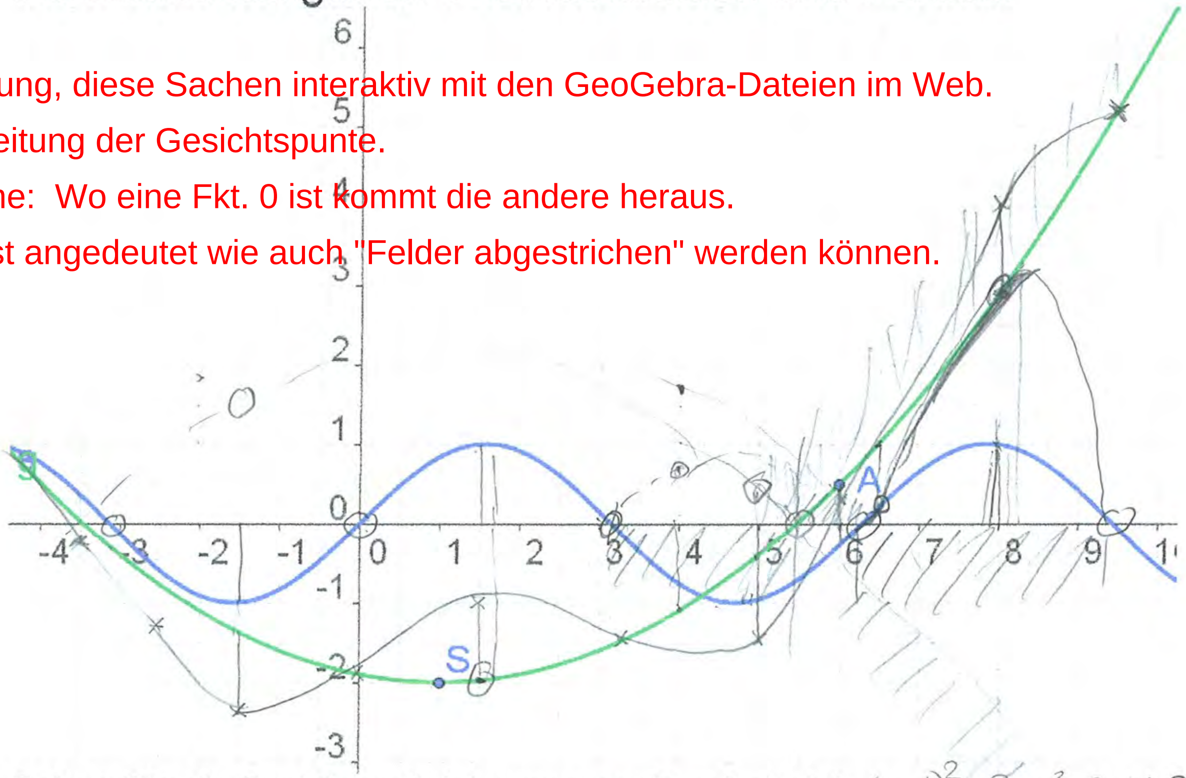
Funktionenaufgaben 1 Sinusfunktion und Parabel

Auchtung, diese Sachen interaktiv mit den GeoGebra-Dateien im Web.

Erarbeitung der Gesichtspunte.

Summe: Wo eine Fkt. 0 ist kommt die andere heraus.

Hier ist angedeutet wie auch "Felder abgestrichen" werden können.



Geben Sie die Funktionsgleichungen an: Parabel p(x)= $(x-1)^2 - 2 = x^2 - 2x + 1 - 2$

Sinusfkt. s(x)= $\sin x$

Zeichen Sie die Summenfunktion ein

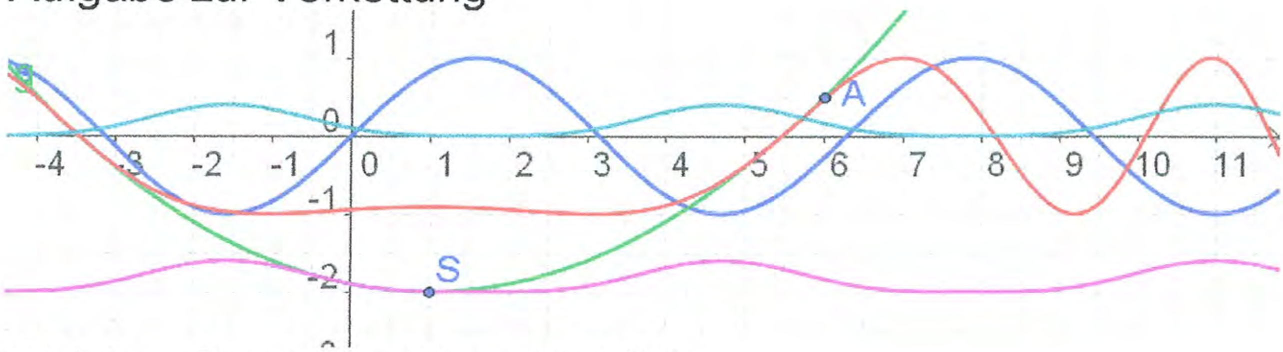
f(x)=s(x)+p(x)= $\sin (x-1)^2 - 2$

Wichtige Bezüge müssen hergestellt sein.

Zeichen Sie die Produktfunktion ein

Wichtige Bezüge müssen hergestellt sein.

Aufgabe zur Verkettung



Welcher Graph gehört zu p(s(x))?

Grund:

Welcher Graph gehört zu s(p(x))?

Grund:

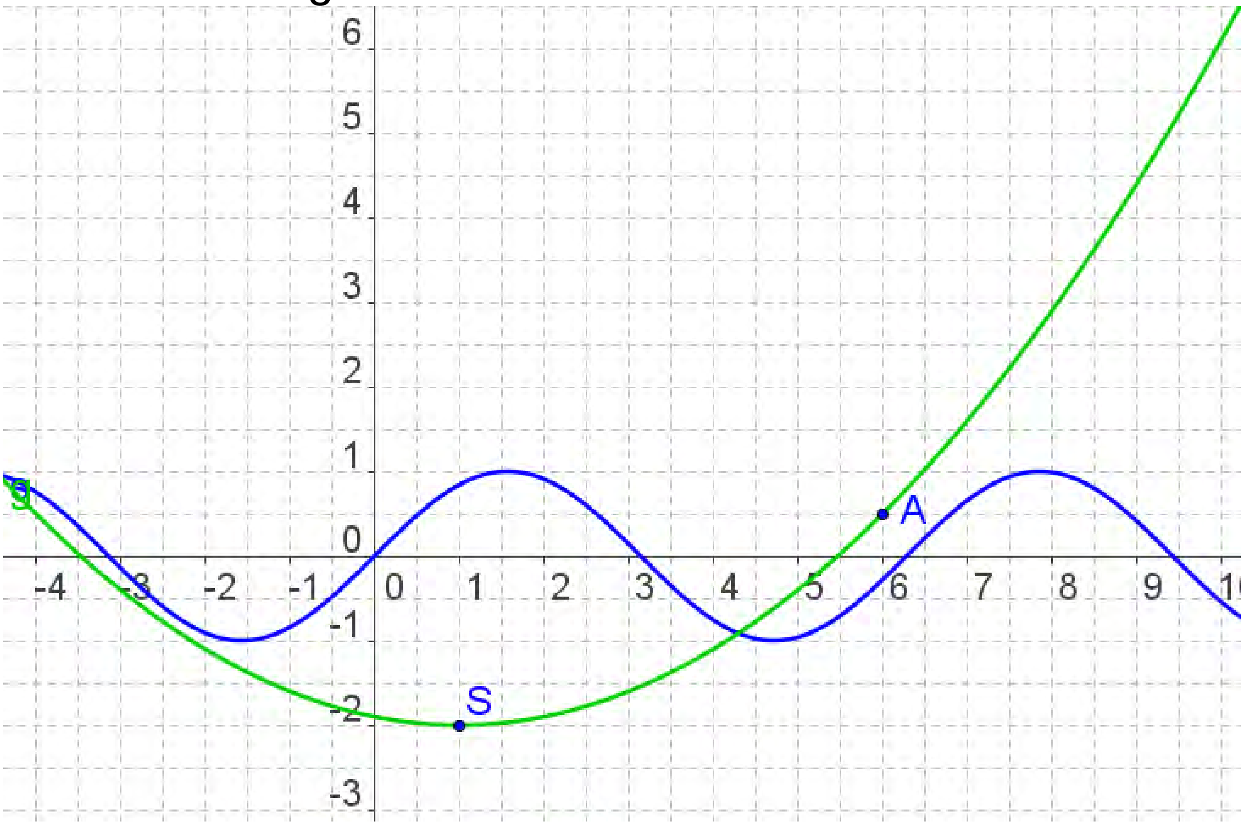
Welche Gleichung kann der übrigbleibende Graph haben?

Produkt: Nullstellen setzen sich durch, wenn nicht die andere Fkt. dort einen Pol hat.

An Stellen an denen eine Fkt 1 ist, kommt die andere heraus.

variiert für - 1 und entsp. für Quotienten.

Funktionenaufgaben 1 Sinusfunktion und Parabel



Geben Sie die Funktionsgleichungen an: Parabel p(x)=

Sinusfkt. s(x)=

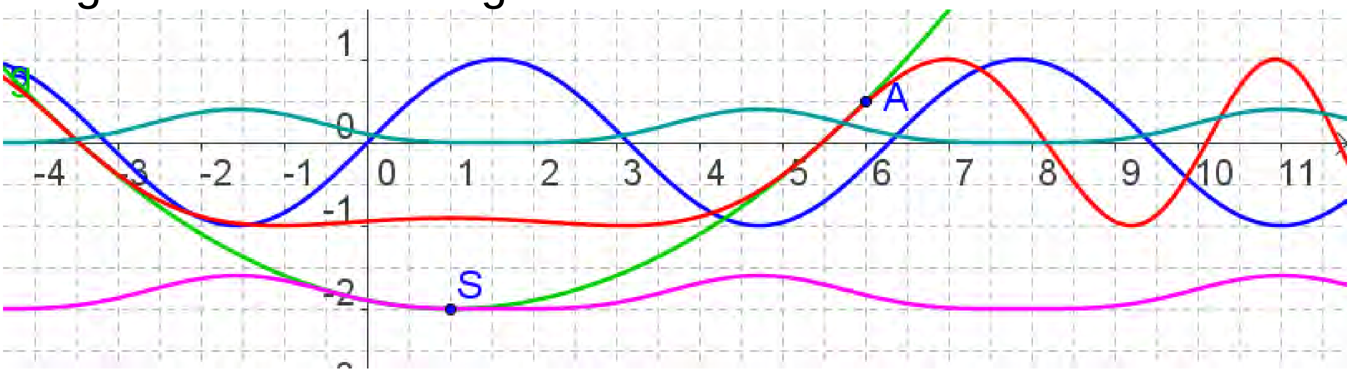
Zeichen Sie die Summenfunktion ein f(x)=s(x)+p(x)=

Wichtige Bezüge müssen hergestellt sein.

Zeichen Sie die Produktfunktion ein

Wichtige Bezüge müssen hergestellt sein.

Aufgabe zur Verkettung



Welcher Graph gehört zu p(s(x))?

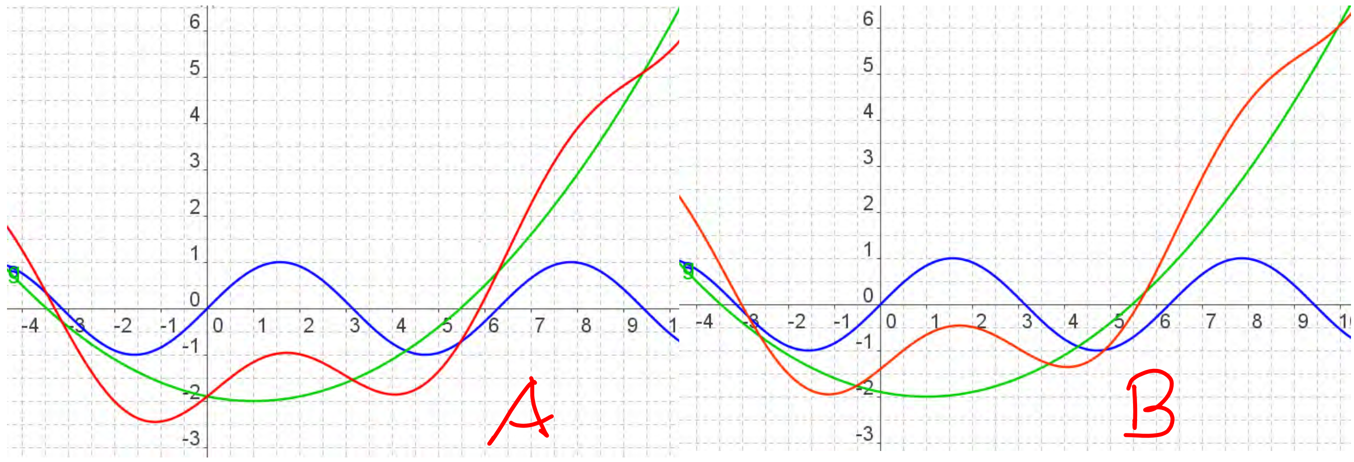
Grund:

Welcher Graph gehört zu s(p(x))?

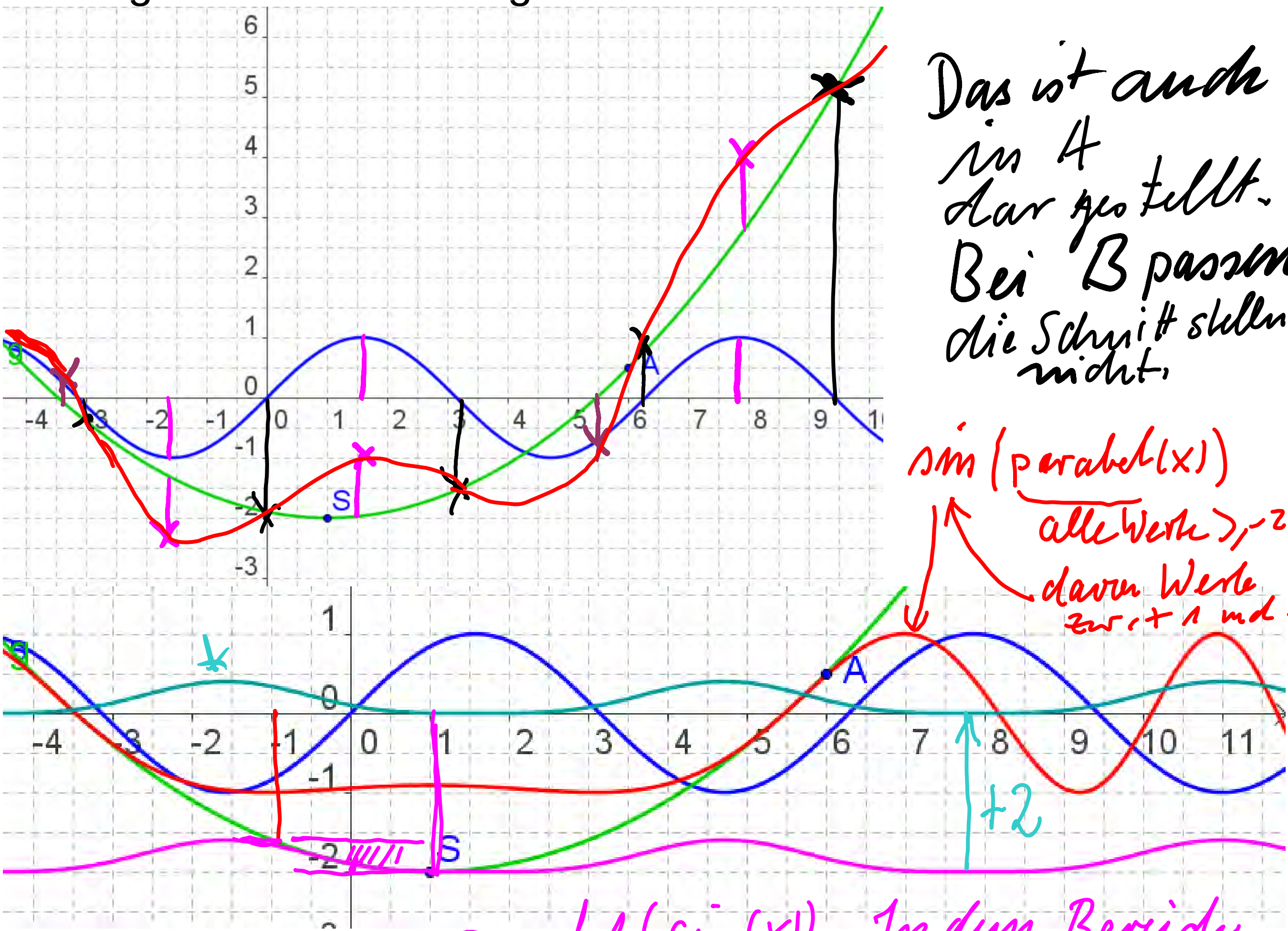
Grund:

Welche Gleichung kann der übrigbleibende Graph haben?

Welche der nachfolgenden Bilder zeigt die Summe von Sinusfunktion und Parabel



Lösungen Funktionenaufgaben 1 Sinusfunktion und Parabel



Das ist auch in A dar gestellt. Bei B passen die Schnittstellen nicht.

sin(parabel(x))

alle Werte ≥ −2

davon Werte zw. +1 und −1

+2

Datei Funktionenaufgaben.doc

parabel(sin(x))

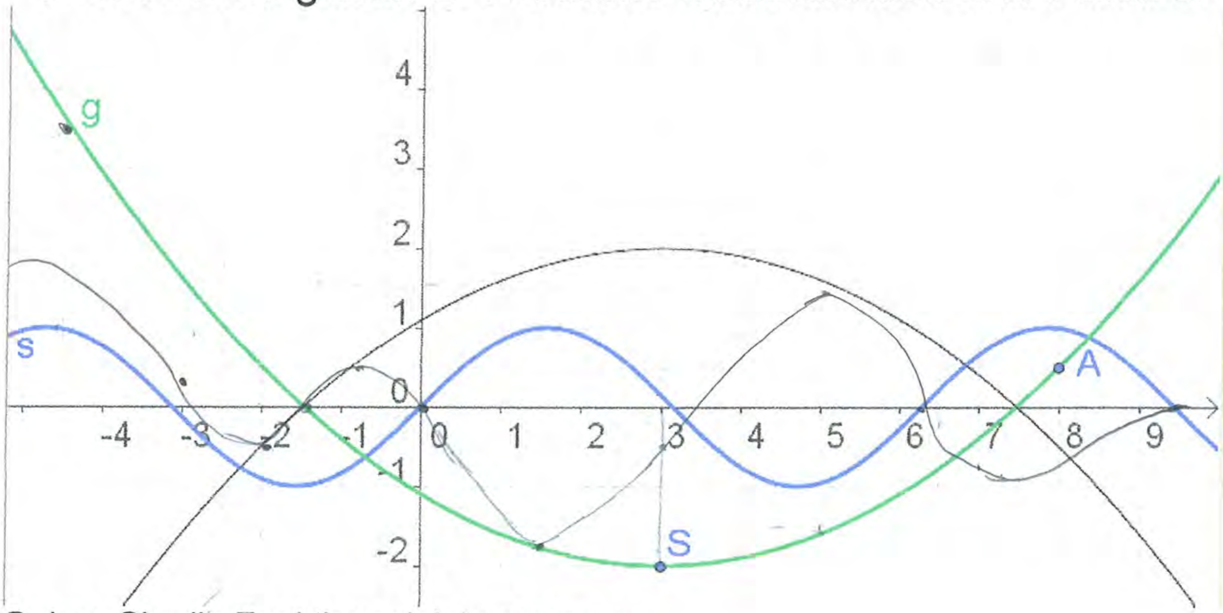
$-1 < x < 1$

In dem Bereich hat die Parabel nur Werte nahe −2

Der andere Graph ✶

$y = p(s(x)) + 2$

Funktionenaufgaben 2 Produkte Sinusfunktion und Parabel



Geben Sie die Funktionsgleichungen an:
nach oben geöffnete grüne Parabel p(x)=

Sinusfkt. s(x)=

Zeichen Sie die Produktfunktion ein f(x)=s(x)+p(x)=

Wichtige Bezüge entsprechend den folgenden Regeln müssen hergestellt sein.

Zeichenregeln für Produkte

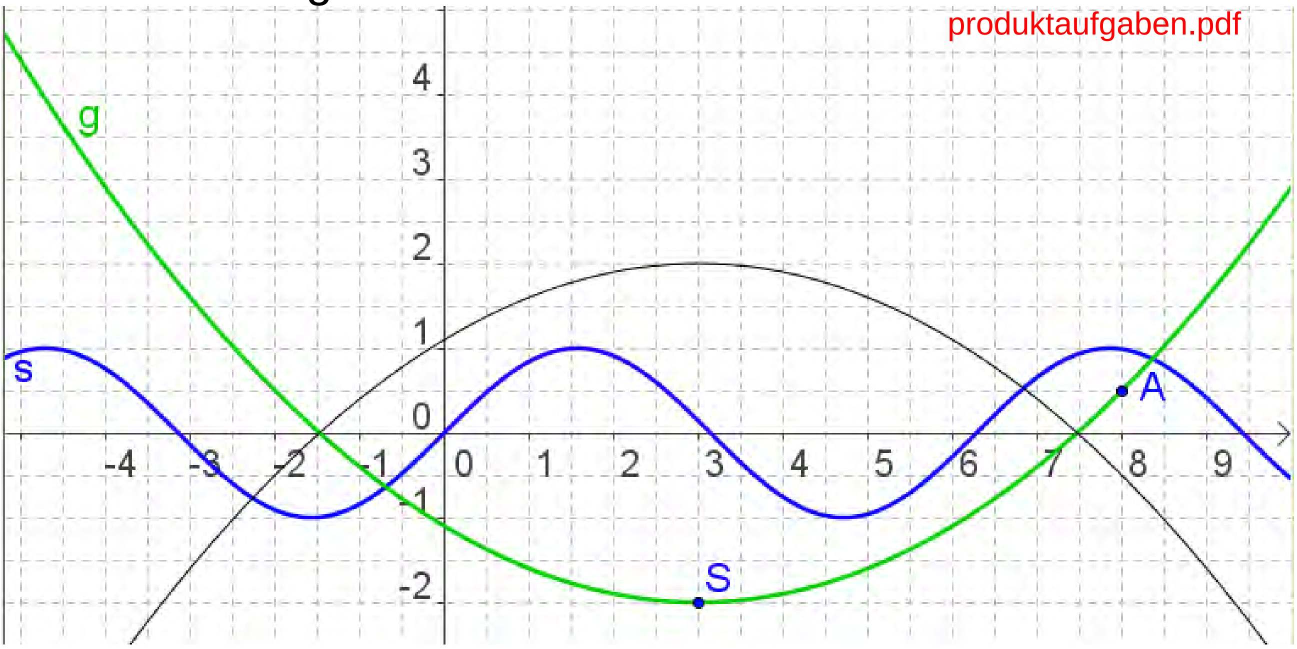
- Wo eine Funktion Null ist, kommt Null heraus, außer wenn die andere Funktion dort einen Pol hat.
- Wo eine Funktion 1 ist, kommt die andere heraus.
- Wo eine Funktion -1 ist, kommt die an der x-Achse gespiegelte andere heraus.

Warum ist die nach unten geöffnete Parabel auch eingezeichnet?

Klären Sie durch Einzeichnen der Bezüge mit obigen Regeln, welche der auf der nächsten Seite vorgeschlagenen Lösungen richtig ist.

Achtung: Für Verkettung gibt es auch gute Visualisierungen im Web.
Es folgt mit TI-Nspire, ist inzwischen auch farbig, ebenso wie die GeoGebra-Datei.
Sie wurden bei der Ketteregel/ weiter unten) auch besprochen,

Funktionenaufgaben 2 Produkte Sinusfunktion und Parabel



Geben Sie die Funktionsgleichungen an:
nach oben geöffnete grüne Parabel p(x)=

Sinusfkt. s(x)=

Zeichen Sie die Produktfunktion ein f(x)=s(x)+p(x)=

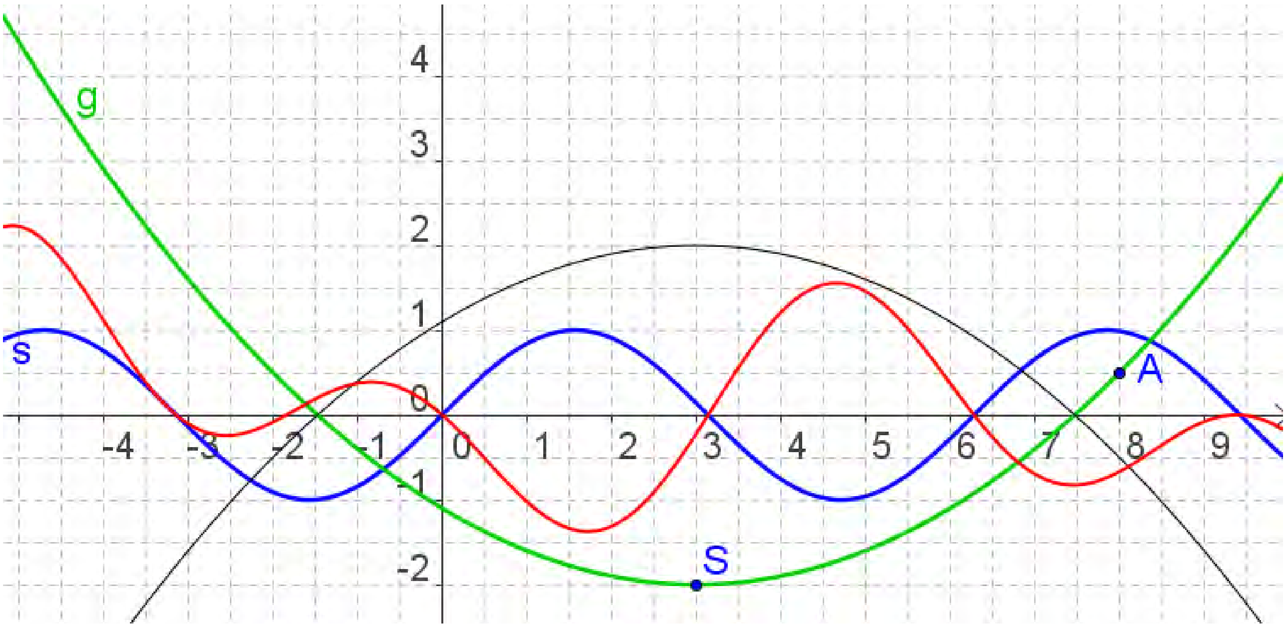
Wichtige Bezüge entsprechend den folgenden Regeln müssen hergestellt sein.

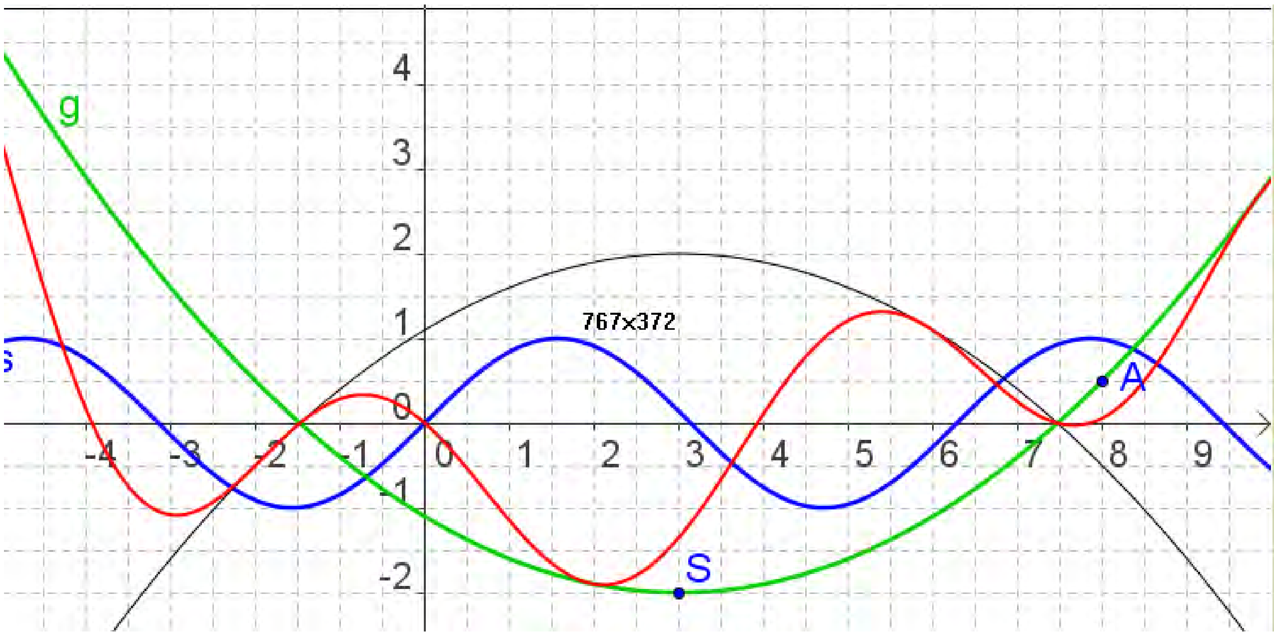
Zeichenregeln für Produkte

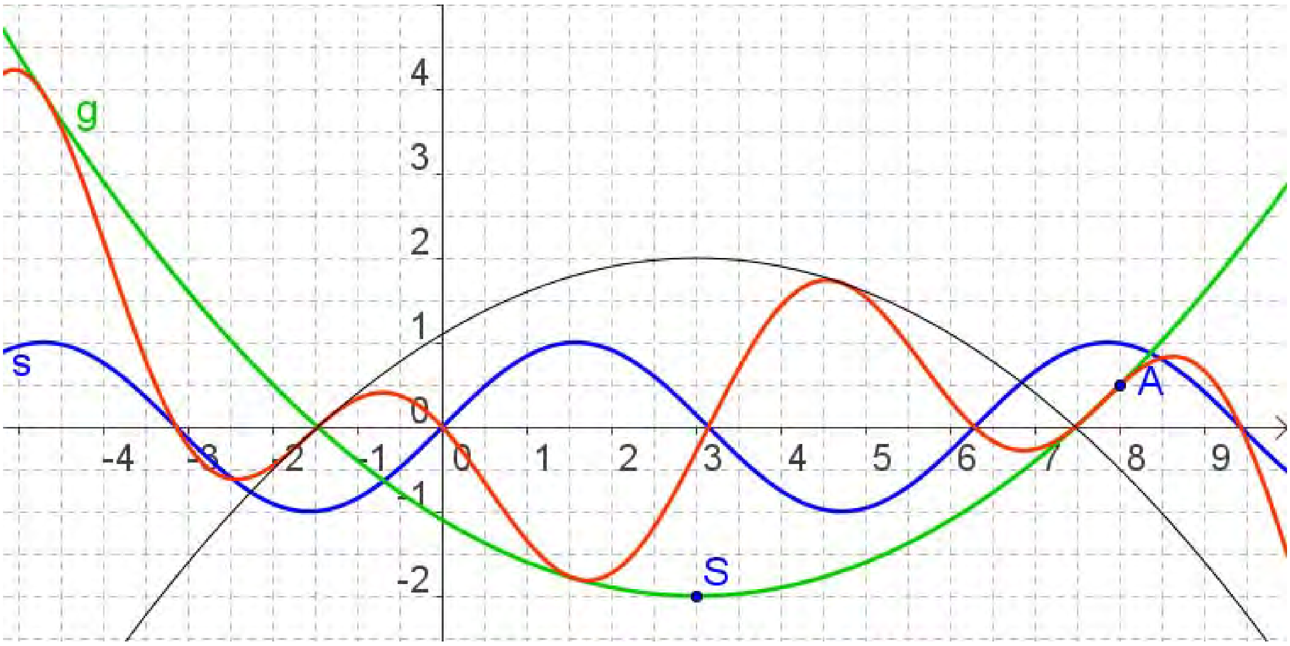
- Wo eine Funktion Null ist, kommt Null heraus, außer wenn die andere Funktion dort einen Pol hat.
- Wo eine Funktion 1 ist, kommt die andere heraus.
- Wo eine Funktion -1 ist, kommt die an der x-Achse gespiegelte andere heraus.

Warum ist die nach unten geöffnete Parabel auch eingezeichnet?

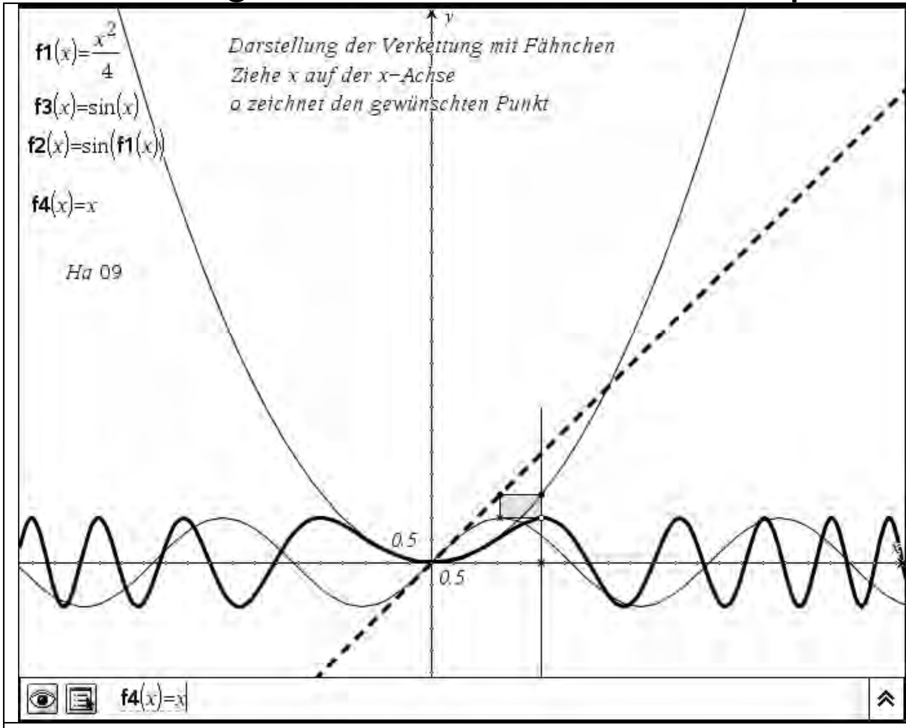
Klären Sie durch Einzeichnen der Bezüge mit obigen Regeln, welche der auf der nächsten Seite vorgeschlagenen Lösungen richtig ist.


g
s
A
S
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
4 3 2 1 0 -1 -2


g
767×372
A
S
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
4 3 2 1 0 -1 -2


g
s
A
S
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
4 3 2 1 0 -1 -2

Verkettung von Funktionen mit TI nspire



Diese Version ist „konventionell“ erzeugt.
Das heißt alle vier Funktionen sind gezeichnet.
Dann ist der aus der x-Achse frei ziehbare Punkt gesetzt.
Mit Senkrechten und Schnitten ist das Fähnchen gemacht.

Dies ist überzeugender als der Versuch unten.

©Darstellung einer Verkettung

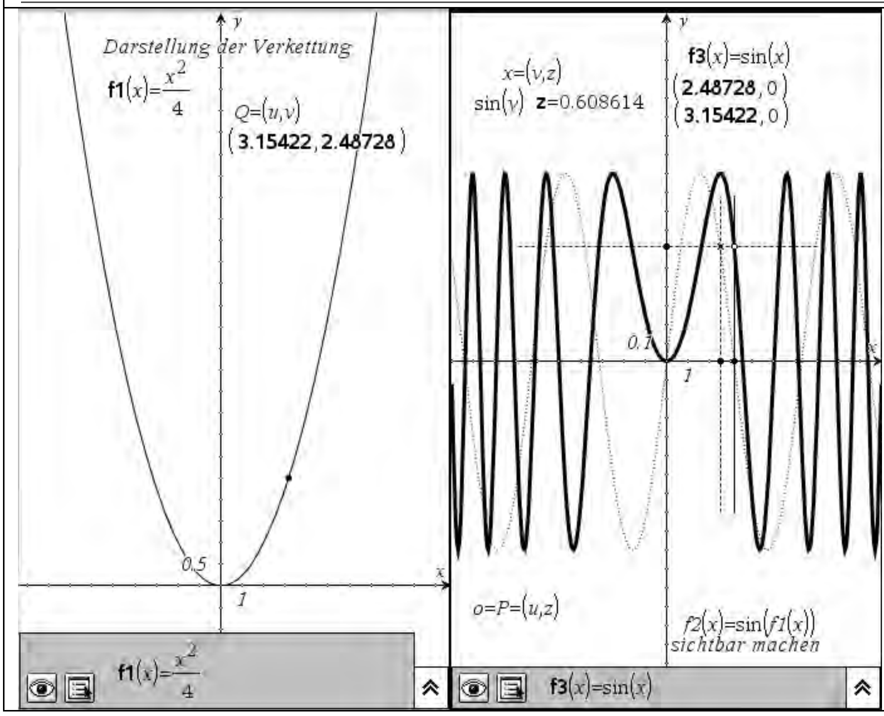
©Ha Juni 09

©Es ist gelungen. Allerdings lässt die Übersichtlichkeit Wünsche offen. Vor allen ist es schade, dass die Ordinaten von Punkten nicht dynamisch Termwerte übernehmen. Darum ist alles mit Maßübertragung auf die x- und y-Achse und nachfolgendne Senkrechten gemacht.

©Als Vorteil kann man hier mit geteiltem Bildschirm verschiedene Maßstäbe verwirklichen und so gut darstellen, welche Punkte auf der Parabel welchen auf der endgültigen Kurve entsprechen.

©Ich bin mir aber sicher, dass doch die "Fähnchendarstellung", wie ich sie sonst verwendet habe, besser ist. Diese Darstellung habe ich daher jetzt an der Anfang gestellt.

Erst habe ich versucht, in der Bildschirmteilung eine Geometriespur zu erzeugen. Aber das geht nicht über die Fenster hinweg.



Es lässt sich nicht der Punkt (u,z) direkt zeichnen.
Die Ordinate wird nicht zugfest übernommen. Für die Abszisse klappt es. Das ist unlogisch.

Ich musste wider zur Maßübertragung auf die Achsen greifen.

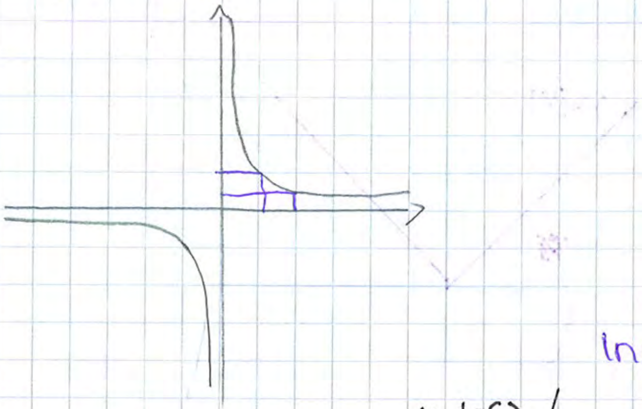
Beim TI voyage funktionierte die Maßübertragung besser.

 in GeoGebra farbig im Web

28.04.09

Funktionen und Grenzwerte

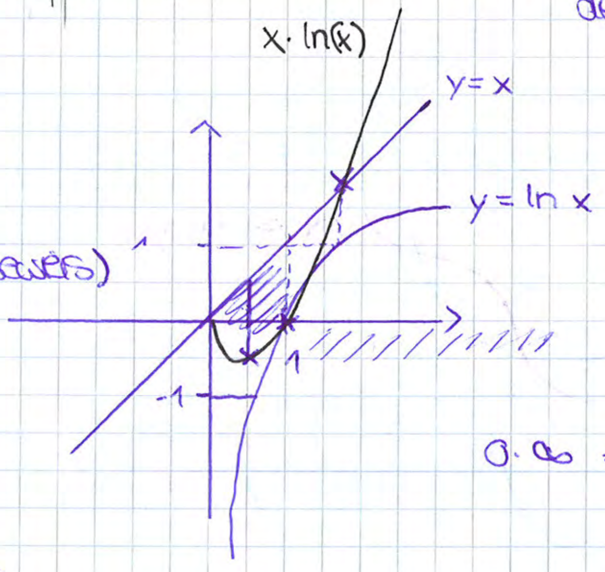
$f(x) = \frac{1}{x}$



$\frac{1}{x} \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

$\ln x$ => Spiegelung der e-Fkt.



$f(x) = x \cdot \ln x$

$\lim\limits_{x \to 0} (x \cdot \ln x) = 0$ (ohne Beweis)

$0 \cdot \infty$ => unerklärt

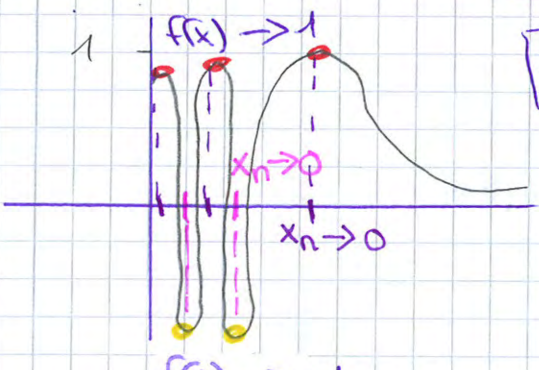
$f(x) = \sin \frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x \to 0} (\sin \frac{1}{x})$ => existiert nicht

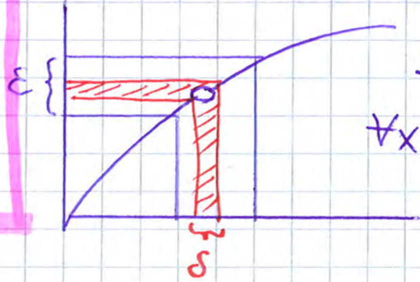
Grenzwert von Funktionen
Folgen-Definition

Definition => Folgendefinition

c heißt Grenzwert von f für x = a, wenn für alle Folgen $\langle x_n \rangle$ und $x_n \to a$ gilt, dass $\begin{cases} f(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} c \text{ bzw.} \\ \lim (f(x_n)) = c \end{cases}$



$\boxed{\lim \text{ existiert nicht}}$



$\forall \varepsilon > 0$
$\exists \delta > 0$:
$\forall x \in U_\delta(a) \Rightarrow$
$f(x) \in U_\delta(c)$

Umgebungs-Definition

Definition für Umgebungen

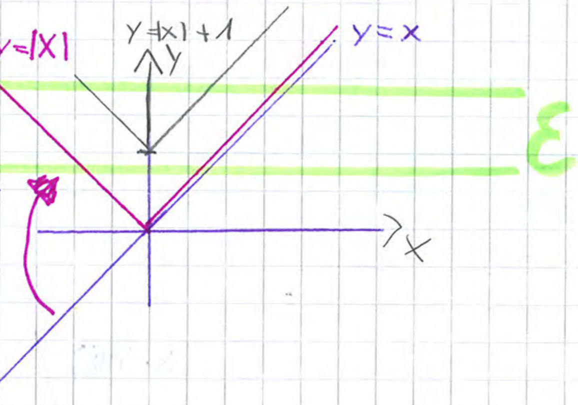
c heißt Grenzwert einer Funktion, wenn für alle $\varepsilon > 0$ eine δ-Umgebung von a (gibt) sodass für alle x aus der δ-Umgebung, die Werte in der ε-Umgebung ~~des~~ vermuteten Grenzwerts c liegen

Mathe Allg -> Kernthemen

Stetigkeit: wenn jeder Punkt einer Funktion als Grenzwert erreicht wird.

Beispiele

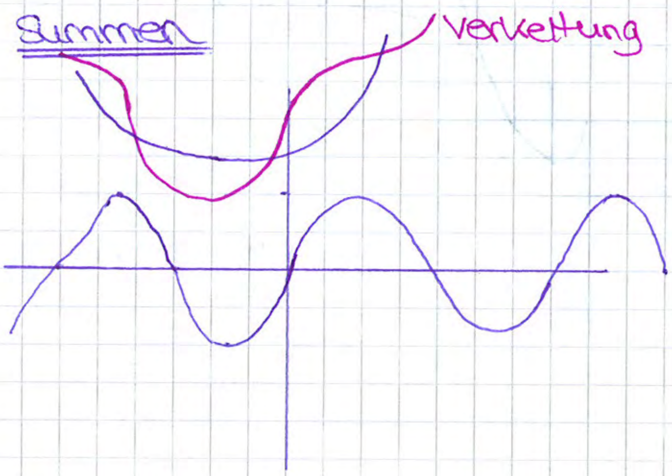
$f(x) = |x| + 1$



Lernpakete → Didaktik
↳ Analysis

Zusammensetzung von Funktionen

Summen



Parabel + sinus

im Internet gucken

Produkte

Hier, wie schon gesagt inteaktives Vorgehen in der Vorlesung

Verkettung

$y = \sin(x^2)$ x^2 = innere sin = äußere

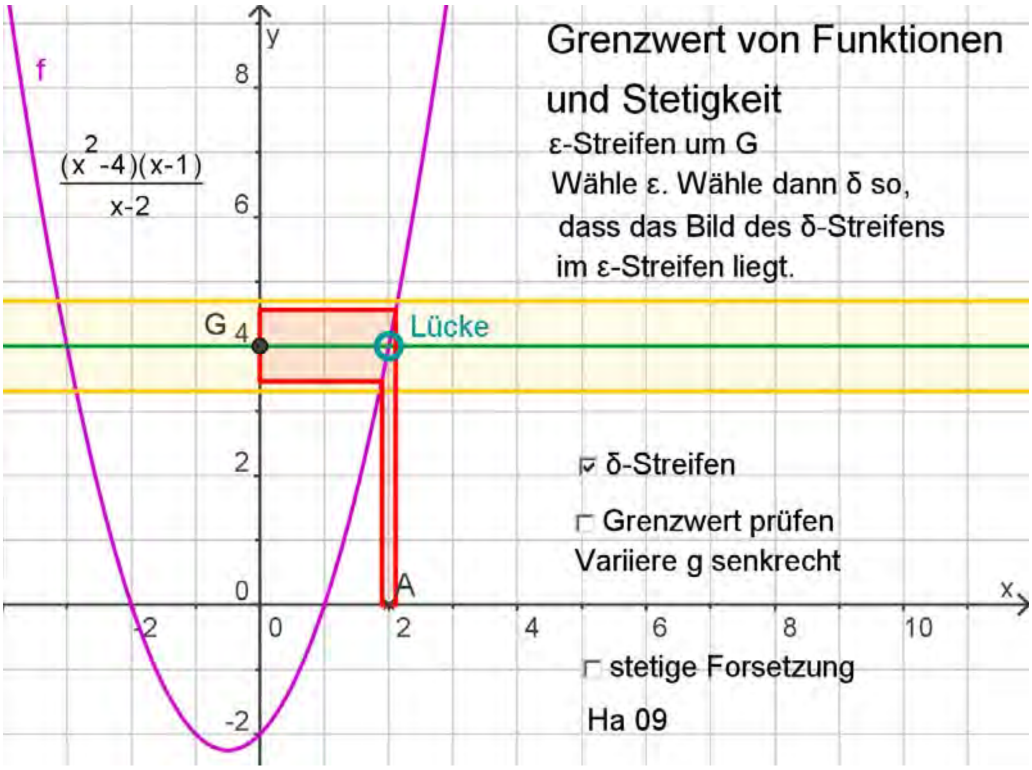
Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion in a

Gegeben ist eine Funktion f mit $f : D_f \to \mathbb{R}$, die reelle Zahlen aus ihrem Definitionsbereich D_f auf reelle Zahlen abbildet.

Gegeben sind weiterhin eine reelle Zahlen a und g. Es ist A=(a,0) und G=(0,g).

im Beispiel f mit $D_f = \mathbb{R}\setminus\{2\}$ und $f(x) = \dfrac{(x^2-4)(x-1)}{x-2}$ und $a = 2; g = 4$

.



Umgebungs-Definition: g heißt **Grenzwert der Funktion** f, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle x aus $U_\delta(a)$ (=δ – Umgebung von a) die Funktionswerte in $U_\varepsilon(g)$ (=ε – Umgebung von g) liegen.

Formale Schreibweise dieses Textes:

$$\lim_{x\to a} f(x) = g \quad \Leftrightarrow \left(\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 : \quad \forall \;\; x \in U_\delta \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(g) \right)$$

oder

$$\lim_{x\to a} f(x) = g \quad \Leftrightarrow \left(\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 : \;\; \forall x : |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon \right)$$

Folgendefinition des Grenzwertes einer Funktion:

$$\lim_{x\to a} f(x) = g \quad \Leftrightarrow \left(\forall \langle a_n \rangle : \lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(a_n) = g \right)$$

Die Funktion f heißt **stetig** in $a \in D_f \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

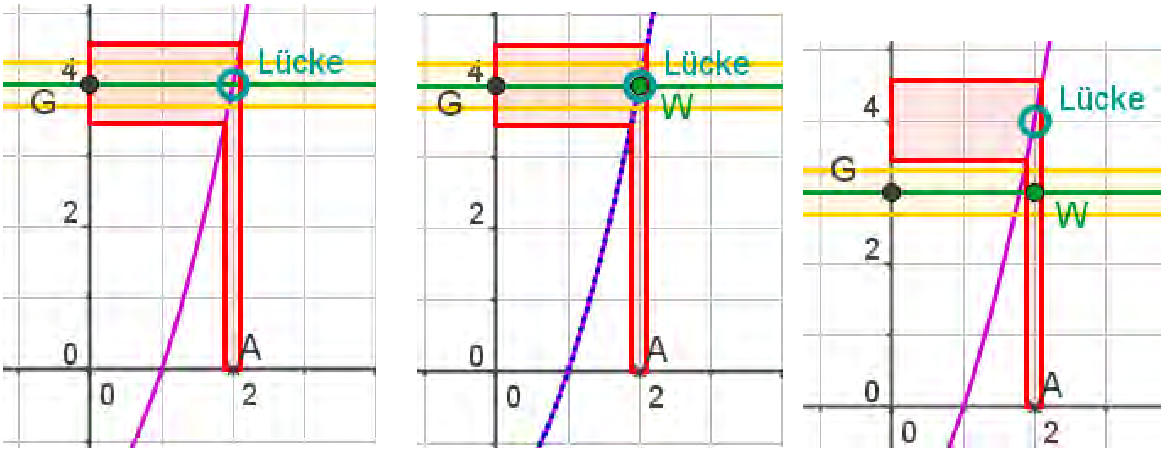
Stetige und unstetige Funktionen

Fortsetzung von“ Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen“

Gegeben ist f mit $D_f = \mathbb{R}\setminus\{2\}$ und $f(x) = \dfrac{\left(x^2-4\right)(x-1)}{x-2}$.

Betrachtet wird auch f_s mit $D_{f_s} = \mathbb{R}$ und $f_s(x) = (x+2)(x-1)$.

Variante ist k mit $D_k = \mathbb{R}$ und $k(x) = \begin{cases} \dfrac{\left(x^2-4\right)(x-1)}{x-2} & \text{für } x \neq 2 \\ 3 & \text{für } x = 2 \end{cases}$.



Die Funktion f hat an der Stelle x=2 eine Definitionslücke.

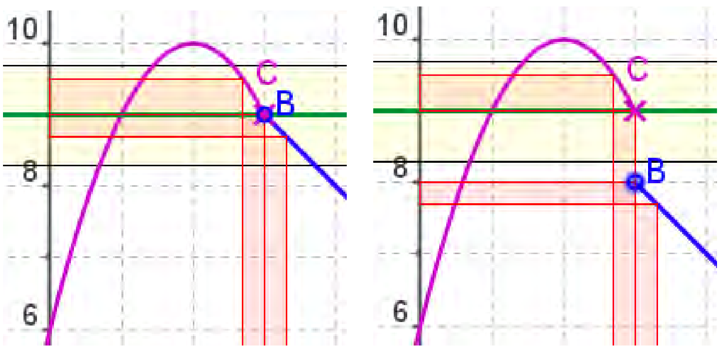
Falsch ist: f ist an der Stelle x=2 unstetig, denn die Stetigkeit ist nur für Stellen aus dem Definitonsbereich definiert.

Der Funktionsterm von f_s geht durch Kürzen aus dem von f hervor.

Die Funktion f_s ist überall stetig, f_s heißt stetige Fortsetzung von f.

Die Funktion k überall definiert, aber sie **ist unstetig an der Stelle x=2.**

Es gilt nämlich $\lim\limits_{x\to 2} k(x) = 4 \neq 3 = k(2)$



$$f(x) = \begin{cases} -(x-2)^2+10 & \text{für } x \leq 3 \\ -(x-3)+9 & \text{für } x > 3 \end{cases}$$

$$k(x) = \begin{cases} -(x-2)^2+10 & \text{für } x \leq 3 \\ -(x-3)+8 & \text{für } x > 3 \end{cases}$$

Die Funktion f ist an der Stelle x=3 stetig, denn beide Teilfunktionen haben an der Stelle x=3 denselben Funktionswert. Die untere Teilfunktion hat den Funktionswert der oberen Teilfunktion als Grenzwert. Man braucht nur zu prüfen,

$$\left.\begin{array}{l} f(3) = -(3-2)^2+10 = -1^2+10 = 9 \\ \left(-(x-3)+9\right)\big|_{x=3} = 9 \end{array}\right\} \textit{ist gleich}.$$

k ist in x=3 unstetig.

Differentialrechnung (www) 29.04.09

= das „Mathematische Fahrrad"

Einführungsbsp:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$$

Gesucht: Steigung für $x = 1$ (in $P = 1|2{,}5$)

→ Sekante: zweiter Punkt H $(1+H \mid f(1+H)) = \left((1+h) \mid \frac{(1+H)^2}{2} + 2\right)$

$$\text{Steigung } m_{sek}(1,h) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{hoch}}{\text{breit}} = \frac{\frac{(1+H)^2}{2} + 2 - 2{,}5}{h} = \frac{\frac{(1+h)^2}{2} - 0{,}5}{h}$$

$$y(H) - y(P) = \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{2h} = \frac{h^2 + 2h}{2h}$$

$$= \frac{h(h+2)}{2h} \xrightarrow[h \to 0]{} 1$$

$\frac{(1+h)^2 - 0{,}5}{h} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+h)^2 - \frac{1}{2}}{h}$

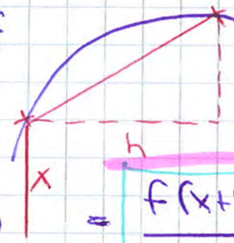
$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+h)^2 - 1}{h}$

Stetige Fortsetzung: $m_{sek} = \frac{h+2}{2} = \frac{1}{2}h + 1 \xrightarrow[h \to 0]{} 1$

⇒ durch kürzen eines Bestandteils entsteht quasi eine neue Fkt. $\frac{\neq}{0}$

Sek-steigungsfkt. geht für $h \to 0 \Rightarrow m_{Tang}(1) = f'(x)$

Allgemein f



Der Grenzwert der Sekantensteigungsfunktion entspricht der Steigung der Tangente

$$m_{sek}(x,h) = \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{\text{Differenzenquotient}} \xrightarrow[h \to 0]{} \underbrace{\boxed{f'(x)}}_{\text{Differentialquotient}} = m_{tang}(x)$$

heißt Ableitung von f

$f(x) \to f: x$
$f'(x) \to f': x$ $\Big\}$ $f'(x) = m_{tang}(x)$ an die Funkt. f

Differentialquotient $\frac{d(f(x))}{dx}$

von d f(x) nach dx

Beispiele für die Bestimmung der Ableitung des Grenzwertes

$f(x) = x^2$ $\quad m_{sek}(x,h) = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{\boxed{x^2} + 2hx + h^2 \boxed{-x^2}}{h}$ heben sich auf

$$= \frac{2hx + h^2}{h} \underset{h \neq 0}{=} 2x + h \xrightarrow[h \to 0]{} \boxed{2x = f'(x)}$$

kürzen darf ich für $h \neq 0$

$(x^2)' = 2x$

1. 2 neue Grenzwertzettel

$f(x) = x^k \quad \rightarrow \quad \frac{(x+h)^k - x^k}{h}$

$k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ Pascalsches Dreieck

$$\begin{array}{ccccccccc} &&&& 1 &&&& \\ &&& 1 && 1 &&& \\ && 1 && 2 && 1 && \\ & 1 && 3 && 3 && 1 & \\ 1 && 4 && 6 && 4 && 1 \\ &&& 10 &&& \dots && \end{array}$$

fällt weg

$$= \frac{x^k + x^{k-1} \cdot h + x^{k-2} \cdot h + 1 + \ldots - x^k}{h}$$

$\underset{h \to 0}{\hookrightarrow} k \cdot x^{k-1}$

k:

$(x+b)^4 = x^4 + 4x^3 b + 6x^2b^2 + 4xb^3 + b^4$

$x^2 + 2bx + b^2$

$x^3 + 3x^2 b + 3xb^2 + b^3$

05.05.09

Differenzenquotient = Sekantensteigung

Differenzenquotient = Grenzwert

fertig: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

1 $a(f(x))' = a \cdot f'(x)$ => Behauptung

Grafisch:

- doppelte Steigung
- Faktor $a = 2$

formaler Beweis:

$$m_f = \frac{a f(x+h) - a(f(x))}{h}$$

$$= a \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{\swarrow h \to 0}$$

$$= a \cdot f'(x) \qquad \text{q.e.d.}$$

2 Behauptung: $[g(x) + f(x)]' = g'(x) + f'(x)$

Beweis: $m_s = \dfrac{\overset{\text{eine Fkt.}}{\boxed{g(x+h) + f(x+h)}} - [g(x) + f(x)]}{h}$

$$= \underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{\downarrow h \to 0} + \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{\downarrow h \to 0}$$

$$g'(x) \quad + \quad f'(x) \quad \Rightarrow [g(x) + f(x)]'$$

Meta-Sicht: Menge der stetigen Fkt $\mathcal{C}$

$\{f, h, g, f+g, f \circ g, f \cdot a \circ g, \ldots\}$

$f+g: x \to f(x) + g(x)$

$$\boxed{(f+g)' = f' + g'}$$

Beweise der Abl. theoreme

Seite 1/2

Differentialquotienten

Differenzenquotient = Sekantensteigung in einem Punkt P der Funktion f Ha 6.6.

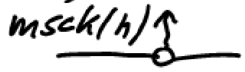
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = m_{sek}(h) \qquad f: x \to y = f(x)$$

$$\Big\downarrow h\to 0 \qquad \Big\downarrow h\to 0 \qquad \Big\downarrow h\to 0$$

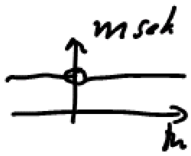
$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = m_{tang}(x)$$ falls existiert

Differentialquotient von $y=f(x)$ = Ableitung von f = Tangentensteigung von f in $P(x,y)$

$$f(x)=1 \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-1}{h} = \frac{0}{h} \underset{h\neq 0}{=} 0 \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

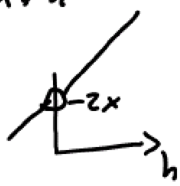


$$f(x)=x \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x+h-x}{h} = \frac{h}{h} \underset{h\neq 0}{=} 1 \xrightarrow[h\to 0]{} 1$$



$$f(x)=x^2 \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \frac{2xh+h^2}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} \underset{h\neq 0}{=} 2x+h$$

$$\lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$$



$f(x)=x^3$ ...... ebenso $f'(x)=3x^2$

$$k\in\mathbb{N} \qquad (x^k)' = k\,x^{k-1}$$

$$k=0 \qquad (1)' = 0$$

Achtung solche Seiten werden an der Tafel vor den Augen der Studis entwickelt, ohne dass diese mitschreiben müssen. Dieses ist dann das (etwas ergänzte) Ergebnis

Bei der folgenden Seite z.B. zeige ich die Pdf-Seite und markiere die Farbig den gemeinsam vollzogenen Gedankengang.

$f(x)=\frac{1}{x}$ $\quad \dfrac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\dfrac{x-(x+h)}{x(x+h)\cdot h}=\dfrac{-h}{x(x+h)h}$

$\underset{h\neq 0}{\overset{\uparrow}{=}}\dfrac{-1}{x(x+h)}\xrightarrow{h\to 0}\dfrac{-1}{x^2}$

$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$

$f(x)=\sqrt{x}$ $\quad \dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\dfrac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$

$=\dfrac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\dfrac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\underset{h\neq 0}{\overset{\uparrow}{=}}\dfrac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\xrightarrow{h\to 0}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$(ag)'=ag'$,

$f(x)=a\,g(x)$, $a\in\mathbb{R}$ $\quad \dfrac{a(g(x+h))-ag(x)}{h}=a\,\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}\xrightarrow{h\to 0}a\,g'(x)$ falls existiert

$\ell(x)=g(x)+f(x)$ $\quad \dfrac{g(x+h)+f(x+h)-g(x)+f(x)}{h}=\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}+\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$\downarrow h\to 0 \qquad \downarrow h\to 0$

$g'(x)+f'(x)$ falls ex.

$(g+f)'=g'+f'$

Linearität des Differentialoperators

$(af+bg)'=af'+bg'$

$\left(5x^2-3x+\frac{7}{x}\right)'=10x-3-\frac{7}{x^2}$

Verschieben: $(f(x-a)+b)'=f'(x-a)$

$(\sqrt{x-11}+3)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x-11}}$

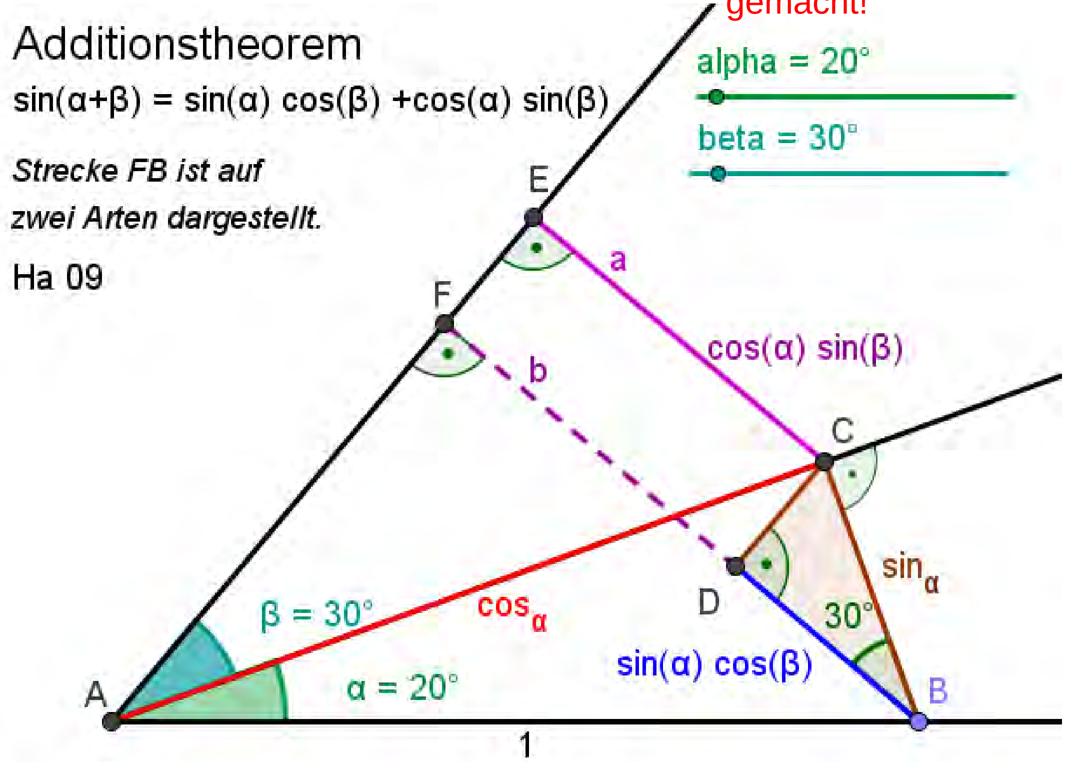
Strecken $\leftrightarrow$ $f(x)=g(ax)$ Alle Steigungsdreiecke haben $\frac{1}{a}$-fache Breite bei gleicher Höhe daher wird die Steigung a-fach

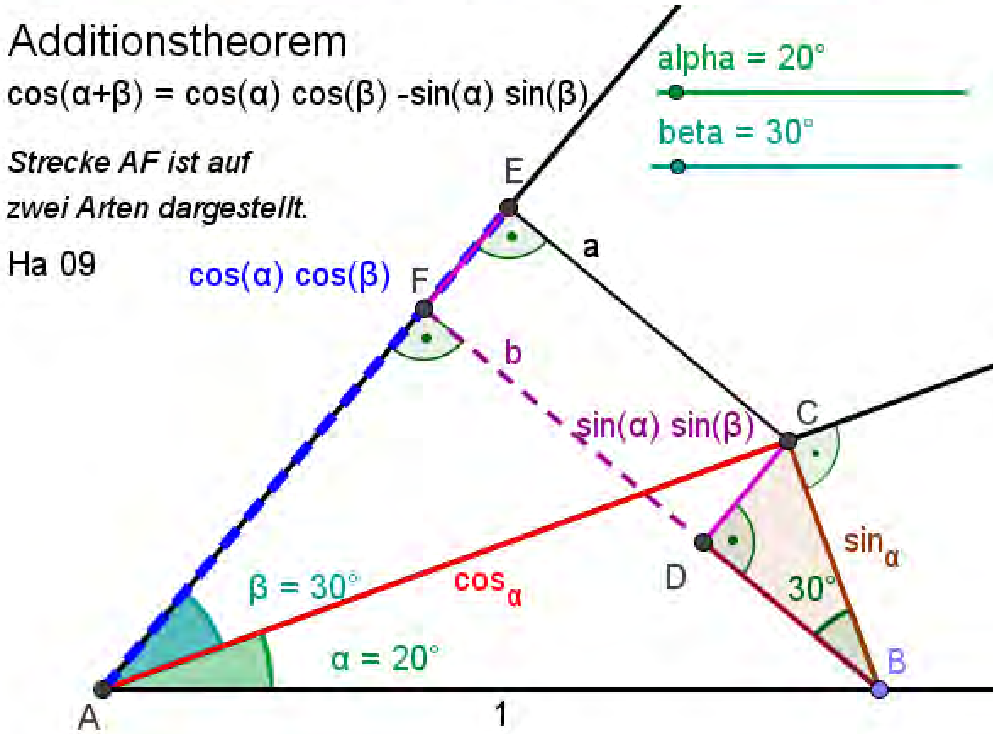
$g'(ax)=a\,g'(ax)$

$(\sqrt{7x+4})'=7\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{7x+4}}$

Achtung, 2011 habe ich dies nicht gemacht!

Beweise der Additionstheoreme





Zu beachten ist, dass bei B der Winkel beta auftaucht. Grund ist der Satz:
Zwei Winkel, deren Schenkel senkrecht aufeinander stehen, sind gleich groß.
Bestätigung mit der Eulerschen Formel für komplexe Zahlen. Dies ist kein „Beweis", da man zur Herleitung der Eulerformel die Ableitungen von Sinus und Kosinus braucht. Für den Beweis der Ableitungen braucht man aber schon die Additionstheoreme.

$$e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha+\beta) + i\ \sin(\alpha+\beta) =$$

$$e^{i\alpha}\cdot e^{i\beta} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)$$

Ausmultiplizieren, Real- und Imaginärteil getrennt betrachten, und schon stehen diese beiden Additionstheoreme da.

Ableitung der Sinusfunktion, mit Beweis

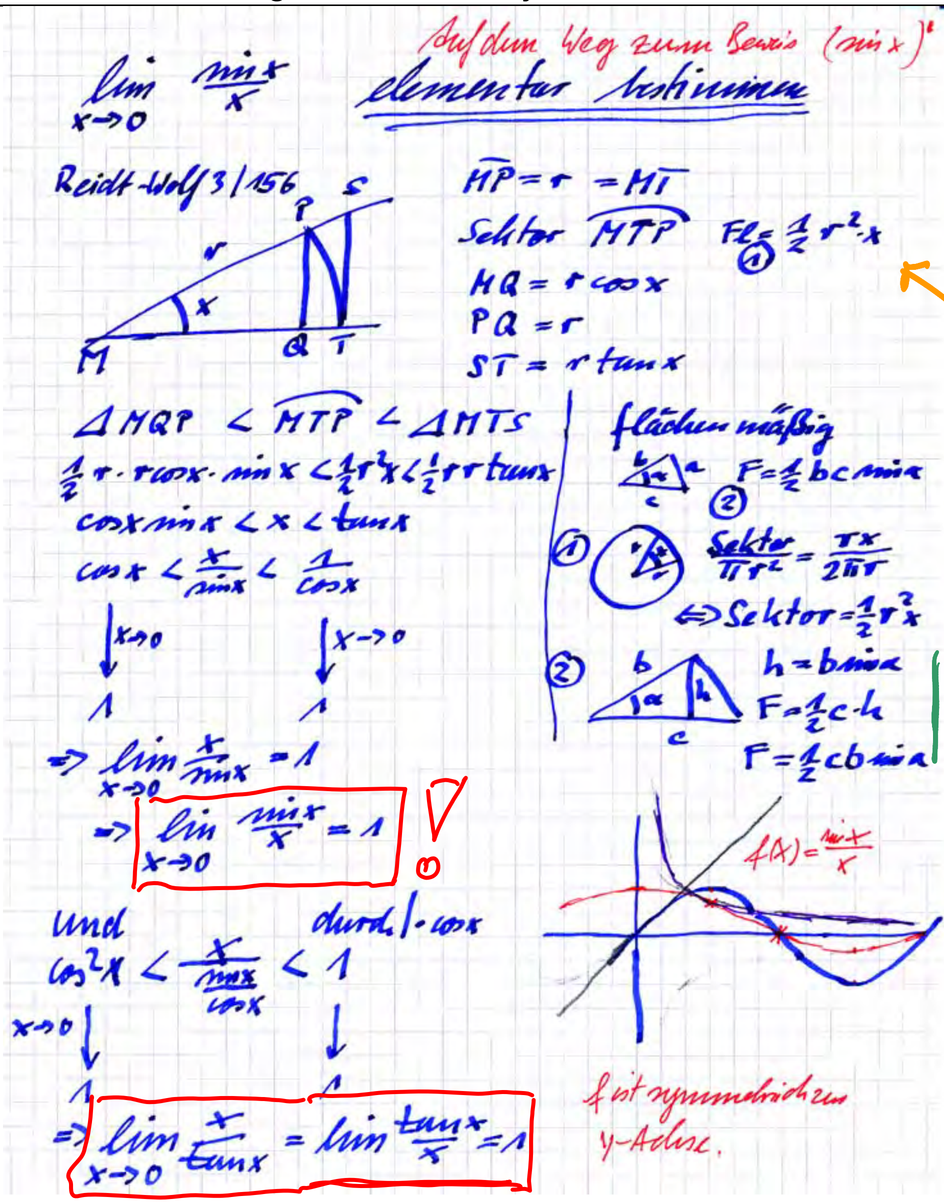
Empfohlene Vorgehensweise: Sehen Sie sich (mit Ihren Schülern) mit den Dateien (z.B. GeoGebra) zum interaktiven Ableiten den Graphen der Ableitung der Sinusfunktion an. Klar, jeder sieht, dass es sich um die Kosinusfunktion handeln müsste.

Lassen Sie GeoGebra noch selbst den Kosinus zeichnen. Der passt dann genau auf die Ortskurve. Damit haben Sie $\left(\sin(x)\right)' = \cos(x)$.

Gut, das ist kein “Beweis“, aber Sie können dasselbe ja in (fast) beliebig kleinen Ausschnitten auch machen. Für eine Lehrsituation ist jetzt alles klar.

Das Folgende zeigt, was man machen müsste, damit man es wirklich beweist.

Das geschieht in drei Schritten. Der erste ist schwierigste: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$ muss elementar bestimmt werden. Wenn man das nur durch Graphenbegucken macht, dann kann man gleich den oben empfohlenen Weg nehmen. Wenn man es mit l’Hospital oder Taylor macht, dreht man sich im Kreis, denn diese Wege verwenden die Ableitung, die man hier ja erst beschaffen will.



Unten auf Seite 1 ist noch $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$ bewiesen, das ergibt sich aus demselben Beweis, wird aber im Weiteren nicht benötigt.

Zweiter Schritt: Beweis von

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$ unter Verwendung von $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

Achtung: in diesem Zusammenhang kann nur Beweis 1 verwendet werden!!!!!!!!

Auf dem Weg zum Beweis von $(\sin x)'$ kommt nur ① in Frage.

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$ ① elementar unter Nutzung $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$\frac{\cos x - 1}{x} = \frac{\cos x - 1}{x} \cdot \frac{\cos x + 1}{\cos x + 1}$$

$$= \frac{\cos^2 x - 1}{x \cdot (\cos x + 1)} = \frac{-\sin^2 x}{x(\cos x + 1)}$$

$$= -\underbrace{\frac{\sin^2 x}{x^2}}_{\downarrow x\to 0} \cdot \underbrace{\frac{x}{\cos x + 1}}_{\downarrow x\to 0}$$

$$= -1 \cdot 0$$

$$= 0$$

Also $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$

② mit l'Hopital

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{1} = 0$$

③ mit Taylorreihe

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \ldots\right)\right) = \lim_{x\to 0} \left(-\frac{x}{2!} + \frac{x^3}{4!} - \ldots\right)$$

$$= 0$$

Dritter Schritt: Die Betrachtung des Differenzenquotienten und die Bestimmung seines Grenzwertes

Dabei wird das folgende Additionstheorem verwendet:

$$\sin(x+h) = \sin(x)\cdot\cos(h) + \cos(x)\cdot\sin(h)$$

Das hat man heute in der Schule meist auch nicht zur Verfügung!!!!!

Ableitung $(\sin x)'$ $\boxed{\text{Beweis}}$

$$msek(x,h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$= \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}$$

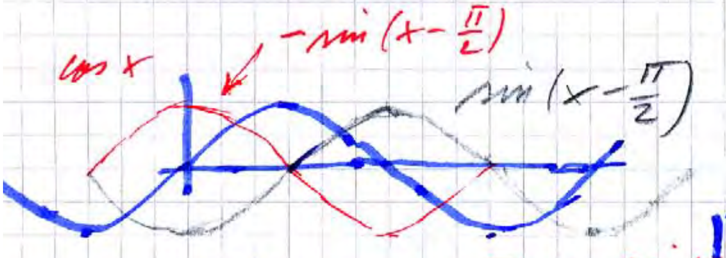
$$= \sin x \cdot \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\downarrow\, h\to 0} + \cos x \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\downarrow\, h\to 0}$$

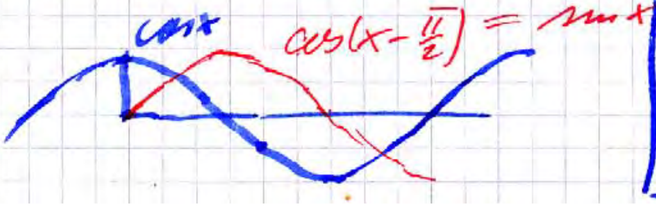
$$(\sin x)' = \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1$$

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$$

$$\cos x = -\sin(x - \tfrac{\pi}{2})$$

$$(\cos x)' = -(\sin(x-\tfrac{\pi}{2}))' = -\cos(x-\tfrac{\pi}{2})$$
$$= -\sin(x)$$





$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$

Ableitung vom sin(x)

Grafische Darstellung!

$\sin(x)' = ?$ (oder: $\sin' = ?$)

$= \cos$

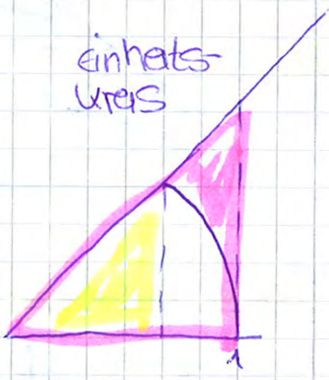
$m_{sek}: \dfrac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$ ($① \sin(x+h) : \sin(x) \cdot \cos(h) + \cos(x) \sin(h)$)

$= \dfrac{\sin x \cdot \cos h + \cos x \cdot \sin h - \sin x}{h}$

$= \sin x \cdot \underbrace{\dfrac{\cos h - 1}{h}}_{\downarrow h \to 0 \quad ② \; 0} + \cos x \underbrace{\dfrac{\sin h}{h}}_{\downarrow h \to 0 \quad ③ \; 1}$

$= [\sin(x)]' = \cos x$ q.e.d.

Einheitskreis



$\triangle <$ Sektor $< \triangle$

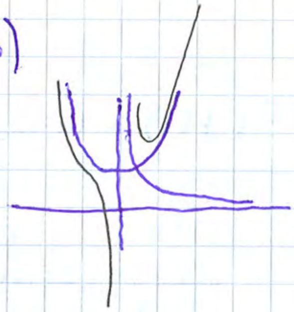
„Bierzeltordner"

Additionstheorem sind Sätze mit denen man sin ∧ cos aufdrösseln kann

Anschaul. Analysis

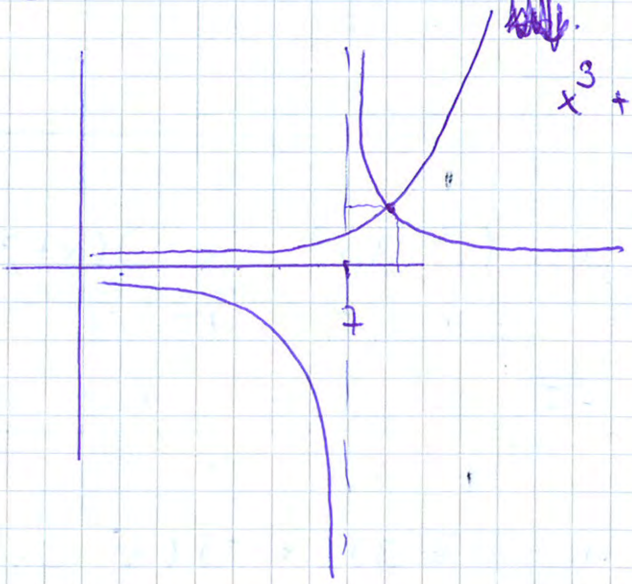
06.05.09

zu 2b)



$\frac{1}{x-2} \wedge x^2+1$

$x^3 + \frac{1}{x-7}$



$\left(\frac{1}{x-7}\right)'$:

$(x-7)^{-1} = \frac{-1}{(x-7)^2}$

$\frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow$ Abl. $-1x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

$3x+4$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{3(x+h)+\cancel{3}\,4 - (3x+4)}{h}$$

$$= 3x+3h+4-3x-4$$

$$= \frac{3h}{h}$$

Kettenregel ⇒ Heft

Merkversion $y=f(x) = g(k(x))$

$y = f(x) = \sin(x^2)$ $\quad \Rightarrow \sin z$

$z = x^2$

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{\frac{dy}{dz}}_{\cos(z)} \cdot \underbrace{\frac{dz}{dx}}_{2x}$$

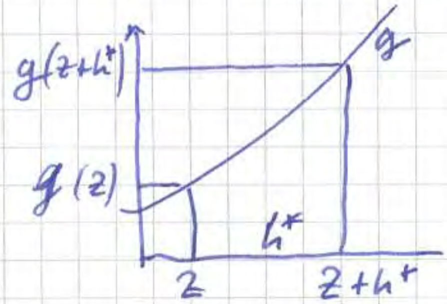
$\cos(z)$ $\quad 2x$ = innere Ableitung

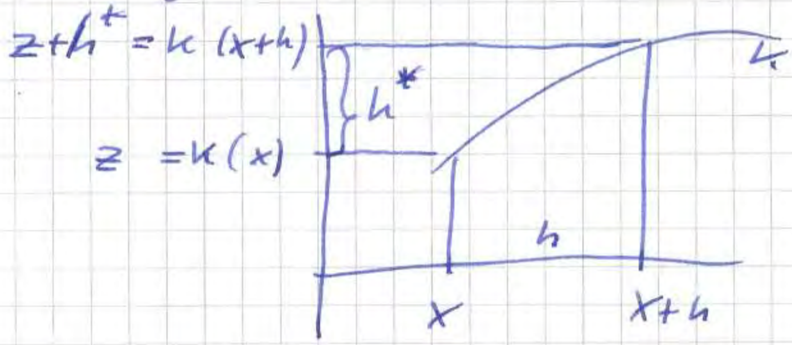
äußere Ableitung

$|\sin(x^2)|' = f'(x) = \cos(x^2)\cdot 2x$

Kettenregel (vereinfachter Beweis)

$y = f(x) = g(k(x)) = g(z)$ mit $z = k(x)$





$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{g(k(x+h))-g(k(x))}{h}$$

$$= \frac{g(z+h^*)-g(z)}{h}$$

Bem.

$$= \frac{g(z+h^*)-g(z)}{h^*} \cdot \frac{h^*}{h}$$

$$= \frac{g(z+h^*)-g(z)}{h^*} \cdot \frac{k(x+h)-k(x)}{h}$$

$h \to 0$

$h \to 0$ also, weil k stetig $h^* \to 0$ weil g diffbar

$h \to 0$ weil k diffbar

Also existiert Grenzwert

$$f'(x) = g'(z) \cdot k'(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

$y = \sin(\sqrt{x})$ $\quad y = \underset{g}{\sin}(z)$ $\quad z = \underset{k}{\sqrt{x}}$

$$y' = (\sin(\sqrt{x}))' = \cos(z) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Mfa 06/03

$$= \cos(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Bem. hier liegt die Vereinfachung darin, dass $h^* = 0$ sein könnte, ohne dass $h = 0$ ist, dann aber hätte man nicht erweitern dürfen. Siehe dazu "Beweis ohne Bruchterme".

$\boxed{\text{Kettenregel}}$ mit Beweis ohne Bruchkürzen

$$y = f(x) = g(k(x)) = g(z) \quad \text{mit } z = k(x)$$
und g, k diffbar

z.B. $y = \sin(x^2) = \sin(x^2) = \sin(z)$ mit $z = x^2$

Behauptung $\boxed{f'(x) = g'(z)\cdot k'(x)}$ $\left\{ \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} \right\}$

$$f'(x) = \left(\sin(x^2)\right)' = \cos(z)\cdot 2x = \cos(x^2)\cdot 2x$$

$\boxed{\text{Beweis}}$ Taylorreihe $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + rest\cdot(x-x_0)$

mit $x = x_0 + h \Rightarrow f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + rest\cdot h$

mit $rest \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

also für $x = x_0$
$$f(x+h) - f(x) = f'(x)\cdot h + rest\cdot h \quad ①$$

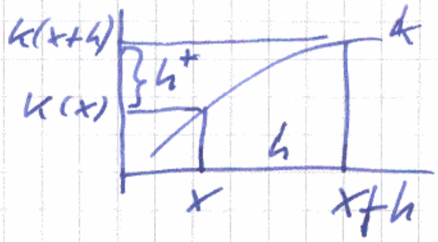
also auch $g(z+h^*) - g(z) = g'(z)\cdot h^* + r_g\cdot h^*$ ②

und $h^* = k(x+h) - k(x) = k'(x)\cdot h + r_k\cdot h$ ③

① ist für dieses f nachzuweisen für alle x, für die ② und ③ gelten.

k ist diffbar in x

$\Rightarrow h^* \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ ($\Rightarrow$ k stetig)



① linke Seite

$$f(x+h) - f(x) = g(k(x+h)) - g(k(x)) = g(k(x)+h^*) - g(k(x))$$
$$= g(z+h^*) - g(z) \underset{②}{=} g'(z)\cdot h^* + r_g\cdot h^*$$
$$\underset{③}{=} g'(z)\cdot(k'(x)\cdot h + r_k\cdot h) + r_g(k'(x)\cdot h + r_k h)$$
$$= g'(z)\cdot k'(x)\cdot h + \underbrace{(\underbrace{g'(z)}_{\text{beschränkt}} r_k + r_g \underbrace{k'(x)}_{\text{beschränkt}} + r_k)}_{\text{Rest}}\cdot h$$

damit ist rechte Seite von ① erreicht

Rest mit $\text{Rest} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

mit

$$f'(x) = g'(z)\cdot k'(x)$$

qed.

Ha 06/03

Das Hornerschema ist ergiebig und macht Spaß.

Und es ist Klausurfreundlich!

Hornerschema $\Rightarrow$ Heft

$f(x) = x^4 + 7x^3 + 15x^2 + 7x - 6$

$(f(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdot \ldots + a_0$

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 7 & 15 & 7 & -6 \\
\boxed{-3} & 0 & -3 & -12 & -9 & +6 \\
\hline
 & 1 & 4 & 3 & -2 & \underline{\underline{0}}
\end{array}$$

wenn ich ganzzahlige LS suche stecken ~~stets~~ als Faktor in a_0

Bei 6: 8 Möglichkeiten:

1, 2, 3, 6

−1, −2, −3, −6

also $\underbrace{(x^3 + 4x^2 + 3x - 2)}_{\text{Polynom 3. Grades}}(x+3) = f(x)$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 4 & 3 & -2 \\
\boxed{-2} & 0 & -2 & -4 & +2 \\
\hline
 & 1 & +2 & -1 & \underline{\underline{0}}
\end{array}$$

also: $(x+3)(x+2)\underbrace{(x^2 + 2x - 1)}_{\text{Polynom 2. Grades}}$

und jetzt:

$x^2 + 2x - 1 = 0$

$\downarrow :2 \to {}^2$

$x^2 + 2x + 1 - 1 - 1 = 0$

$\underbrace{x^2 + 2x + 1}_{(x+1)^2} = +2$

$(x+1)^2 = 2 \quad | \sqrt{}$

$|x+1| = \sqrt{2}$

also x_3: $x + 1 = \sqrt{2}$ $\Leftrightarrow$ $x_3 = \sqrt{2} - 1$

x_4: $-x - 1 = \sqrt{2}$ $\quad |+1$

$-x = \sqrt{2} - 1$ $\quad | \cdot (-1)$

$x_4 = -\sqrt{2} - 1$

$\Rightarrow f(x) = x^4 + 7x^3 + 15x^2 + 7x - 6$

1. Schritt $= x^3(x+7) + \ldots$

2. Schritt $= ((x+7)x + 15)x^2 + 7x - 6$

3. Schritt $= (((x+7)x + 15)x + 7)x - 6$

$f(x) = x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 4x + 5$

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & -4 & -6 & 4 & 5 \\
1 & & 1 & -3 & -9 & -5 \\
\hline
 & 1 & -3 & -9 & -5 & \boxed{0} \\
-1 & & -1 & 4 & +5 & \\
\hline
 & 1 & -4 & -5 & \boxed{0} & \\
5 & & 5 & 5 & & \\
\hline
 & 1 & 1 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

$f(x)$

$= (x-1)(x^3 - 3x^2 - 9x - 5)$

$= (x-1)(x+1)(x^2 - 4x + 5)$

$= (x-1)(x+1)(x-5)(x+1)$

$\to (x+1)$ - Rest

Also $f(x) = (x-1)(x+1)^2(x-5)$

Horner-Schema

hornerschema.pdf

Die Auswertung von Polynomen ist numerisch durchaus heikel.
Wegen der Potenzen und der Differenzbildungen ist numerische Instabilität häufig.
Jedes Polynom

$$p_n(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0$$

kann man in der Klammerform schreiben

$$p_n(x)=((((a_n x+a_{n-1})x+a_{n-2})x+a_{n-3})x+\ldots\ldots+a_1)x+a_0$$

	A	B	C	D	E	F
1		a4	a3	a2	a1	a0
2	x	1	-4	-6	4	5
3	-1		-1	5	1	-5
4		1	-5	-1	5	0
5	-1		-1	6	-5	0
6		1	-6	5	0	0
7	1		1	-5	0	0
8		1	-5	0	0	0
9	5		5	0	0	0
10		1	0	0	0	0
11						

Dieser Darstellung entspricht ein Rechenschema, das sich fühen von Hand und heute mit TR oder Tabellenkalkulation leicht durchziehen lässt.

Beispiel $p_4(x)=x^4-4x^3-6x^2+4x+5$

In die 1. Zeile schreibt man alle a_i , nicht vorhandene als ***0*** ,
vorn die Einsetzung x_0 .
Senkrecht wird addiert, hier zuerst B4
das Ergebnis dann mit x_0 multipliziert, ergibt C3, senkrecht addiert ergibt B5 usw.
Als letztes ergibt sich $p(x_0)$. Diese **Berechnung ist numerisch entschieden besser**.
Hier ist p(-1)=0. X=-1 ist also Nullstelle.

In diesem Fall stehen in der Zeile 4 die Koeffizienten von $\dfrac{p_n(x)}{x-x_0}$.

Also braucht man gar nicht zu dividieren, man liest einfach ab:

$$p_4(x)=x^4-4x^3-6x^2+4x+5 = (x+1)\ (x^3 - 5x^2-x+5)$$

Da man nun die Nullstellen dieses rechten Faktors sucht, braucht man nur noch auf gleiche Art weiter zu machen. x=-1 ist nochmal Nullstelle, also doppelte Nullstelle.

$$p_4(x) = (x+1)^2\ (x^2 - 6x + 5)$$

Entweder man löst jetzt die quadratische Gleichung $x^2 - 6x + 5=0$ oder macht

weiter. Da als ganzzahlige Lösungen nur die Teiler der absoluten Gliedes in Frage kommen, ist man mit 1 und 5 schnell beim Ziel

$$p_4(x) = (x+1)^2\ (x-1)\ (x-5)$$

das Polynom ist vollständig zerlegt, wie man es
z.B. für die Partialbruchzerlegung braucht.

```
factor(x^4-4*x^3-6*x^2+4*x+5)
```

Klar ein CAS ist auch so programmiert: $(x-1)\cdot(x-5)\cdot(x+1)^2$

Ist x_0 aber nicht genau Nullstelle, so führt man das Hornerschema dennoch mit x_0 weiter.
Dann steht nämlich am Ende der Zeile 6 an vorletzter Stelle Platz E6 ***p'(x₀)***. Diesen Wert kann man in der Newtonformel für die numerische Nullstellensuche gebrauchen.

Name
Note
Mathematatik Klausur Nr.2 Kl.11/6 8.12.81 Ha Gruppe

1) Zerlegen Sie mit Hilfe des Hornerschemas vollständig in Linearfaktoren

A $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ B $f(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8$

2) a) Führen Sie die Polynomdivision soweit es geht aus.(Typ wie bei b)).

A $f(x) = \frac{3x^3 - x^2 - 3x + 2}{x-1}$ B $f(x) = \frac{2x^3 - 7x^2 + 9x - 7}{x-2}$

b) Zeichnen Sie die folgende Funktion g mit Hilfe zweier geeigneter Teilfunktionen:

A $g(x) = x^2 + 1 + \frac{1}{x-2}$ B $g(x) = x^2 + 2 - \frac{1}{x+1}$

---

3) Bekanntlich hat $y = b\,x^2$ die Ableitung $y' = 2\,b\,x$.
Begründen Sie mit Worten, warum dann $f(x) = b\,x^2 + c$ dieselbe Ableitung, nämlich $f'(x) = 2\,b\,x$ hat.
Benutzen Sie diese Tatsache im folgenden.

4) a) Zeichnen Sie die Parabel A $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$ B $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4$
und ihre Ableitung genau untereinander.

b) Zeichnen Sie die Gerade A $g(x) = \frac{3}{2}x - 3$ B $g(x) = \frac{1}{2}x + 6$
und bestimmen Sie sowohl zeichnerisch als auch rechnerisch den Berührpunkt der zu g parallelen Tangente.

c) Zeichnen Sie in dieselbe Zeichnung auch die Parabel

A $h(x) = -x^2 + 6$ B $h(x) = x^2 - 1$

und ihre Ableitung (darunter) und berechnen Sie die Schnittpunkte der beiden Parabeln (lesen Sie notfalls aus der Zeichnung ab.).

d) Unter welchem Winkel schneiden sich die Parabeln (d.h. die Tangenten)?

e) Berechnen Sie die Gleichung einer der bisher vorgekommenen Tangenten.

f) Wie kann man aus der Steigung m einer Geraden die Steigung $m_\perp$ der zu ihr senkrechten Geraden errechnen?
(Beispiel mit Skizze und Beweis).

5) a) $\left(x^2 + 1 + \frac{1}{x-2}\right)'$

b) $\left(x^2 + 2 - \frac{1}{x+1}\right)'$

d) $\left(\sqrt{x^2 + 2}\right)'$

c) $\left(\frac{1}{\sqrt{x^3 - 4x + 1}}\right)'$

Mathe-Klausur 11. Klasse

Aufgabe 1

a) I $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ → 8 Möglichkeiten: 1, 2, 3, 6, −1, −2, −3, −6

$\boxed{-2}$:

	1	−2	−5	6
−2	0	−2	+8	−6
	1	−4	+3	0

$\boxed{-2}$ ist eine Nullstelle

→ $f(x) = (x+2)(x^2 - 4x + 3)$

II	1	−4	+3
+3	0	3	−3
	1	−1	0

$\boxed{+3}$ ist eine Nullstelle

→ $f(x) = (x+2)(x-3)(x-1)$

b) $f(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8$ → 8 Möglichkeiten 1, 2, 4, 8, −1, −2, −4, −8

I	1	1	−10	8
−4	0	−4	+12	−8
	1	−3	+2	0

$\boxed{-4}$ ist eine Nullstelle

→ $f(x) = (x+4)(x^2 - 3x + 2)$

II	1	−3	+2
1	0	1	−2
	1	−2	0

$\boxed{+1}$ ist eine Nullstelle

→ $f(x) = (x+4)(x-1)(x-2)$

alternativ zu II:

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\underbrace{x^2 - 3x + 1{,}5^2}_{(x-1{,}5)^2} - 1{,}5^2 + 2 = 0$$

$$(x - 1{,}5)^2 = +0{,}25 \quad |\sqrt{}$$

$$|x - 1{,}5| = 0{,}5$$

$x_1 \Rightarrow x - 1{,}5 = 0{,}5 \quad | +1{,}5$

$x = 2$

$x_2 \Rightarrow -x + 1{,}5 = 0{,}5 \quad | +x$

$1{,}5 = 0{,}5 + x \quad | -0{,}5$

$1 = x$

Aufgabe 2

a) $f(x) = (3x^3 - x^2 - 3x + 2) : (x-1) = 3x^2 + 2x - 1$

$$\begin{array}{l} -(3x^3 - 3x^2) \\ \quad 0 + 2x^2 - 3x \\ \quad -(+2x^2 - 2x) \\ \quad\quad 0 \quad -x + 2 \\ \quad\quad\quad -x + 2 \\ \quad\quad\quad\quad 0 \end{array}$$

$3x^2 + 2x - 1 = 0 \quad | : 3$

$x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = 0$

$p = \frac{2}{3} \quad q = -\frac{1}{3}$

$x_{1,2} = -\frac{\frac{2}{3}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{2}{3}}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{3}\right)}$

$= -\frac{1}{9} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}}$

$= -\frac{1}{9} \pm \sqrt{\frac{4}{9}} = -\frac{1}{9} \pm \frac{2}{3} = \frac{5}{9} \wedge -\frac{7}{9}$

b) $f(x) = (2x^3 - 7x^2 + 9x - 7) : (x-2) = 2x^2 - 3x + 3$

$$\begin{array}{l} -(2x^3 - 4x^2) \\ \quad 0 \quad -3x^2 + 9x \\ \quad -(-3x^2 + 6x) \\ \quad\quad 0 \quad +3x - 7 \\ \quad\quad -(+3x - 6) \\ \quad\quad\quad 0 \quad -1 \end{array}$$

Rest -1

Aufgabe 3

: ① $y = b \cdot x^2$ ② $y = b \cdot x^2 + c$

$y' = 2 \cdot b \cdot x$ $\quad y' = 2bx$

② Hat deswegen dieselbe Ableitung, weil c ein x-loses-Glied, also eine Konstante ist um die Ableitung einer Konstanten nach x ist 0

Aufgabe 5

a) $f(x) = x^2 + 1 + \frac{1}{x-2} = x^2 + 1 + (x-2)^{-1}$

$f'(x) = 2x - 1(x-2)^{-2} = 2x - \frac{1}{(x-2)^2}$

b) $f(x) = x^2 + 2 - \frac{1}{x+1} = x^2 + 2 - 1(x+1)^{-1}$

$f'(x) = 2x + (x+1)^{-2} = 2x + \frac{1}{(x+1)^{2}}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2+2} = (x^2+2)^{0,5}$ → Kettenregel $u'(v) \cdot v'(x)$ $\quad u = v^{0,5}$, $u' = 0,5\, v^{-0,5}$ $\quad v = x^2 + 2$, $v' = 2x$

$0,5 \cdot (x^2+2)^{-0,5} \cdot 2x = x \cdot \sqrt{x^2+2}$

Aufgabe 5d

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3 - 4x + 1}} = \frac{1}{(x^3-4x+1)^{0,5}} = (x^3 - 4x + 1)^{-0,5}$

$f'(x) = u'(v) \cdot v'(x)$ $\quad u = v^{-0,5}$, $u' = -0,5 \cdot v^{-1,5}$ $\quad v = x^3 - 4x + 1$, $v' = 3x - 4$

$= -0,5 \cdot (x^3 - 4x + 1)^{-1,5} \cdot (3x - 4) = -\frac{0,5 \cdot (3x-4)}{\sqrt{(x^3-4x+1)^3}}$

Hornerschema vs. Polynomdivision

11.05.09

Gebrochenrationale Funktionen

Thema in 2011 nur sehr kurz behandelt!!!!!!!! Muss noch in Analysis II gemacht werden.

$$f(x) = \frac{(x-a)^r \cdot (x-1)}{(x-b)^s}$$

$s = \sigma \quad , a = -a$

$$f(x) = (x+3)^r (x-1)$$

Parameter = Formvariable

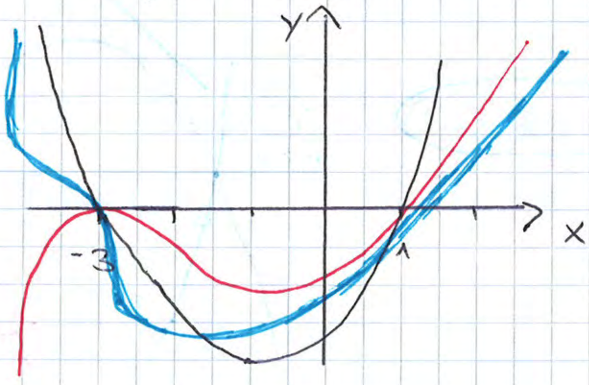
qualitativ: y-Werte außer acht lassen

Bsp:

$f(x) = (x+3)(x-1)$

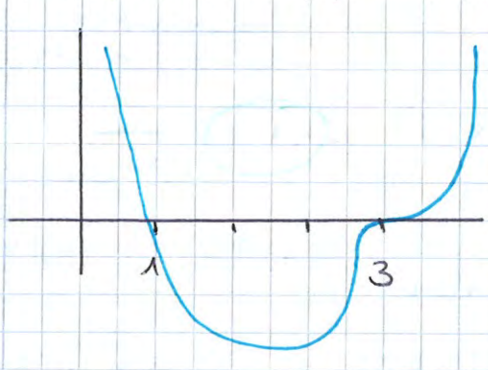
$f(x) = (x+3)^2 (x-1)$ $\searrow \nearrow$

$f(x) = (x+3)^3 (x-1)$ $\searrow \nearrow$



$r = 3: \quad f(x) = (x+3)^3 (x-1)$ $\searrow \nearrow$

$r = 3 \wedge a = +3 \Rightarrow f(x) = (x-3)^3 (x-1)$



$\Rightarrow f(x) = (x-1)(x+3)^3 \Rightarrow$ Hornerschema

$= x^4 + 8x^3 + 18 \cdot x^2 - 27$ Faktoren von 27: 1, 3, 9, -1, -3, -9, 27, -27

I)

	1	8	18	0	-27
$\boxed{1}$	0	+1	9	27	+27
	1	9	27	27	0

1 ist eine Nullstelle

$$\rightarrow f(x) = (x-1)\underbrace{(x^3 + 9x^2 + 27x + 27)}_{P_3}$$

nur positive Zahlen -> nächste 0-Stelle negativ

II)

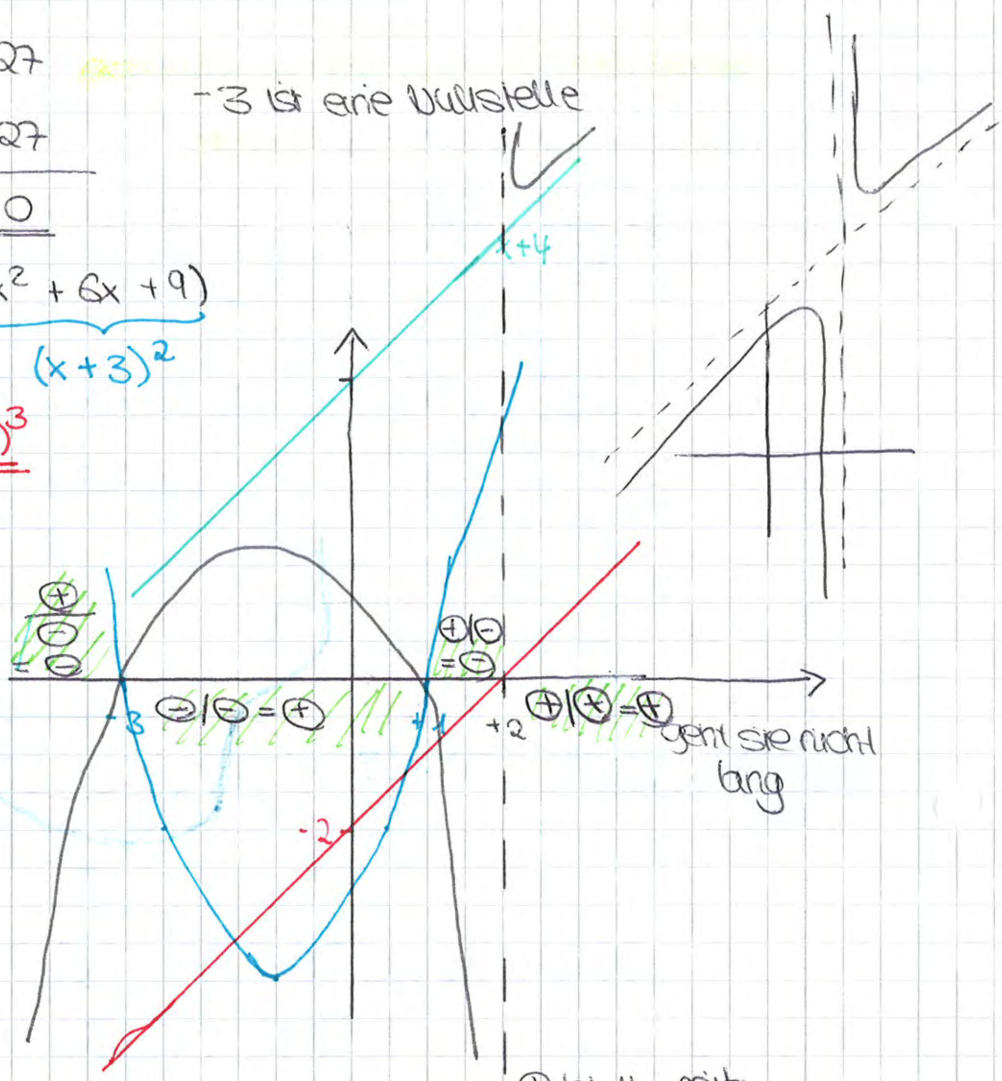
	1	9	27	27
-1	0	-1	-8	-19
	1	8	19	$+8 = P_3(8)$

	1	9	27	27
-3	0	-3	-18	-27
	1	+6	9	0

-3 ist eine Nullstelle

$\rightarrow f(x) = (x-1)(x+3)\underbrace{(x^2+6x+9)}_{(x+3)^2}$

also: $f(x) = (x-1)\cdot(x+3)^3$



Jetzt:

$f(x) = \frac{(x+3)(x-1)}{(x-2)}$

Zähler ausmultiplizieren:

$x^2 - x + 3x - 3 = (x^2+2x-3):(x-2) = \boxed{x+4} + \frac{5}{(x-2)}$

$-(x^2-2x)$

$0 \quad +4x-3$

$-(4x-8)$

$0 + 5$ Rest

Probe: $\frac{(x+4)(x-2)+5}{x-2}$

$= \frac{x^2-2x+4x-8+5}{x-2}$

$= \frac{x^2+2x-3}{x-2}$ w. A

Asymptote: Wenn der senkrecht gemessene Abstand zur Funktion den Grenzwert 0 hat (wird immer kleiner)

wenn r = s ist → Asymptote eine Gerade

Grad Zähler und Nenner = waagerecht

Zähler < Nenner: x-Achse

Zähler > Nenner: y-Achse (ausprobieren)

12.05.09

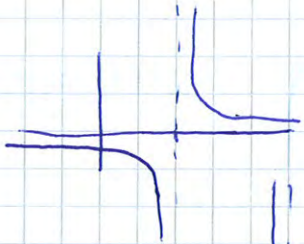
Gebrochenrationale Funktion

$$f(x) = \frac{z(x)}{n(x)}$$

Zur Erinnerung: $\frac{1}{x}$

$-\frac{1}{x}$

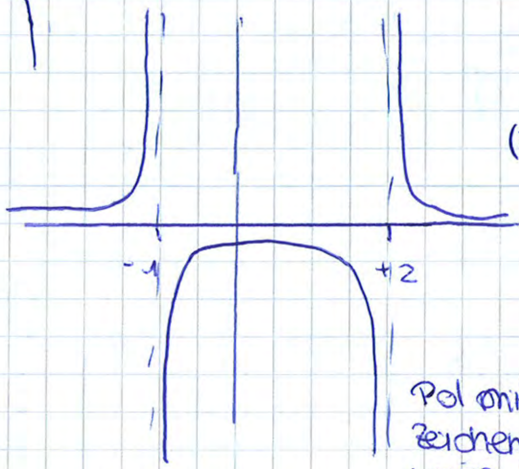
$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$



$\frac{1}{(x-2)^2}$

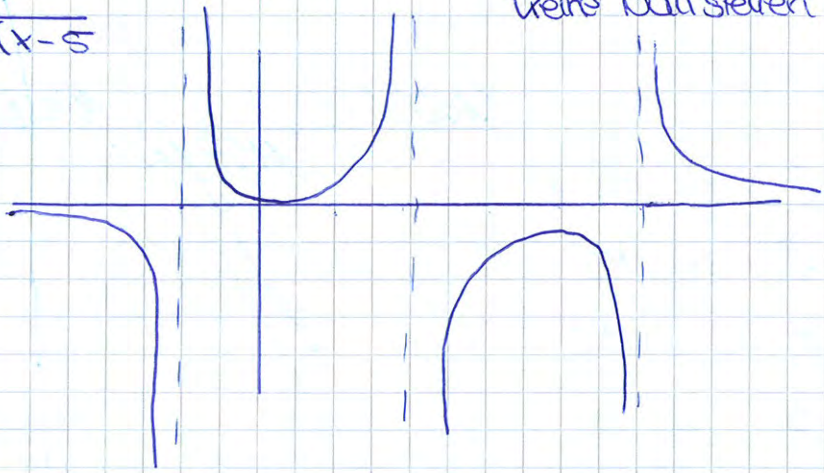
Pol ohne Zeichenwec

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)(x+1)}$$



Pol mit Zeichenwechsel
keine Nullstellen

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)(x+1)(x-5)}$$

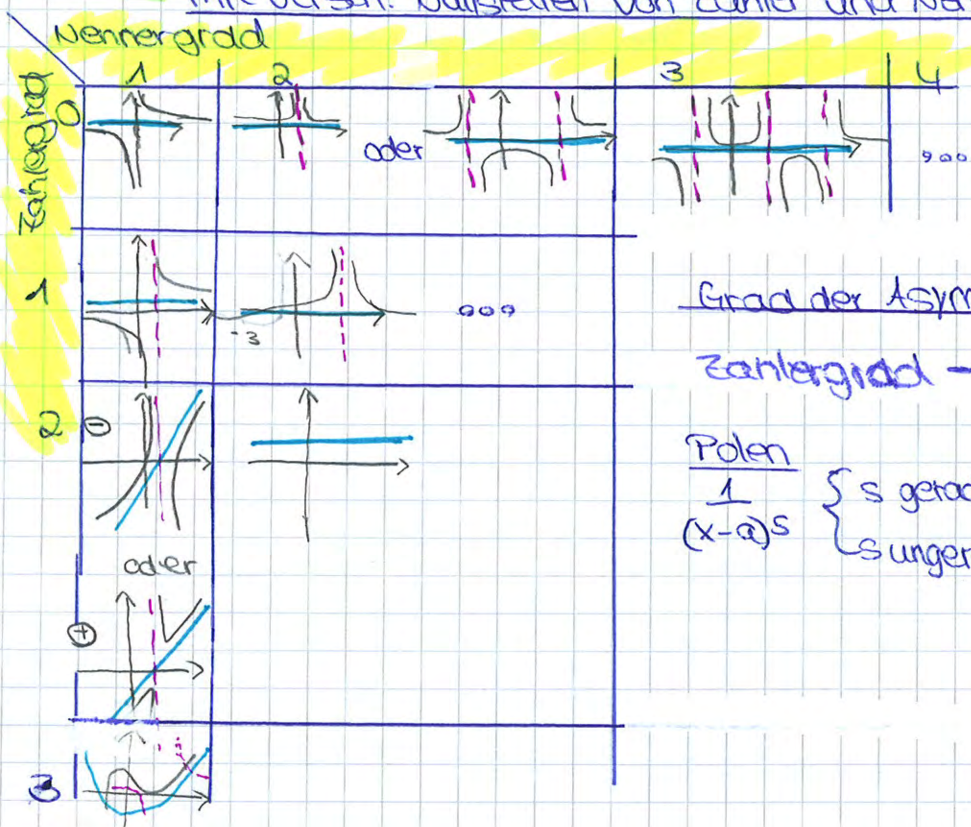


! Beim Produkt die 1ser-Stellen übertragen: wo ein Graph 1 ist kommt der andere raus !

Allgemein

— ≙ Asymptote - - - ≙ Polstelle

mit versch. Nullstellen von Zähler und Nenner:



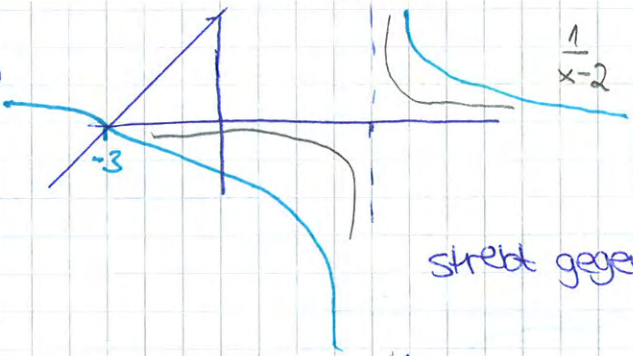
Grad der Asymptote:

Zählergrad − Nennergrad

Polen

$\frac{1}{(x-a)^s}$ $\begin{cases} s \text{ gerade ohne Zeichenwechsel} \\ s \text{ ungerade mit Zeichenwechsel} \end{cases}$

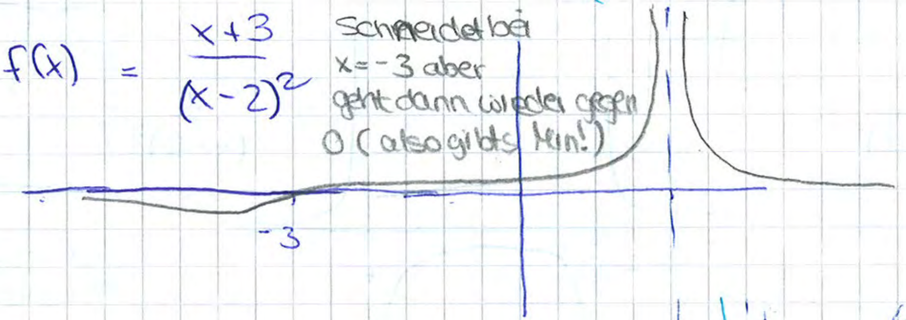
$f(x) = \frac{x+3}{x-2}$



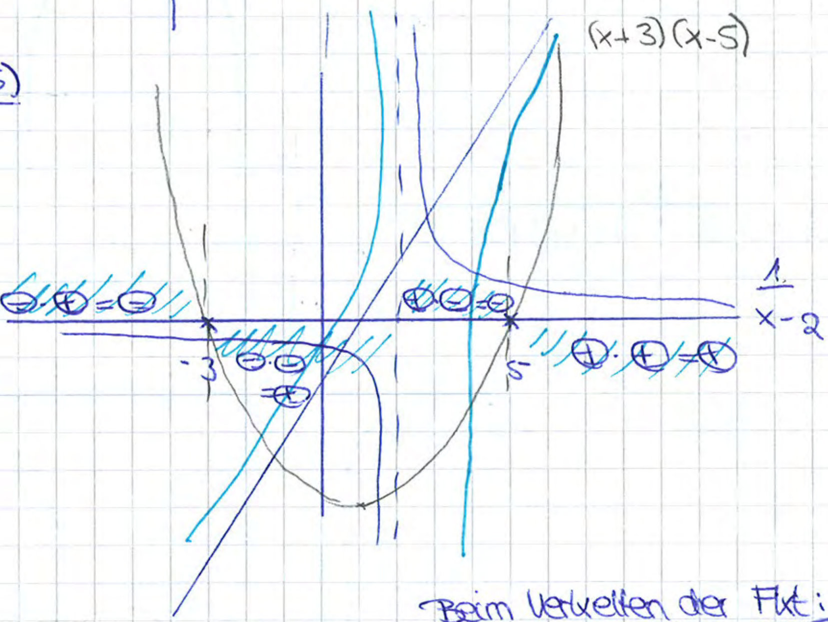
strebt gegen 1, weil:

$f(x) = \frac{x+3}{(x-2)^2}$

Schneidet bei $x=-3$ aber geht dann wieder gegen 0 (also gibts Min!)



$f(x) = \frac{(x+3)(x-5)}{x-2}$



$\rightarrow x^2 + 3x - 5x - 15$

$= x^2 - 2x - 15$

	1	-2	-15
$\boxed{+2}$	0	2	0
	1	0	-15

$\Rightarrow x \ominus \frac{15}{x-2}$

sagt aus, dass der Graph sich in dem Großen Winkel Asymptote ∧ Polstelle befindet

Beim Verkelten der Fkt:
von Nullstellen u Polstellen abstrechen wo Graph nicht langgeht

Achtung, diese systematische Betrachtung der gebrochen-rationelen Funktionen und das zughörige Handwerk habe ich 2011 nicht gemacht.

Es folgt noch eine Grundaufgabe, eine Übersichtsseite und eine Klausur aus Grundkurs Gym. mit Lös.

Das Thema muss unbedingt in Analysis II kommen, denn es ist schulisch sehr wichtig.

Weiter beschäftigen sich drei ausführlich beschriftete CAS-Dateien mit diesen Zusammenhängen (Siehe Web Analysis-> Funktionen und Graphen-> Gebrochenrational

Gebrochenrationale Funktion

$$f(x) = \frac{2}{5}\frac{(x+2)(x-1)}{x-2} = \frac{2}{5}\frac{x^2+x-2}{x-2}$$

$f(x)$ lässt sich nicht kürzen, daher sind die Nullstellen $x=-2$; $x=+1$ und die Polstelle $x=2$ direkt ablesbar.

Grad-Betrachtung Zählergrad − Nennergrad $= 2 - 1 = 1$

Also wird es eine schräge Asymptoten-Gerade geben.

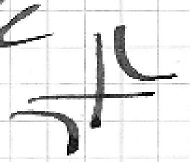
Beschaffung der Division:

$$(x^2+x-2):(x-2) = x+3+\frac{4}{x-2}$$
$$\underline{-(x^2-2x)}$$
$$3x-2$$
$$\underline{-(3x-6)}$$
$$4$$

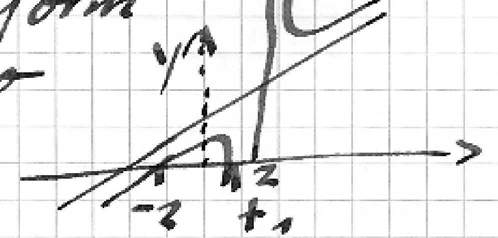
Also $f(x) = \underbrace{\frac{2}{5}x+\frac{6}{5}}_{\text{Asymptote}} + \underbrace{\frac{8}{5}\cdot\frac{1}{x-2}}_{\text{einfache Hyperbel}}$

Asymptote $y = \frac{2}{5}x+\frac{6}{5}$

einfache Hyperbel



Grundform ist also



Somit muss es zwei Extrema geben.

$$f'(x) = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{(x-2)^2}\left((2x+1)(x-2)-(x^2+x-2)\cdot 1\right)$$
$$= \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{(x-2)^2}\left(2x^2-3x-2-x^2-x+2\right)$$
$$= \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{(x-2)^2}\left(x^2-4x\right) = \frac{2}{5}\cdot\frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$$

Extremstellen sind also $x=0$ und $x=4$

Ordinaten $f(0) = \frac{2}{5}$; $f(4) = \frac{2}{5}\cdot\frac{6\cdot 3}{2} = \frac{18}{5} = 3{,}6$

So passt alles zusammen.

Ha, Okt 05

Kleine systematische Betrachtung

Im Folgenden sind Funktionsterme in Linearfaktorzerlegung gegeben

1. Untersuchen Sie die Funktionen f*, g* und h*. Versuchen Sie dabei in sinnvolle Bausteine zu zerlegen.
2. Wie unterscheiden sich f, g und h von f*,g*,h*?
3. Wie ordnen sich die mit 1 indizierten Funktionen in diese Überlegungen ein?
4. Welche der *-Funktionen kann man als “stetige Fortsetzung” der daneben stehenden bezeichnen?
5. Lösen Sie bei allen Termen die Klammern auf. Stellen Sie sich vor, die aufgelöste Form sei gegeben gewesen. Wie wären Sie dann auf die Klammerform gekommen?
6. Bestimmen Sie die Asymptoten.
7. Formulieren Sie allgemeine Aussagen über gemeinsame Nullstellen von Zähler und Nenner.

$f(x)=\dfrac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)(x+2)}$	$f^*(x)=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+2)}$
$g(x)=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)}$	$g^*(x)=\dfrac{(x+1)}{(x+2)}$
$h(x)=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2(x+2)}$	$h^*(x)=\dfrac{(x+1)}{(x-1)(x+2)}$

$f_1(x)=\dfrac{(x-1)^3(x+1)}{(x-1)(x+2)}$	$f_1^*(x)=\dfrac{(x-1)^2(x+1)}{(x+2)}$
$h_1(x)=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^3(x+2)}$	$h_1^*(x)=\dfrac{(x+1)}{(x-1)^2(x+2)}$

Mathematik-Klausur Nr.1 Kurs 13 m (gk) Ha am 16.11.98 Name:

Aufgabe 1 (10%) Erzeugen Sie aus zwei Bausteinen den Graphen von f mit $f(x) = \cos x + \frac{1}{x}$ und beschreiben sie ihn.

Aufgabe 2 (15%) Berechnen Sie die Asymptote von f mit $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 4x + 5}{x - 1}$ und erzeugen Sie den Graphen aus zwei Bausteinen.

Aufgabe 3 (75%)

Gegeben ist die Funktion f mit $f_k(x) = \frac{(x-1)(x-5)}{(x-k)^2}$. Sie hat die Ableitung

$f_k'(x) = \frac{2(k-3)x - 6k + 10}{(x-k)^3}$, was Sie nicht nachzurechnen brauchen.

Zerlegen Sie f_k in ein Produkt aus einer Parabel und dem dazu passenden **Faktor**.

a)Erzeugen Sie für f_k mit k=2 einen Graphen aus diesen Bausteinen. Verwenden Sie die gegebene Ableitung, um nach Extrema zu suchen.

b) Untersuchen Sie die Sonderform von f_k für k=1. Für welches k wird sich eine entsprechende Sonderform ergeben?

c) Mit den bisher untersuchten drei Fällen haben sie noch nicht alle typischen Graphen von f_k erfasst. Zeigen unter Verwendung der gegebenen Ableitung, dass bis auf genau drei Werte von k alle anderen f_k genau ein Extremum haben. Wo liegt es? Welches sind die drei Fälle, die kein Extremum haben?

e) Erzeugen Sie qualitativ einen weitern Graphen von f_k , der sich von dem für k=2 wesentlich unterscheidet.

f) Geben Sie mit Freihand-Daumenskizzen eine Übersicht, für welche k sich welche Graphen ergeben. *Es werden 6 Skizzen erwartet.* Stellen Sie zusammenfassend Gemeinsamkeiten heraus.

Mathematik-Klausur Nr. 1 Kurs 13 m (gk) Ha am 16.11.98 Name:

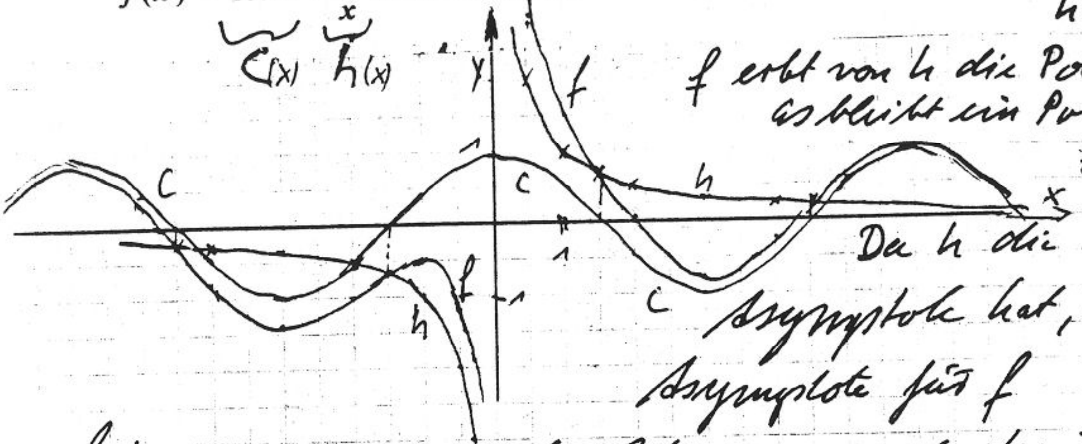
Aufgabe 1 (10%) Erzeugen Sie aus zwei Bausteinen den Graphen von f mit

$f(x) = \underbrace{\cos x}_{c(x)} + \underbrace{\frac{1}{x}}_{h(x)}$ und beschreiben sie ihn.

Bausteine sind $c(x) = \cos x$

$h(x) = \frac{1}{x}$ Hyperbel

f erbt von h die Polstelle $x = 0$
es bleibt ein Pol mit Zeichenwechsel.



Da h die x-Achse als Asymptote hat, ist Kosinus Asymptote für f

f hat genauso viele Extrema wie der Kosinus.
An den Nullstellen des Kosinus wird h von f geschnitten.

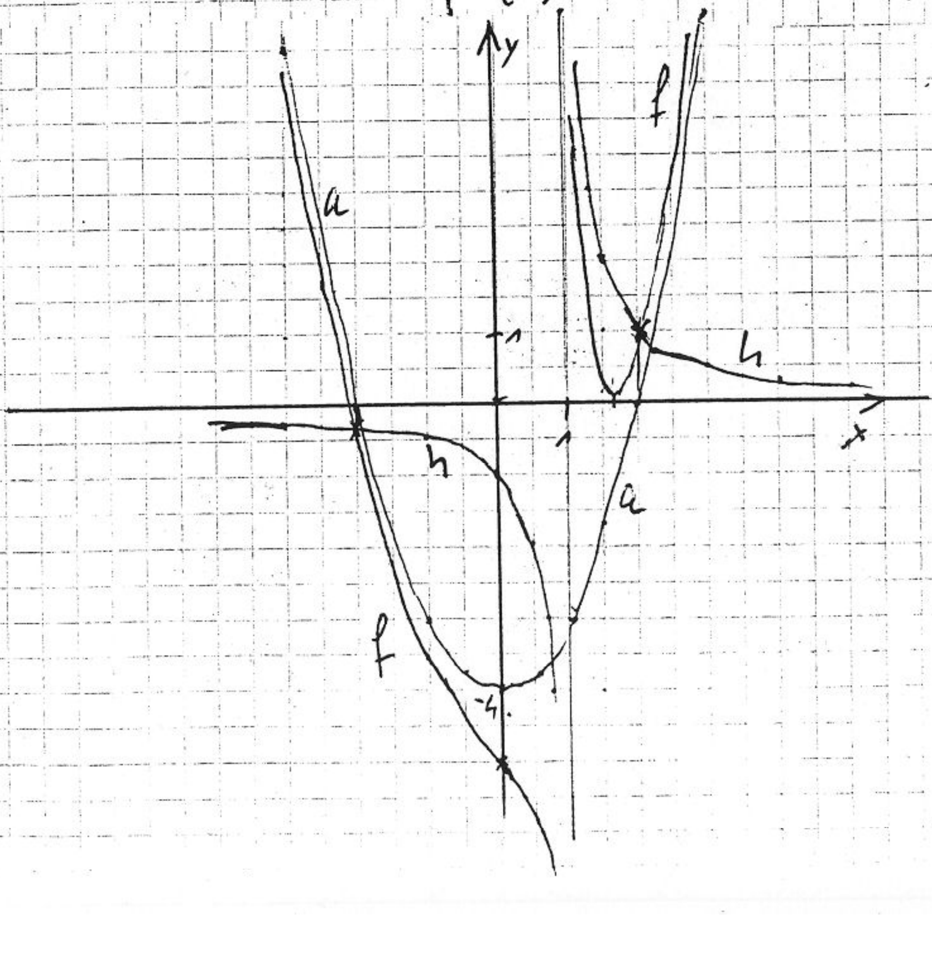
Aufgabe 2 (15%) Berechnen Sie die Asymptote von f mit

$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 4x + 5}{x - 1}$ und erzeugen Sie den Graphen aus zwei Bausteinen.

$$(x^3 - x^2 - 4x + 5) : (x - 1) = \underbrace{x^2 - 4}_{\text{Asymptote}} + \underbrace{\frac{1}{x-1}}_{\text{verschobene Normal-Hyperbel } h}$$

$$\begin{array}{l} -(x^3 - x^2) \\ \quad -4x + 5 \\ \quad -(-4x + 4) \\ \qquad\quad 1 \end{array}$$

$a(x) = x^2 - 4$ Parabel, Normalform, 4 Einh. tiefer.



nicht 2009, aber 2011, ergänzt!

Analysis 1 Regeln, Ansätze und Schreibweisen (in Beispielen)

Folgen und Reihen	Folge $< a_i >$ Rekursive Formel $a_i = f(a_{i-1})$ Trägerfunktion $y = f(x)$ Ansatz für Fixpunkt $x = f(x)$	explizite Formel $a_n = g(n)$ Grenzwert $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$	Reihe $s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ Summenfolge $< s_n >$
Funktionen	$f : x \to f(x)\ mit\ D_f = \mathbb{R} \setminus \{5\}$ $y = f(3)$ Ordinate an der Stelle 3 Ansatz $b = f(x)$ „wo hat wird der Wert b angenommen?“ Ansatz Schnittpunkt $f(x) = g(x)$	$fs(x) := f'(x) = \frac{dy}{dx}$ 1. Ableitung m:= $f'(3)$ Steigung an der Stelle 3.	$f''(x)$ $\frac{d^2y}{dx^2}$; $f^{(5)}(x)$
Berechnungen	Ansatz Nullstellen $f(x) = 0$ $x = 2 \vee x = 6 \vee x = 0\ (\vee = oder)$ f hat die Nullstellen $x_1 = 2,\ x_2 = 4\ und\ x_6 = 2$	mögliche Extremstellen (relative) Ansatz $f'(x) = 0$	mögliche Wendestellen Ansatz $f''(x) = 0$
Vielfachheit	Gibt es eine Darstellung $f(x) = (x-a)^k \cdot g(x)$ mit $g(a) \neq 0$, dann ist a eine k-fache Nullstelle von f .	Man sagt auch Die Nullstelle a hat die **Vielfachheit** k .	Das hat starke Wirkung auf die Gestalt des Graphen. siehe unten
Logik	$\Leftrightarrow$ Äquivalenzpfeil zwischen Gleichungen mit identischer Lösungsmenge. (lieber weglassen als falsch setzen) $A \Leftrightarrow B$ zwischen gleichwertigen Aussagen: A genau dann, wenn B	$A \Rightarrow B$ Aus A folgt B für Aussagen A und B.	A ist hinreichend für B B ist notwendig für A
Folgerungen	f diff'bar, nicht oszillerend, dann gilt x rel. Extremstelle $\Leftrightarrow$ f' wechselt in x das Vorzeichen **Vorzeichen_Wechsel-Kriterium VZW**	x rel. Extremstelle $\Rightarrow f'(x) = 0$	x Wendestelle $\Rightarrow f''(x) = 0$
	f hat an Nullstellen ungerader Vielfachheit k **einen** VZW, für $k \geq 3$ einen Sattel. f hat an Nullstellen gerader Vielfachheit k **keinen** VZW aber ein Extremum, für k>3 ist es „breit“	f stetig diff'bar, nicht oszillerend Ungerade Vielfachheit der Nullstelle a von f' ist notwendig und hinreichend für Extremum von f an der Stelle a	Gerade Vielfachheit der Nullstelle a von f' ist notwendig und hinreichend für Wendepunkt von f an der Stelle a

Notwendig und hinreichend

Achtung: diese zwei Seiten meist erst in Analysis II gemacht.

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Universität Lüneburg, 24. April 2007

A, B seien im Folgenden *Aussagen*	
Aussagen sind Sätze, die grundsätzlich wahr oder falsch sind.	"Grundsätzlich" meint, dass die Entscheidung nicht unbedingt leicht sein muss. Z.B. "Auf dem Mars gibt es Leben" , "12345678910111213141516171819 ist Primzahl"
Aussageformen sind Sätze, die Variable enthalten, bei deren konkreter Belegung sie zu Aussagen werden.	$5x-3=17$, $x \cdot y = 35$ Belegung x=4, y=7 ergibt 20-3=17 wahre Aussage 4*7=35 falsche Aussage
$A \Rightarrow B$ Implikation, Folgerung *Alle Formulierungen rechts sind richtig, sie sagen alle dasselbe aus.* *Ebenso dieses, das im indirekten Beweis verwendet wird.:* $\neg B \Rightarrow \neg A$	Aus A folgt B. Wenn A gilt, dann gilt auch B. A ist hinreichend für B. Für A muss notwendig B gelten. B ist notwendig für A. B gilt dann, wenn A gilt. A gilt nur dann, wenn B gilt. Wenn B nicht gilt, dann kann auch A nicht gelten.
$A \Leftrightarrow B$ logische Äquivalenz Die Sätze rechts stimmen auch, wenn man A und B vertauscht.	A gilt dann und nur dann, wenn gilt B. A gilt genau dann, wenn gilt B. A ist notwendig und hinreiched für B.
Verneinung, nicht : A , $\neg A$, Regeln: $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$, $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$	

Im Folgenden sei f eine reelle Funktion , für die f(a) existiert. f sei in einer Umgebung von a stetig differenzierbar (=diff'bar), unstetige Funktionen, solche mit Knicken und oszillierende Funktionen werden hier nicht betrachtet. Unter Extrema sollen hier nur solche mit waagerechten Tangenten verstanden werden. Randextrema sind nicht einbezogen.

Nr	Aussage	w / f	$\Leftrightarrow$	Bemerkung, Skizze
01	a ist Extremstelle von $f \Rightarrow f'(a)=0$			
02	$f'(a)=0$ ist eine notwendige Bedingung für ein Extremum von f an der Stelle a.			
03	$f'(a)=0 \Rightarrow a$ ist Extremstelle			
04	Wechselt f' an der Stelle a das Vorzeichen, dann hat f dort ein Extremum			
05	$f'(a)=0 \wedge f''(a) \neq 0$ ist eine notwendige Bedingung für ein Extremum von f an der Stelle a.			
06	$f'(a)=0 \wedge f''(a) \neq 0$ ist eine hinreichende Bedingung für ein Extremum von f an der Stelle a.			
07	Hinreichend für ein Extremum von f an der Stelle a ist $f'(a)=0 \wedge f''''(a) \neq 0$			Ergänzen Sie sinnvoll:
08	f hat an der Stelle a ein Extremum genau dann, wenn f' an der Stelle a das Vorzeichen wechselt. (VZW)			
09	Das VZW-Kriterium für f' ist notwendig und hinreichend für ein Extremum von f.			

Extrema und Wendepunkte

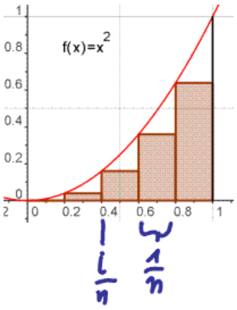
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Universität Lüneburg, Vergleich erst in Analysis II, Substanz hier. 24. April 2007

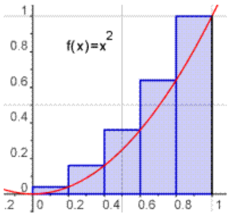
Im Folgenden sei f eine reelle Funktion , für die f(a) existiert. f sei in einer Umgebung von a zweimal stetig differenzierbar (=diff'bar), unstetige Funktionen, Knicke und oszillierende Funktionen werden hier nicht betrachtet. Unter Extrema sollen hier nur solche mit waagerechten Tangenten verstanden werden. Randextrema werden nicht einbezogen.

Nr	Aussage	w / f	$\Leftrightarrow$	Bemerkung, Skizze
10	a ist genau dann Wendestelle von f , wenn a Extremstelle von $f\,'$ ist.			
11	a ist Wendestelle von $f \Rightarrow f\,''(a)=0$			
12	$f\,''(a)=0$ ist eine notwendige Bedingung für eine Wendestelle a von f .			
13	$f\,''(a)=0 \Rightarrow a$ ist Wendestelle			
14	Wechselt $f\,''$ an der Stelle a das Vorzeichen, dann hat f dort einen Wendepunkt.			
15	$f\,''(a)=0 \wedge f\,'''(a)\neq 0$ ist eine notwendige Bedingung für einen Wendepunkt von f an der Stelle a.			
16	$f\,''(a)=0 \wedge f\,'''(a)\neq 0$ ist eine hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt von f an der Stelle a.			
17	Hinreichend für einen Wendepunkt von f an der Stelle a ist $\left(f^{(i)}(a)=0 \text{ für } 2\le i\le 4\right)\wedge f^{(5)}(a)\neq 0$			Verallgemeinert:
18	f hat an der Stelle a einen Wendepunkt genau dann, wenn $f\,''$ an der Stelle a das Vorzeichen wechselt. (VZW)			Siehe Mathe für alle
19	Das VZW-Kriterium für $f\,''$ ist notwendig und hinreichend für einen Wendepunkt von f .			
20	Jede in a stetige Funktion ist diff'bar in a .			
21	Jede in a diff'bare Funktion ist stetig in a .			
22	Wenn der Grenzwert des Differenzenquotienten in a existiert, ist f diff'bar in a .			
23	Nur wenn der Grenzwert des Differenzen-quotienten in a existiert und eindeutig ist, ist f diff'bar in a .			
24	Nullstellen von $f\,'$ mit ungerader Vielfachheit sind sicher Extremstellen von f . Nullstellen von $f\,''$ mit ungerader Vielfachheit sind sicher Wendestellen von.			Siehe Mathe für alle!
25	Zwischen zwei benachbarten Nullstellen einer stetigen Funktion muss es mindestens eine Extremstelle geben.			
26	Zwischen zwei benachbarten Nullstellen von $f\,'$ muss es mindestens eine Wendestelle von f geben.			

Einführung des Riemannschen Integrals

Geben ist eine in einem Intervall [a,b] definierte Funktion f.
Zur Einführung sei diese Funktion die Normalparabel und das Intervall sei [0,1].
Das Intervall wird in n Teile geteilt und zu jedem Teil wird ein Rechteck betrachtet, dessen Höhe der kleinste Funktionswert ist, den die Funktion in dem Teilintervall annimmt. Summiert man die so gebildeten Rechtecke, erhält man die von n abhängige Untersumme us(n).
Ebenso macht man es mit Rechtecken, deren Höhe der größte Funktionswert ist, den die Funktion in dem Teilintervall annimmt. Summiert man die so gebildeten Rechtecke, erhält man die von n abhängige Obersumme os(n).
Bei monoton wachsenden Funktionen wie im Beispiel lassen sich diese Rechtecke besonders leicht bilden.





$$f(x) = x^2 \qquad \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

$$us(n) = \frac{1}{n} f\left(\frac{0}{n}\right) + \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n} f\left(\frac{n-1}{n}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{i}{n}\right)$$

$$= 0 + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \cdot \frac{4}{n^2} + \dots + \frac{1}{n} \frac{(n-1)^2}{n^2} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \frac{i^2}{n^2}$$

$$= \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{1}{n^3} \frac{(n-1) \cdot n\,(2(n-1)+1)}{6} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$os(n) = \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n} f\left(\frac{n}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n^3} \frac{n \cdot (n+1)(2n+1)}{6} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Nun betrachtet man, wie sich Unter- und Obersummen verhalten, wenn man die Streifenzahl n gegen Unendlich gehen lässt.
Wenn die Untersummen und die Obersummen denselben Grenzwert haben, dann heißt dieser Wert **das Integral von f in diesem Intervall**: $\int_a^b f(x)dx$

Im Beispiel ist $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$. Wenn einer der Grenzwerte oder gar beide nicht existieren, dann gibt es das Integral nicht. Mehr zu Riemann und der exakten Definition auf www.mathematik-verstehen.de.

Eigenschaften:

1) $\int_a^b (af)(x)dx = a\int_a^b f(x)dx$ Senkrechte Streckungen von f verändern das Integral nur um den Streckfaktor.
2) Die betrachteten Rechtecke werden mit den Funktionswerten gebildet. Sind die Funktionswerte negativ, dann werden auch die betreffenden Summanden negativ. Damit ist $\int_a^b f(x)dx$ die **Flächenbilanz** der Flächen, die zwischen der x-Achse und dem Graphen von f entstehen.
3) $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ Vertauscht man die Grenzen, werden alle Rechteckbreiten negativ, die Flächenbilanz ändert nur ihr Vorzeichen.

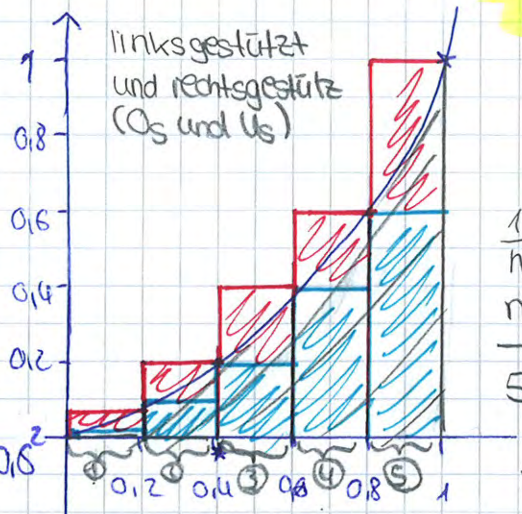
Integralrechnung

13.05.09

Einführungsbeispiel:

$f(x) = x^2$

$A =: \int_0^1 f(x) \cdot dx$



(Breite)
$\frac{1}{n}$ = Abstand
n Teile

Stelle
$n = 5$
$\frac{1}{5} = 0,2$

* welches x^2 2 von 5
$\frac{i}{n}$ allg.

Us = Us (Untersumme) $= 0{,}2 \cdot f(0{,}2) + 0{,}2 \cdot f(0{,}4) + \dots$

$= 0{,}2 \cdot 0{,}2^2 + 0{,}2 \cdot 0{,}4^2 + 0{,}2 \cdot 0{,}6^2 + 0{,}2 \cdot 0{,}8^2 = \underline{0{,}24}$

$Us(n) = \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{2}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{3}{n}\right) + \dots + \boxed{\frac{1}{n} f\left(\frac{n-1}{n}\right)}$

$Us = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \left(\frac{3}{n}\right)^2 + \dots + \boxed{\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^2}$

$= \frac{1}{n^3} \underbrace{\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2\right)}_{\sum i^2}$

$= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} \underbrace{\left((n-1)\, n \,(2(n-1)+1)\right)}$

$\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 = \frac{n^2 - 2n + 1}{n^2}$

$\boxed{\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n (n+1)(2n+1) \quad \text{Summe der Quadratzahlen}}$

$\frac{n^2 + 2n + 1}{n^3}$

$\frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^3}} + \frac{2\cancel{n}}{n^{\cancel{3}2}} + \frac{1}{n^3}$

U-Summe geht gegen $\xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{3}$

$\frac{1}{6n^3} \cdot 2n^3 + \underbrace{T(n^2, \dots)}_{0}$

$= \frac{\cancel{2}^{1} \cancel{n^3}}{\cancel{6}_{3} \cancel{n^3}} = \frac{1}{3}$

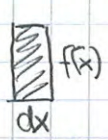
Die Obersummen sind um das rote Stück größer als die Untersummen

$Os = Os = \frac{1}{n} \cdot \left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{2}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{3}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n} f\left(\frac{n-1}{n}\right) \boxed{+ \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{n}{n}\right)}$

$= \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} f\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \boxed{+ \frac{1}{n} \cdot \frac{n^2}{n^2}}$

Die Obersumme hat auch den Grenzwert $\frac{1}{3}$ → somit ist der Wert des Integrals auch $\frac{1}{3}$ weil die Grenzwerte von Ober- bzw. Untersummen übereinstimmen.

$I = \int_a^b f(x) \cdot dx$



normaler weise nicht links- und rechtsgestützt!

Achtung: Vor dem Rechnen kommen erst Betrachtung und Überlegungen mit den Interaktiven Dateien im Web.
Daran knüpfen auch auch überlegungen zu den ersten Regeln an, die auf der Ing-Math-Seite, die hier folgt, zusammengefasst sind.

Bestimmtes Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \quad mit \quad F'(x) = f(x)$$

Faktorregel außen $\int_a^b k \bullet f(x)\,dx = k \bullet \int_a^b f(x)\,dx$, **man kann eine Konstante vorziehen.**

Faktorregel innen $\int_a^b f(k \bullet x)\,dx = \frac{1}{k} \bullet F(k \bullet x) \;\; mit \;\; F'(x) = f(x)$,

Kehrwert von k kommt nach vorne, in der Stammfunktion innen bleibt k bei x ,

Summenregel $\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$ **Summen kann man einzeln integrieren.**

Verschieberegel $\int_a^b f(x-t)\,dx = [F(x-t)]_a^b \;\; mit \;\; F'(x) = f(x)$, **ist f waagerecht verschoben, so auch F.**

Intervall aufteilen $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \int_b^c f(x)\,dx$, **Grenzen umdrehen** $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

Tabelle 1: Grund- oder Stammintegrale $\int f(x)\,dx$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} \arcsin x + C_1 \\ -\arccos x + C_2 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \begin{cases} \arctan x + C_1 \\ -\operatorname{arccot} x + C_2 \end{cases}$$

$$\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2 x}\,dx = \tanh x + C$$

$$\int \frac{1}{\sinh^2 x}\,dx = -\coth x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \operatorname{arsinh} x + C = \ln\left| x + \sqrt{x^2+1} \right| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{arcosh} x + C = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C \qquad (|x| > 1)$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \begin{cases} \operatorname{artanh} x + C_1 = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + C_1 & |x| < 1 \\ & \text{für} \\ \operatorname{arcoth} x + C_2 = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} + C_2 & |x| > 1 \end{cases}$$

Typ (A) ist lediglich eine Zusammenfassung der "Faktor innen"-Regel und der Verschieberegel.

Beispiele, $\int \sin(3x-12)\,dx = -\frac{1}{3}\cos(3x-12)$, $\int e^{3x-12}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x-12}$

Typ (B) und (C) sind Spezialfälle des umfassenderen Typs:

$f\,'$ erscheint: $\int g(f(x))\cdot f\,'(x)dx = G(f(x))$ mit $G'(z) = g(z)$

Achtung: dies ist eine hilfreiche Formulierung!

Beispiel $\int \cos(x^5)\cdot 5x^4\,dx = \sin(x^5)$ *denn* $\sin'(z) = \cos(z)$, *es ist* $z = f(x) = x^5$,**Umkehrung der Kettenregel**

Typ (B) $\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,dx = \frac{1}{2}\sin^2(x)$ *denn* $z = f(x) = \sin(x)$; $f\,'(x) = \cos(x)$; $g(z) = z$; $G(z) = \frac{1}{2}z^2$

Jedes CAS liefert Ihnen auf "Knopfdruck" sofort alle Integrale, die nach solchen Regeln gelöst werden können. Und noch viel mehr Integrale!!!!!! Eingabe und Ausgabe in MuPAD:

```
• int(sin(3*x-12), x)
```

$$-\frac{\cos(12-3\cdot x)}{3}$$

Tabelle 2: Integralsubstitutionen Allgemeine Substitution ist in An I nicht behandelt!!!!

Integraltyp	Substitution	Lösung	Beispiele	
(A) $\int f(ax+b)dx$	$u = ax+b$ $du = a\,dx$ $dx = \frac{du}{a}$		1. $\int(2x-3)^6 dx$ 2. $\int\sqrt{4x+5}\,dx$ 3. $\int e^{4x+2}dx$	$(u = 2x-3)$ $(u = 4x+5)$ $(u = 4x+2)$
(B) $\int f(x)\cdot f'(x)dx$	$u = f(x)$ $du = f'(x)\,dx$ $dx = \frac{du}{f'(x)}$	$\frac{1}{2}f^2(x)+C$	1. $\int \sin x\cdot\cos x\,dx$ 2. $\int\frac{\ln x}{x}dx$	$(u = \sin x)$ $(u = \ln x)$
(C) $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx$	$u = f(x)$ $du = f'(x)\,dx$ $dx = \frac{du}{f'(x)}$	$\ln\|f(x)\|+C$	1. $\int\frac{2x-3}{x^2-3x+1}dx$ 2. $\int\frac{e^x}{e^x+5}dx$	$(u = x^2-3x+1)$ $(u = e^x+5)$
(D) $\int f(x;\sqrt{a^2-x^2})dx$	$x = a\cdot\sin u$ $dx = a\cdot\cos u\,du$ $\sqrt{a^2-x^2} = a\cdot\cos u$		1. $\int\sqrt{r^2-x^2}\,dx$ 2. $\int x\sqrt{r^2-x^2}\,dx$ 3. $\int\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx$	$(x = r\cdot\sin u)$ $(x = r\cdot\sin u)$ $(x = 2\cdot\sin u)$
(E) $\int f(x;\sqrt{x^2+a^2})dx$	$x = a\cdot\sinh u$ $dx = a\cdot\cosh u\,du$ $\sqrt{x^2+a^2} = a\cdot\cosh u$		1. $\int\sqrt{x^2+1}\,dx$ 2. $\int\frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$	$(x = \sinh u)$ $(x = 2\cdot\sinh u)$
(F) $\int f(x;\sqrt{x^2-a^2})dx$	$x = a\cdot\cosh u$ $dx = a\cdot\sinh u\,du$ $\sqrt{x^2-a^2} = a\cdot\sinh u$		1. $\int\sqrt{x^2-9}\,dx$ 2. $\int\frac{x}{\sqrt{x^2-25}}dx$	$(x = 3\cdot\cosh u)$ $(x = 5\cdot\cosh u)$

Funktionswert $f(x)$ gegeben und wir müssen alle Scheibchen aufaddieren. Darum ist $V_{rot} = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx$ die richtige Berechnungsformel für ein solches Rotationsvolumen.

Auch andere geometrische Probleme im Zusammenhang mit Kurven und Körpern lassen sich mit dem Integral lösen. Dazu gehören die Länge von Kurvenstücken, die Oberfläche von Körpern, der Schwerpunkt von Flächen und von Körpern und Vieles mehr.
Das Integral ist eben das ideale Werkzeug beim Blick auf das Ganze

7.6 Großartiger Zusammenhang

Das Integral ist also wichtig – aber so richtig praktikabel ist es in Abschnitt 7.5 noch nicht. Näherungswerte könnte man mit hinreichend vielen Streifen als Flächensumme bestimmen. Mit Computern ist das machbar. Manchmal gelingt auch eine theoretische Begründung für den Grenzwert von Riemannschen Unter- und Obersummen. Aber *schön* wäre eine griffige exakte Berechnungsmethode. Tatsächlich gibt es eine solche Methode, zwar nicht für alle Fälle, aber immerhin für viele wichtige Funktionen.

Es wird sich herausstellen, dass die *Integration als gegenläufiger Prozess zur Differenziation* aufgefasst werden kann. Integrieren und Ableiten hängen zusammen. Das ist ein wirklich verblüffendes Phänomen: Das Integral bezieht sich auf das Ganze und die Ableitung auf die lokale Eigenschaft der Steigung in einem Punkt. Bei der Definition des Integrals war gar nicht von Steigungen die Rede.

In Lehrzusammenhängen in Schule und Hochschule wird der wesentliche Schritt des Integrierens sogar **Aufleiten** – als Gegenteil von **Ableiten** – genannt. Mit diesem Konzept ist Integrieren ein *Handwerk*. Hatte eine Formelsammlung in meiner Studienzeit 370 typische Intergrale verzeichnet, bekommt man heute alle Anfragen, die überhaupt eine exakte Antwort haben, von jedem CAS auf Knopfdruck beantwortet.
Lohnend ist es aber, den überraschenden Zusammenhang zwischen dem Integrieren und dem Differenzieren visuell zu erfassen. Das möchte ich Ihnen nun zeigen.

Teppich abrollen mit der Integralfunktion

Abb. 7.52 F07_teppich-echt-a-300-h30, *b, Abrollen eines Teppichs als Denkhilfe für die Integralfunktion der oberen Grenze

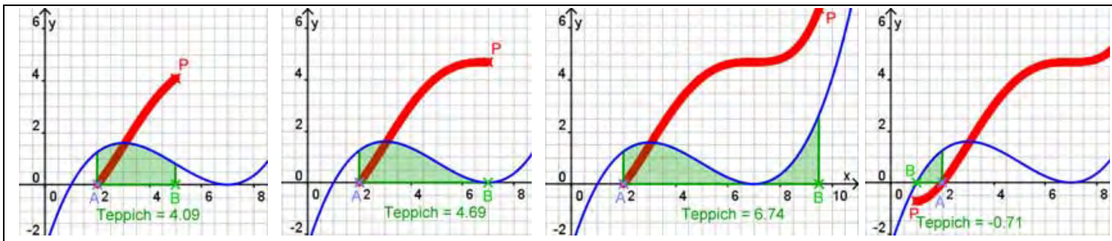


Abb. 7.53 a)-d) F07_teppich1-300-h30,*2,*3,*4 Der grüne Teppich wird abgerollt – Visualisierung der Integralfunktion.

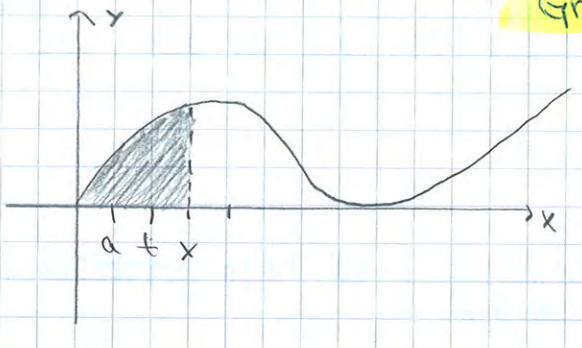
Sie sehen in Abb. 7.53 a)-c) mit blauem Graphen eine Funktion f . Diese berandet eine grüne Fläche, die von A aus „abgerollt“ wird wie ein Teppich, während sich B nach rechts bewegt. Abb. 7.52 hilft Ihnen bei dieser Vorstellung.
Aus Abschnitt 7.5.1 wissen Sie schon, dass man diese Fläche als Integral $F = \int_a^b f(x)\,dx$ schreiben kann. Zu jeder Stellung von B ergibt sich ein anderer Flächenwert F. Diese Zuordnung soll als *Funktion* geschrieben werden. Im www-Additum können Sie tatsächlich an B ziehen und sich überzeugen, dass P die Teppichgröße als Ordinate hat. Die rote Spur von P ist die „Teppichabrollfunktion“. Um diese Funktion aufzuschreiben, soll die Stelle b nun in x umbenannt werden. Dann müssen wir auch die Integrationsvariable umtaufen, sie heiße nun t. Um zu dokumentieren, dass die Fläche von der Stelle a aus abgerollt wird, schreiben wir a als Index an F , also F_a .

Zu einer Funktion f heißt die Funktion F_a , die jeder Stelle x die von a aus „abgerollte“ Fläche zuordnet, Integralfunktion (der oberen Grenze) von f bei unterer Grenze a . Also: $F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

Der von mir verwendete Begriff „Teppichabrollfunktion“ ist kein mathematisches Fachwort, verhilft aber erfahrungsgemäß zu passendem Verständnis.
In Abb. 7.53 d) sehen Sie, dass F_a nach links fortgesetzt werden kann. Da jetzt B links von A liegt, ist das Integral negativ, obwohl die Fläche im positiven Bereich liegt. In Abb. 7.54 a) ist diese Bewegung noch weiter fortgeführt. Die Teppichabrollfunktion für den Start in A ist nun vollständig interaktiv punktweise entstanden. Mit dem Ortskurvenwerkzeug ist sie in Abb. 7.54 b) als Ganzes (schwarz gestrichelt) eingefügt.
Verschieben von A verschiebt die rote Kurve. Das ist leicht zu verstehen: Wenn A an der Stelle 3 statt 2 steht, fehlt allen Flächen dasselbe Stück, nämlich, gerade die Differenz der Flächen 4,09 aus Abb. 7.53 a) und 2,6 aus Abb. 7.54 b). Darum ist in Abb. 7.54 b) P und auch die ganze rote Kurve von der gestrichelten aus um 1,49 senkrecht nach unten verschoben.

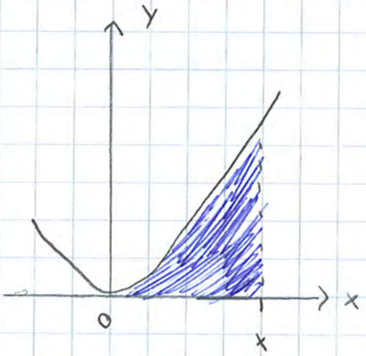
18.05.2009

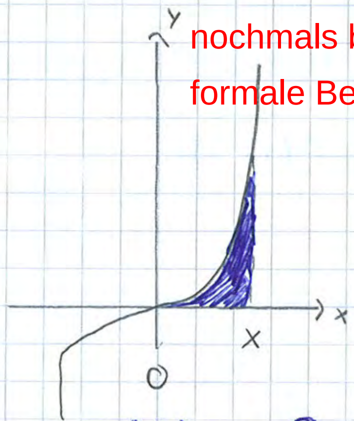
Teppichabrollfunktion – Integralfkt. der oberen Grenze

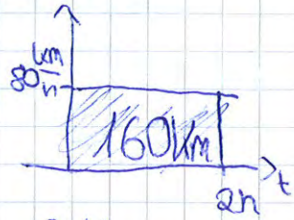


$$\int_a^x f(t)\cdot dt$$

Achtung, dies knüpft an Mathe für alle an. Die dortigen Interaktiven Dateien werden nochmals betrachtet, unten folgt hier der formale Beweis.







$s = v$
$s = v(t)$

$f(x) = x^2$
aufleiten
$F_0(x) = \frac{1}{3}x^3$

$f(x) = x^3$
aufleiten
$F_0(x) = \frac{1}{4}x^4$

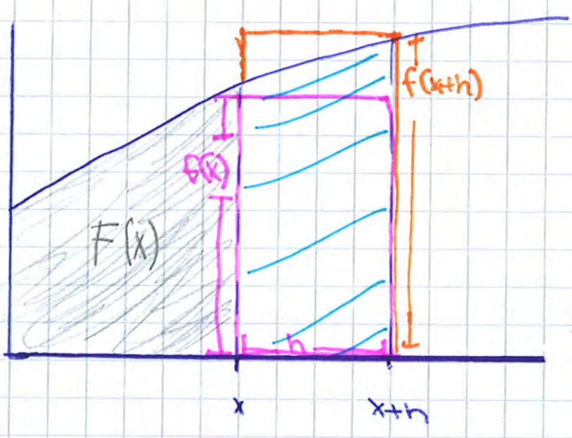
Die Teppichabrollfkt ist die „Aufleitung" von $f(x)$, also $F(x)$.
Die Optik wird bestimmt durch den Startpunkt meines Integrals.
Je weiter in x-Richtung gestartet wird, um so mehr verschiebt sich $F(x)$ nach unten.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\cdot dt$$

$$F_a'(x) = f(x) \quad . \quad F_a(x) = F_b(x) + c$$

Beweis:



$f(x)\cdot h < F(x+h) - F(x) < f(x+h)\cdot h$

Teilen durch h:

$$f(x) < \frac{F(x+h)-F(x)}{h} < f(x+h)$$

Grenzwert $h \to 0$:
$h \to 0$ existiert
weil $f(x)$ stetig ist

$$f(x) < F'(x) < f(x)$$

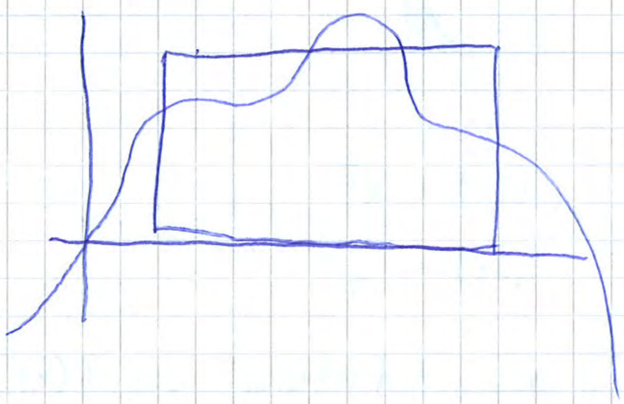
„Bierzeltordner" ?

Ist f stetig, dann existiert F(x) mit $F'(x) = f(x)$. F heißt Stammfunktion von f. Die Stammfkt. unterscheidet sich nur durch eine Konstante: $F(x) + C$

(sin (x) => hat keine Stammfunktion, ist nicht geschlossen integrierbar, genau wie cos, e^x, tan, ln)

Das Integral dient als Mittelwertanwendung: Tagestemperatur:

$$T_m = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b T(t) \cdot dt$$



Dies knüpft an des Einführungsbeispiel von Mathe für alle an, in dem es um den Mittelwert der Temperatur eine Tages ging. Siehe auch meine Buch.

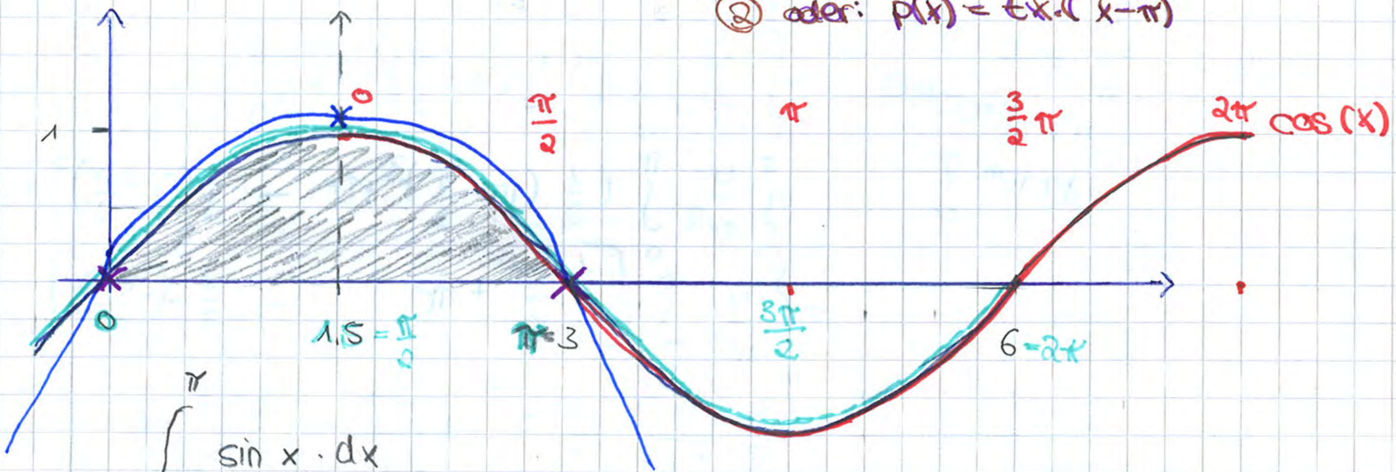
19.05.09

Integration: Handwerix

$f(x) = \sin x$

Parabel: $p(x) = t \cdot (x - \frac{\pi}{2})^2 + 1$ ①

② oder: $p(x) = t x \cdot (x - \pi)$



$$\int_0^{\pi} \sin x \cdot dx$$

Stammfunktion

$$= \left[-\cos x \right]_0^{\pi} = -\cos \pi - (-\cos 0)$$

$$-(-1) + 1 = +2$$

oder $-\cos x \Big|_0^{\pi}$

$O_S - U_S$!

Berechnung von t

zu ① $p(0) = 0$

$$t \cdot (0 - \frac{\pi}{2})^2 + 1 = 0$$

$$t \cdot \frac{\pi^2}{4} + 1 = 0 \quad | -1$$

$$t \cdot \frac{\pi^2}{4} = -1 \quad | : \frac{\pi^2}{4}$$

$$\underline{\underline{t = -\frac{4}{\pi^2}}}$$

zu ②: $p(\frac{\pi}{2}) = 1$:

$$t \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (\frac{\pi}{2} - \pi) = 1$$

$$-t \cdot \frac{\pi^2}{4} = 1$$

$$\underline{\underline{t = -\frac{4}{\pi^2}}}$$

Gesucht: $\int_0^{\pi} p(x) \cdot dx$ ① $= \int_0^{\pi} -\frac{4}{\pi^2} \cdot x\,(x - \pi)\,dx$ unbedingt ausmultip.

$$= -\frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} (x^2 - \pi x)\,dx$$

$$= -\frac{4}{\pi^2} \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{\pi}{2}x^2 \right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{4}{\pi^2} \left[\frac{\pi^3}{3} - \frac{\pi^3}{2} - 0 \right] = +\frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \text{Fläche}$$

$\Rightarrow$ liegt n bissl höher

Variante ②: ① $\int_0^\pi p(x)\,dx = \int_0^\pi -\frac{4}{\pi^2}\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+1\right)dx$

$-\frac{4}{\pi}$ muss mit reingenommen werden !

$$= \int_0^\pi -\frac{4}{\pi^2} \left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3 + x\right]_0^\pi$$

$$= \int_0^\pi -\frac{4}{\pi^2} \left(\frac{1}{3}\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)^3 + \pi - \frac{1}{3}\left(0-\frac{\pi}{2}\right)^3 + 0\right)$$

$$= \int_0^\pi -\frac{4}{\pi^2} \left[\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi^3}{8} + \pi - \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{\pi^3}{8}\right)\right]$$

$$= -\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{\pi^3}{24} + \pi + \frac{\pi^3}{24} = \frac{2\pi^3}{24_{12}} + \pi$$

$$= -\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{\pi^3}{12_3} + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}$$

Weitere Regeln

$f(x),\ F(x)\ ;\ F'(x) = f(x)$
$g(x),\ G(x)\ ;\ G'(x) = g(x)$
$h(x),\ H(x)\ ;\ H'(x) = h(x)$

① $\int \underbrace{(f+g)}_{h} = H = F + G = \int f + \int g$
$H' = F' + G'$

② $\int \underbrace{a\cdot f}_{g} = a\cdot\int f$

wenn g dann $G = a\cdot F$
$G' = a\cdot F'$

③ linearer Operator: $\int : f \longrightarrow \int f$

$$\int (af+bg) \longrightarrow a\cdot\int f + b\int g$$

$$\left(\frac{d}{dx}(af+bg) = a\frac{df}{dx} + b\frac{dg}{dx}\right)$$

Formelsammlung Bronstein

Analysis -> Polynome im Affenkasten

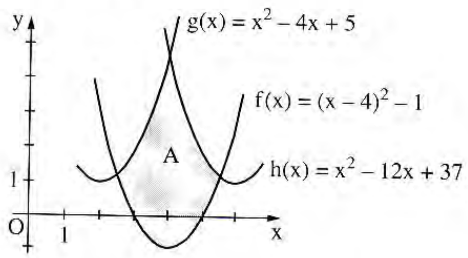
Aufgaben Analysis 1 aus TCP 2001 Paetec-Verlag 3898181014

Achtung die Aufgaben 78 bis 80 sind auf Seite 4

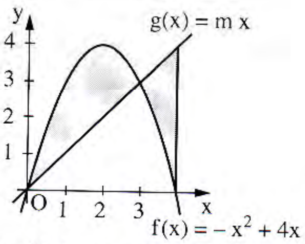
EA 95 Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = x^2$ und $g(x) = mx$ $(m \in \mathbb{R})$. Für welches m schließen die Parabel und die Gerade eine Fläche mit dem Inhalt $A = \frac{4}{3}$ (FE) ein?

EA 96 Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche A, die von den Graphen der Funktionen f, g und h auf die nebenstehende Weise eingeschlossen wird.

Es sei $f(x) = (x-4)^2 - 1$,
$g(x) = x^2 - 4x + 5$,
$h(x) = x^2 - 12x + 37$



EA 97 Für welchen Wert von m sind die beiden markierten Flächen gleich groß?



EA 98 Der Graph der Funktion $f(x) = \sqrt{4x}$ wird an der Geraden $f(x) = x$ gespiegelt. Wie groß ist der Inhalt der Fläche, die Original- und Bildgraph einschließen? (Fertigen Sie eine Skizze an!)

EA 99 Zeichnen Sie das Rechteck ABCD mit A(0; 0), B(2; 0), C(2; 4) und D(0; 4). In welchem Verhältnis teilt die Normalparabel (Graph der Funktion $f(x) = x^2$) die Fläche des Rechtecks?

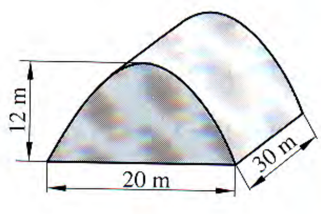
EA 100 In welchem Verhältnis teilt der Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ den Flächeninhalt des Quadrates mit den Eckpunkten A(0; 0), B(2; 0), C(2; 2) und D(0; 2)?

EA 101 In welchem Verhältnis teilt der Graph der Funktion $f(x) = x + 3$ die von den Graphen der Funktionen $g(x) = -x^2 + 9$ und $h(x) = x^2 - 9$ eingeschlossene Fläche? (Fertigen Sie eine Skizze an!)

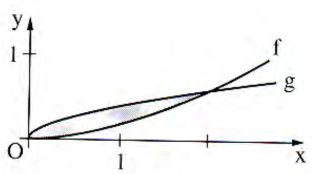
EA 102 Durch die Gleichung $f(x) = (x-a)^2$ ist für jeden Wert von a $(a \in \mathbb{R})$ eine Parabel gegeben, die mit der x-Achse und den Geraden $x = 0$ und $x = 4$ eine Fläche begrenzt. Für welches a hat diese Fläche den Inhalt $\frac{28}{3}$ FE?

EA 103 Beim Bau einer Traglufthalle wird eine parabolische Bogenkonstruktion verwendet. Die Maße sind der nebenstehenden Skizze zu entnehmen.

a) Bestimmen Sie die Gleichung dieser Parabel!
b) Berechnen Sie den Inhalt der Querschnittsfläche!
c) Berechnen Sie das Luftvolumen!



EA 104 Der Querschnitt der Tragfläche eines Leichtbauflugzeuges wird durch Graphen der Funktion $f(x) = \frac{1}{8}x^2$ und $g(x) = \sqrt{\frac{x}{8}}$ begrenzt. Berechnen Sie den Inhalt der Querschnittsfläche!



EA 105 Gegeben seien die Funktionen f_t und g_t mit $f_t(x) = t\sqrt{x}$ und $g_t(x) = tx^2$ $(t \in R;\ t \neq 0)$

a) Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f_1 und g_1 in ein Koordinatensystem! Besitzen die Graphen gemeinsame Punkte? Geben Sie gegebenenfalls die Koordinaten der Punkte an!

nur 2011, nicht alles besprochen

b) Formulieren Sie eine allgemeine Aussage über gemeinsame Punkte der Scharelemente!
c) Die Graphen der Funktion f_2 und g_2 begrenzen eine Fläche vollständig. Berechnen Sie deren Inhalt!
d) Für welches t hat die Fläche unter dem Graphen der Funktion f_t im Intervall [1; 4] einen Inhalt von 14 FE?
e) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche unter dem Graphen der Funktion f_{-1} im Intervall [1; 4]!
f) Wie muss die obere Integrationsgrenze gewählt werden, damit sich die Fläche unter dem Graphen von f_{-1} gegenüber dem Ergebnis von Teilaufgabe e) verdoppelt?

EA 106 Gegeben sei die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = x^2 + ax + 2$ $(a \in \mathbb{R};\ a \geq 0)$.

a) Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f_0; f_1; f_2 und f_4 in ein Koordinatensystem!
b) Welchen Einfluss hat der Parameter a auf den Verlauf des Graphen der Funktion f_a?
c) Die Scheitelpunkte der Graphen der Funktionen f_a liegen auf einer Kurve. Geben Sie die Gleichung dieser Kurve an!
d) Die Ortskurve der Scheitelpunkte und der Graph der Funktion f_4 schließen eine Fläche vollständig ein. Berechnen Sie deren Inhalt!
e) Für welches a hat die Fläche zwischen der Ortskurve der Scheitelpunkte und dem Graphen der Funktion f_a einen Inhalt von 9 FE?

EA 107 Gegeben seien die Funktionen f_m und g mit $f_m = mx + 4$ $(m \in \mathbb{R})$ und $g(x) = \frac{4}{x^2}$ $(x \neq 0)$.

a) Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f_1; f_2; $f_{-\frac{1}{2}}$ und g in ein Koordinatensystem!
b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche unter dem Graphen der Funktion g im Intervall [1; 4]!
c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche unter dem Graphen der Funktion g im Intervall [1; b]!
d) Die Graphen der Funktionen f_1 und g schließen eine Fläche vollständig ein. Berechnen Sie deren Inhalt! **GTA**

EA 108 Gegeben sei die Funktion $f(x) = (x-1)^2(x+1)^2$.

a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion im Intervall [–2; 2]!
b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche unter dem Graphen im Intervall [1; 3]!
c) Der Graph der Funktion schließt mit der Abszissenachse eine Fläche vollständig ein. Berechnen Sie deren Inhalt!
d) Die Tangente an den Graphen im Punkt (0; 1) und der Graph begrenzen im 1. Quadranten eine Fläche vollständig. Berechnen Sie deren Inhalt! **GTA**

EA 109 Gegeben sind die Funktionenscharen f_t und g_t mit $f_t(x) = -\frac{1}{t^2}x^2 + 1$ und $g_t(x) = -\frac{1}{t}x^2 + t$ $(0 < t < 1)$.

a) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen f_t und g_t für $t = \frac{1}{2}$!
b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der Funktionen f_t und g_t eingeschlossen wird!
c) Für welchen Wert von t wird dieser Flächeninhalt maximal?

EA 110 Gegeben sind die Funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$ und $g(x) = -4x + 5$.

a) Überprüfen Sie, ob f Extremstellen besitzt! Ermitteln Sie $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$!
b) Berechnen Sie die Schnittpunkte der Graphen beider Funktionen! Skizzieren Sie beide Funktionen in ein Koordinatensystem!
c) Berechnen Sie das Flächenstück, das die Graphen beider Funktionen vollständig einschließen!

nur 2011 teilweise

EA 111 Gegeben ist die Funktion f mit $f(a) = a^3 - 3a^2 + 4$.

GTA

a) Untersuchen Sie die Funktion auf Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte sowie das Verhalten im Unendlichen! Verwenden Sie den Rechner zur Ermittlung der ersten Nullstelle!
b) Zeichnen Sie den Graphen von f im Intervall $-2 \le x \le 3$!
c) Eine Gerade verläuft durch die Punkte $P(-1; f(-1))$ und $Q(1; f(1))$. Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden g!
d) Die Gerade g und der Graph von f schließen zwei Flächenstücke ein. Berechnen Sie deren Inhalt!

EA 112 Gegeben ist die Funktion $f(x) = -\frac{1}{12}x^3 + x$.

a) Untersuchen Sie die Funktion auf Symmetrie! Berechnen Sie die Schnittpunkte ihres Graphen mit der x-Achse sowie dessen Extrem- und Wendepunkte!
b) Skizzieren Sie den Graph $-4 \le x \le 4$!
c) In welchem Verhältnis teilt der Graph von $g(x) = \frac{1}{3}x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$ die Fläche, die der Graph von f im ersten Quadranten mit der x-Achse einschließt?

EA 113 Gegeben ist die Funktion $f(t) = t^4 - 2t^3$.

a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich und den Wertebereich von f an! Untersuchen Sie die Funktion auf Symmetrie! Berechnen Sie die Nullstellen, die Extremstellen sowie die Wendestellen von f!
b) Fertigen Sie eine Skizze des Graphen von f im Intervall $-1 \le x \le 2{,}2$ an!
c) Ermitteln Sie die Gleichungen der Wendetangenten! Welchen Inhalt hat die Fläche, die die 2. Wendetangente mit dem Graphen von f einschließt?

EA 114 Gegeben sind die Funktionenscharen f_a und g_b mit $f_a(x) = ax(x-4)^2$ und $g_b(x) = bx(x-4)$ $(a, b \neq 0)$.

a) Skizzieren Sie die Graphen der Funktion $f_{\frac{1}{4}}$ und g_1 in ein Koordinatensystem!
b) Die Graphen der Funktionen $f_{\frac{1}{4}}$ und g_1 schließen jeweils mit der x-Achse ein Flächenstück ein. Berechnen Sie die Inhalte der beiden Flächenstücke!
c) Welche Beziehung muss zwischen a und b bestehen, damit die Inhalte der Flächen unter den Graphen der Funktionen f_a und f_b gleich groß sind?

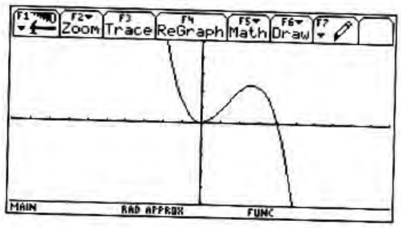
EA 115 Gegeben ist die Funktionenschar f_k mit $f_k(x) = \frac{1}{k}x^5 - kx^3$ $(k \in \mathbb{R};\ k > 0)$.

a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f_2!
b) Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f_k auf Symmetrie!
c) Geben Sie die Nullstellen der Funktion f_k an!
d) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion f_2 und der Abszissenachse im 2. Quadranten vollständig eingeschlossen wird!
e) Für welches k beträgt der Flächeninhalt der gesamten Fläche, die der Graph der Funktion f_k mit der x-Achse einschließt, $40\frac{1}{2}$ FE?

EA 116 Die Parabel mit der Gleichung $y = f(x) = -x^2 + 9$ schneidet die Abszissenachse in den Punkten P_1 und P_2 und die Ordinatenachse im Punkt S. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen der Parabel und den Sehnen $\overline{P_1S}$ und $\overline{P_2S}$! (Fertigen Sie eine Skizze an!)

Zo11 nicht 2009

EA 117 Die nebenstehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + x^2$. Der Graph schließt im Intervall [0; 4] eine Fläche ein. Ein zur x-Achse paralleler Streifen der Breite 1 soll aus der Fläche einen möglichst großen Teil ausschneiden. Geben Sie die Intervallgrenzen dieses Streifens an!



EA 118 Gegeben ist die Funktionenschar f_t mit $f_t(x) = \frac{1}{t}x^3 + t^2$ ($t \in \mathbb{R}$; $t > 0$).

a) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph der Funktion f_t mit der x-Achse im Intervall [0; 1] einschließt!

b) Ermitteln Sie den Parameter t so, dass diese Fläche minimal wird!

EA 119 Zeigen Sie, dass für eine gerade Funktion f die Gleichung $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2 \cdot \int\limits_{0}^{a} f(x)dx$ gilt!
Veranschaulichen Sie diese Formel anhand geeigneter Beispiele!

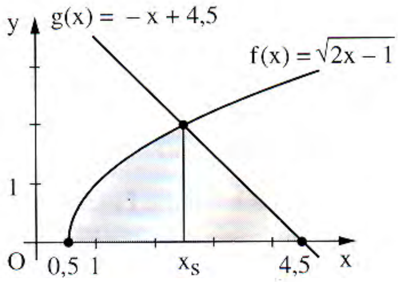
EA 120 Zeigen Sie, dass für eine ungerade Funktion g die Gleichung $\int\limits_{-a}^{a} g(x)dx = 0$ gilt!
Veranschaulichen Sie diese Formel anhand geeigneter Beispiele!

EA 121 Überprüfen Sie, ob eine der folgenden beiden Aussagen wahr ist:

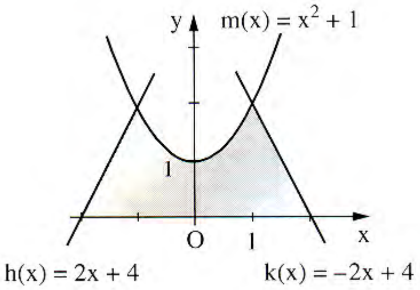
a) „Die Integralfunktion einer geraden Funktion ist stets eine gerade Funktion."

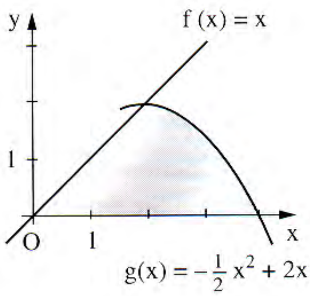
b) „Die Integralfunktion einer ungeraden Funktion ist stets eine gerade Funktion."

EA 78 Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche!



EA 79 Berechnen Sie den Inhalt der markierten Flächen!





EA 80 Der Graph der Funktion $f(x) = -x^2 + 4$ und die x-Achse begrenzen eine Fläche (ein Parabelsegment) vollständig.

a) Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche!

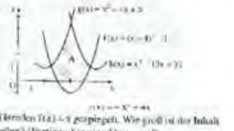
b) Dem Parabelsegment soll ein Quadrat einbeschrieben werden, dessen eine Seite auf der x-Achse liegt. Berechnen Sie die Seitenlänge und den Flächeninhalt dieses Quadrates!

Lösungen zu obigen Aufgaben

Probleme 1

Aufgaben zur Analysis aus TCP 2001 Paetec-Verlag Haftendorn 2011
3898181014 Aufgabenbuch Intergal-Kapitel EA 78-80 und EA 95-121
Hier sind in verschiedenen Problemen die interessanteren Aufgaben versammelt.
In dieser Datei sind die Aufgaben EA 96 bis EA 101 gelöst.

EA 96 Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche A, die von den Graphen der Funktionen f, g und h auf die nebenstehende Weise eingeschlossen wird.
Es sei $f(x) = (x-4)^2 - 1$, $g(x) = x^2 - 4x + 5$, $h(x) = x^2 - 12x + 37$



EA 98 Der Graph der Funktion $f(x) = \sqrt{4x}$ wird an der Geraden $f(x) = x$ gespiegelt. Wie groß ist der Inhalt der Fläche, die Original- und Bildgraph einschließen? (Fertigen Sie eine Skizze an!)

EA 99 Zeichnen Sie das Rechteck ABCD mit A(0; 0), B(2; 0), C(2; 4) und D(0; 4). In welchem Verhältnis teilt die Normalparabel (Graph der Funktion $f(x) = x^2$) die Fläche des Rechtecks?

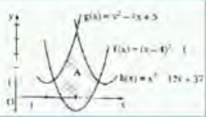
EA 100 In welchem Verhältnis teilt der Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ den Flächeninhalt des Quadrates mit den Eckpunkten A(0; 0), B(2; 0), C(2; 2) und D(0; 2)?

EA 101 In welchem Verhältnis teilt der Graph der Funktion $f(x) = x + 3$ die von den Graphen der Funktionen $g(x) = -x^2 + 9$ und $h(x) = x^2 - 9$ eingeschlossene Fläche? (Fertigen Sie eine Skizze an!)

1.1

Probelm EA 96

EA 96 Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche A, die von den Graphen der Funktionen f, g und h auf die nebenstehende Weise eingeschlossen wird.
Es sei $f(x) = (x-4)^2 - 1$, $g(x) = x^2 - 4x + 5$, $h(x) = x^2 - 12x + 37$



$g(x):=x^2-4\cdot x+5$ ▸ *Fertig* $f(x):=(x-4)^2-1$ ▸ *Fertig* $h(x):=x^2-12\cdot x+37$ ▸ *Fertig*

Vermutung für Scheitelformen dieser Parabeln

$\text{expand}\left((x-2)^2+1\right)$ ▸ $x^2-4\cdot x+5$ passt, $\text{expand}\left((x-6)^2+1\right)$ ▸ $x^2-12\cdot x+37$ passt.

Eigentlich ist vorherzusehen, dass die am mittleren Schnittpunkt unterteilte Fläche links und rechts gleich groß ist.

$\text{ali}:=\int_{2.5}^{4}(g(x)-f(x))\,dx$ ▸ 4.5 $\text{are}:=\int_{4}^{5.5}(h(x)-f(x))\,dx$ ▸ 4.5

Das bestätigt sich auch. Die Gesamtfläche ist also $2\cdot 4.5$ ▸ 9.

2.1

Probelm EA 96

Die Schnittpunkte sind im Graph-Fenster numerisch erzeugt und abgelesen.

Berechnung $\text{solve}(g(x)=h(x),x)$ ▸ $x=4$ war aus Symmetriegründen klar.

Berechnung $\text{solve}(g(x)=f(x),x)$ ▸ $x=\frac{5}{2}$, und $\text{solve}(h(x)=f(x),x)$ ▸ $x=\frac{11}{2}$ liegt symmetrisch zu x=4.

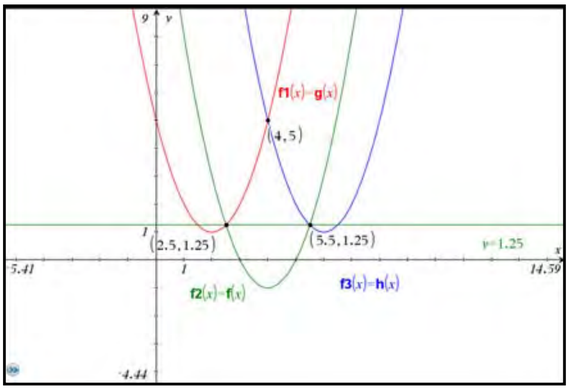
Beschaffung der Stammfunktionen

$\int(g(x)-f(x))\,dx$ ▸ $2\cdot x^2-10\cdot x$ $\int(h(x)-f(x))\,dx$ ▸ $22\cdot x-2\cdot x^2$

Übrigens hat ein Rechteck um die blütenförmige Fläche den Inhalt 15,
die Blüte selbst nimmt die Fläche 9 ein, das sind exakt 60%.

2.2

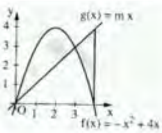
Probelm EA 96



2.3

Problem EA 97

EA 97 Für welchen Wert von m sind die beiden markierten Flächen gleich groß?



Gerade $g(x):=m\cdot x$ ▸ *Fertig* Parabel $f(x):=-x^2+4\cdot x$ ▸ *Fertig*

Schnitt $\text{solve}(g(x)=f(x),x)$ ▸ $x=-(m-4)$ or $x=0$ Also $\text{xs}:=4-m$ ▸ $4-m$

Nullstellen der Parabel $\text{solve}(f(x)=0,x)$ ▸ $x=0$ or $x=4$

Also Ansatz $\text{solve}\left(\int_{0}^{\text{xs}}(f(x)-g(x))\,dx=\int_{\text{xs}}^{4}(g(x)-f(x))\,dx,m\right)$ ▸ $m=\frac{4}{3}$

Das passt zum zum Bild.

3.1

Problem EA 97

Dort kann man die Integrale nur an der Differenzfunktion visualisieren (leider).

Um sowohl Zeichnen als auch weiter allgemein rechnen zu können, ist der Schieberegler k getauft und die Zeichnung ist mit $g(x)|m=k$ ermöglicht.

Dadurch kann g dynamisch visualisiert werden, ohne, dass man m festlegt.

Weitere Berechnungen:

xs ▸ $4-m$

$\int(f(x)-g(x))\,dx$ ▸ $\frac{-x^3}{3}-\frac{(m-4)\cdot x^2}{2}$ $\text{li}:=\int_{0}^{\text{xs}}(f(x)-g(x))\,dx$ ▸ $\frac{-(m-4)^3}{6}$

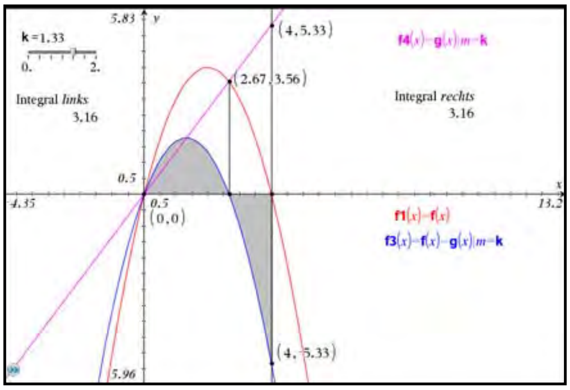
$\text{re}:=\int_{\text{xs}}^{4}(f(x)-g(x))\,dx$ ▸ $\frac{m^2\cdot(m-12)}{6}$ und es ist $\text{li}=\text{re}$ ▸ $\frac{-(m-4)^3}{6}=\frac{m^2\cdot(m-12)}{6}$

zu lösen. $\text{expand}(\text{li}+\text{re}=0)$ ▸ $\frac{32}{3}-8\cdot m=0$ Diese Gleichung kann man leicht von Hand lösen:

es kommt 4/3 heraus. Das ist die zu Obigem passende Lösung.

3.2

Problem EA 97



3.3

Problem EA 98

EA 98 Der Graph der Funktion $f(x) = \sqrt{4x}$ wird an der Geraden $f(x) = x$ gespiegelt. Wie groß ist der Inhalt der Fläche, die Original- und Bildgraph einschließen? (Fertigen Sie eine Skizze an!)

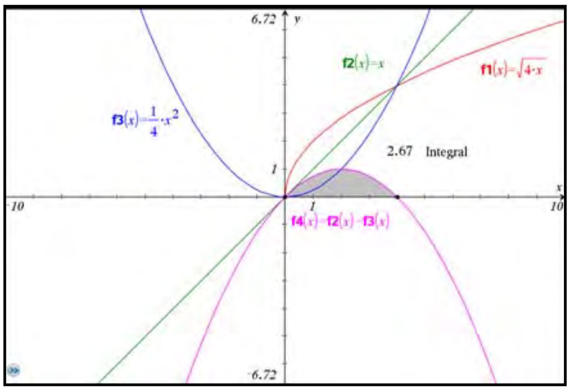
$y=\sqrt{4\cdot x}$ ▸ $y=2\cdot\sqrt{x}$ Umkehrfunktion $f(x):=\frac{1}{4}\cdot x^2$ ▸ *Fertig*

Die gesuchte Fläche ist das Doppelte der Fläche zwischen der Winkelhabierendenund der Parabel

$\int_{0}^{4}(x-f(x))\,dx$ ▸ $\frac{8}{3}$ Also die gesuchte Fläche ist $\frac{16}{3}$ ▸ $\frac{16}{3}$

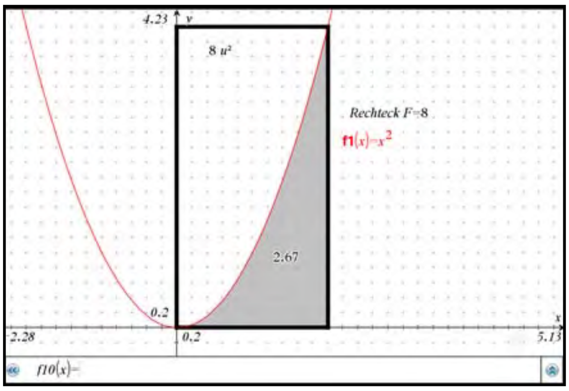
4.1

Problem EA 98



4.2

Problem EA 99+100



5.1

Problem EA 99+100

EA 99 Zeichnen Sie das Rechteck ABCD mit A(0; 0), B(2; 0), C(2; 4) und D(0; 4). In welchem Verhältnis teilt die Normalparabel (Graph der Funktion $f(x) = x^2$) die Fläche des Rechtecks?

EA 100 In welchem Verhältnis teilt der Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ den Flächeninhalt des Quadrates mit den Eckpunkten A(0; 0), B(2; 0), C(2; 2) und D(0; 2)?

Eine Bärenkasten−Aufggabe,klar, die Parabel nimmt 1/3 ein.

$\frac{8}{3} ▸ 2.66667$ Probe $\int_0^2 x^2\, dx ▸ \frac{8}{3}$

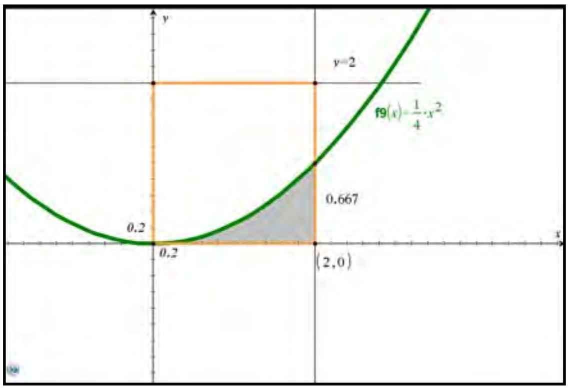
EA 100

Auch ein direkt lösbarer Fall: Schnitt mit Quadrat in Höhe 1, Bärenkasten,

davon nimmt die Parabel $\frac{1}{3}$ ein. aa:=$\frac{1}{3} \cdot 2 ▸ \frac{2}{3}$ Damit ist der Anteil $\frac{\frac{2}{3}}{4} ▸ \frac{1}{6}$

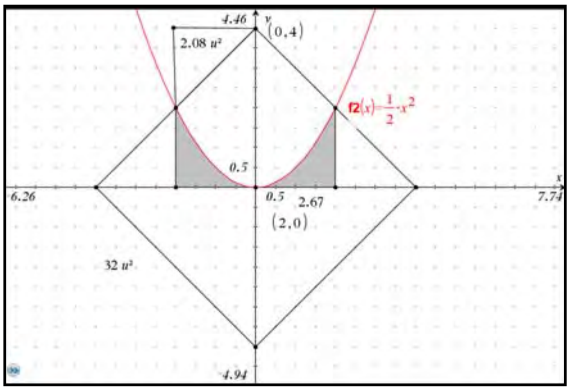
5.2

Problem EA 99+100



5.3

Problem EA 99+100



5.4

Problem EA 99+100

Variante von EA 100

Welchen Flächenanteil schneidet die beiden Parabeln aus dem Quadrat heraus?

Eine Parabel **p**$(x):=\frac{1}{2} \cdot x^2$ ▸ *Fertig* passt.

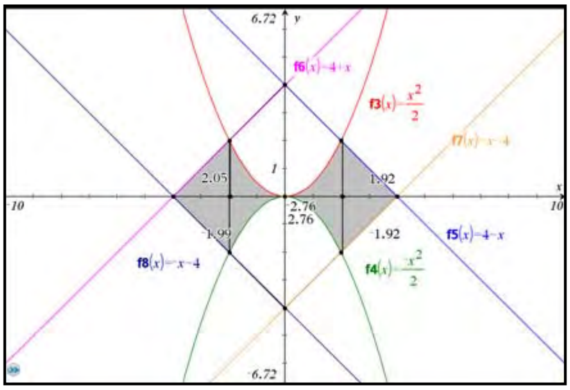
Kantengeradey=−x+4. Schnitt $\mathrm{solve}\left(\frac{1}{2} \cdot x^2=-x+4,x\right) ▸ x=-4 \text{ or } x=2$

orange:=$4 \cdot \int_0^2 \left(-x+4-\frac{1}{2} \cdot x^2\right) dx ▸ \frac{56}{3}$ Das Quadrat hat Diagonale 8, also Flächeninhalt

32. Damit ist das Verhältnis $\frac{56}{3 \cdot 32} ▸ \frac{7}{12}$ etwas mehr als die Hälfte.

5.5

Problem EA 99+100



5.6

Problem EA 99+100

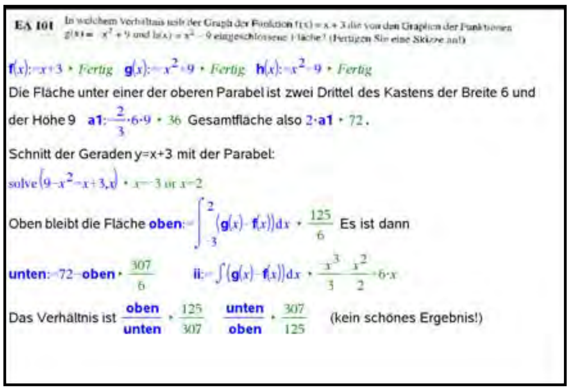
Zweite Figur

$a=\frac{4 \cdot 4}{3}+4 \cdot 2 ▸ a=\frac{40}{3}$

Probe $\frac{40}{3}+\frac{56}{3} ▸ 32$ passt.

5.7

Problem EA 101



EA 101 In welchem Verhältnis teilt der Graph der Funktion $f(x) = x + 3$ die von den Graphen der Funktionen $g(x) = -x^2 + 9$ und $h(x) = x^2 - 9$ eingeschlossene Fläche? (Fertigen Sie eine Skizze an!)

$f(x):=x+3$ ▸ *Fertig* $g(x):=-x^2+9$ ▸ *Fertig* $h(x):=x^2-9$ ▸ *Fertig*

Die Fläche unter einer der oberen Parabel ist zwei Drittel des Kastens der Breite 6 und der Höhe 9 $a1:=\frac{2}{3}\cdot 6\cdot 9$ ▸ 36 Gesamtfläche also $2\cdot a1$ ▸ 72.

Schnitt der Geraden y=x+3 mit der Parabel:

$\text{solve}(9-x^2=x+3,x)$ ▸ $x=-3$ or $x=2$

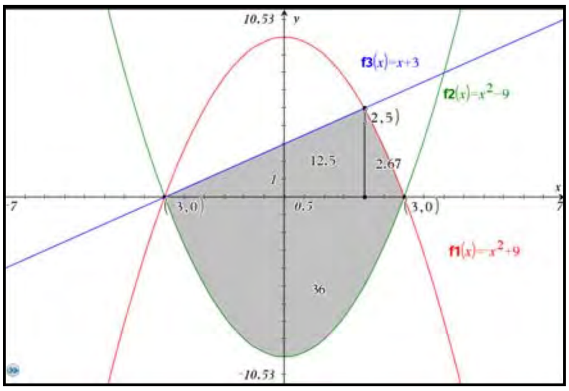
Oben bleibt die Fläche $\textbf{oben}:=\int_{-3}^{2}(g(x)-f(x))\,dx$ ▸ $\frac{125}{6}$ Es ist dann

$\textbf{unten}:=72-\textbf{oben}$ ▸ $\frac{307}{6}$ $ii:=\int(g(x)-f(x))\,dx$ ▸ $\frac{-x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+6\cdot x$

Das Verhältnis ist $\frac{\textbf{oben}}{\textbf{unten}}$ ▸ $\frac{125}{307}$ $\frac{\textbf{unten}}{\textbf{oben}}$ ▸ $\frac{307}{125}$ (kein schönes Ergebnis!)

6.1

Problem EA 101



6.2

TCP 107 bis 110

Aufgaben zur Analysis aus TCP 2001 Paetec-Verlag   Haftendorn 2011
3898181014 Aufgabenbuch Intergal-Kapitel EA 78-80 und EA 95-121
Hier sind in verschiedenen Problemen die interessanteren Aufgaben versammelt.
In dieser Datei sind die Aufgaben EA 107 bis EA 110 gelöst.

EA 107 Gegeben seien die Funktionen f_m und g mit $f_m = mx + 4$ $(m \in \mathbb{R})$ und $g(x) = \frac{4}{x^2}$ $(x \neq 0)$.

GTA Nicht von Hand lösbar

EA 108 Gegeben sei die Funktion $f(x) = (x-1)^2(x+1)^2$. **GTA**

Von Hand lösbar. GTA aber sinnvoll. noch besser wäre eine Ergänzung mit CAS

EA 109 Gegeben sind die Funktionenscharen f_t und g_t mit $f_t(x) = -\frac{1}{t^2}x^2 + 1$ und $g_t(x) = -\frac{1}{t}x^2 + t$ $(0 < t < 1)$.

geht von Hand, aber schön visualisiert. Anspruchsvoll aber gut machbar.

EA 110 Gegeben sind die Funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$ und $g(x) = -4x + 5$.

langweilig

1.1

EA 107 Gebr. Rat und Gerade

EA 107 Gegeben seien die Funktionen f_m und g mit $f_m = mx + 4$ $(m \in \mathbb{R})$ und $g(x) = \frac{4}{x^2}$ $(x \neq 0)$.

a) Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f_1; f_2; $f_{-\frac{1}{2}}$ und g in ein Koordinatensystem!
b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche unter dem Graphen der Funktion g im Intervall [1; 4]!
c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche unter dem Graphen der Funktion g im Intervall [1; b]!
d) Die Graphen der Funktionen f_1 und g schließen eine Fläche vollständig ein. Berechnen Sie deren Inhalt!

$f(x) := m \cdot x + 4$ ▸ *Fertig* $g(x) := \frac{4}{x^2}$ ▸ *Fertig*   a) Siehe erste Grafikseite

Was die verschiedenen Geraden sollen, wird mir micht klar.

Berechnung der Integrale: b) $\int g(x)\,dx$ ▸ $\frac{-4}{x}$ $\int_1^4 g(x)\,dx$ ▸ 3

c) $\int_1^b g(x)\,dx$ ▸ $\frac{4\cdot(b-1)}{b}$ Ich hätte nun die Frage $\int_1^\infty g(x)\,dx$ ▸ 4 gestellt.

Achtung: die Schieberegler bei den einzelnen Graph-Fenstern müssen alle verschieden heißen, sonst kann mann nicht unabhängig voneinander erkunden.

2.1

EA 107 Gebr. Rat und Gerade

d) Berechnung der Zwischenfläche

Zunächst Berechnung der Schnittpunkte, als Nullstellen von $(f(x)|m=1)-g(x)$ ▸ $x-\frac{4}{x^2}+4$

(Achtung die Klammer bei f muss!!!! sein)
$st := zeros((f(x)|m=1)-g(x),x)$ ▸ $\{-3.70928, -1.19394, 0.903212\}$
$g(st)$ ▸ $\{0.290725, 2.80606, 4.90321\}$ Diese Art mit der Funktion zeros erlaubt die direkte Berechnung der Ordinaten der Schnittpunkte "in einem Rutsch" und das Herausgreifen der Ergebnisse mit $st[1]$ ▸ -3.70928 $st[2]$ ▸ -1.19394

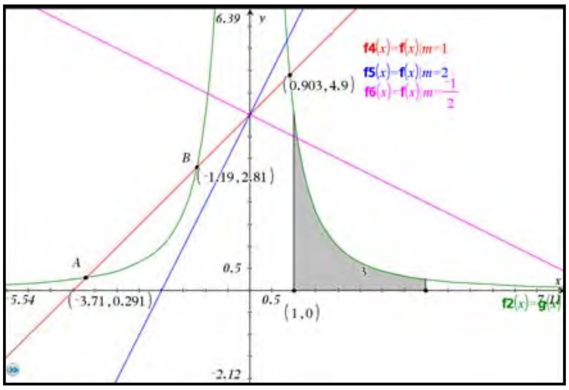
Achtung: dieses Problem führt auf die Gleichung. $x^3-4+4x^2=0$, die nur mit numerischem Werkzeug zu lösen ist. Im Buch TCP steht GTR, natürlich geht auch CAS. (siehe "cardanische Gleichung". www.mathematik-verstehen.de)

$\int((f(x)|m=1)-g(x))dx$ ▸ $\frac{x^2}{2}+4\cdot x+\frac{4}{x}$ $\int_{st[1]}^{st[2]}((f(x)|m=1)-g(x))dx$ ▸ 1.62285

Fazit: da sowieso numerisch gearbeitet werden muss, ist zu empfehlen, die Aufgabe ausschließlich in Graph-Fenster zu lösen. (2.Graph-Fernster)

2.2

EA 107 Gebr. Rat und Gerade



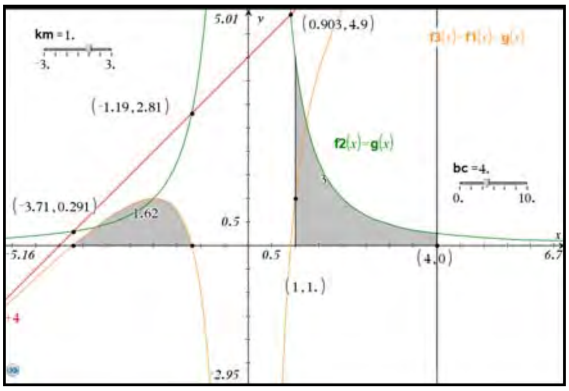
2.3

EA 107 Gebr. Rat und Gerade

Aufgabenergänzungen:
Ermittel Sie interaktiv möglichst genau, für welche m sich endlich begrenzte Flächen zwischen f und g ergeben?
Ansatz $h(x) := f(x)-g(x)$ $h(x)$
$\text{approx}(\text{zeros}(h(x),x))|m=1.5396$
Mit dieser Rechnung konnte man sich herantasten an eine möglichst große Übergeinstimmung der ersten beiden Werte.
$\text{approx}(\text{zeros}(h(x),x))|m=1.5397$ Hier ist nur noch die rechte Schnittstelle übrig.
Der so gefundene Werte m=1.5396 ist genauer als der, den man durch Ziehen an dem Schieberegler erhalten kann.

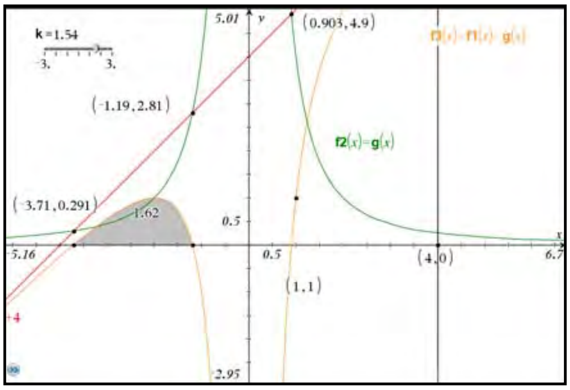
2.4

EA 107 Gebr. Rat und Gerade



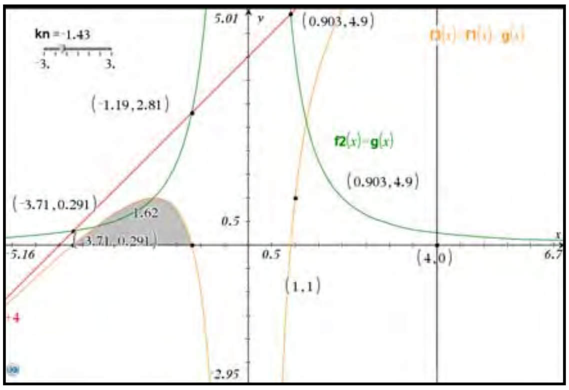
2.5

EA 107 Gebr. Rat und Gerade



2.6

EA 107 Gebr. Rat und Gerade



2.7

EA 108 Polynom 4.Gr. W-Form

EA 108

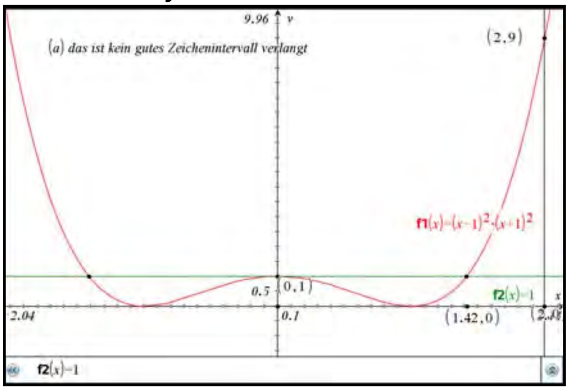
$f(x):=(x-1)^2\cdot(x+1)^2 \triangleright$ *Fertig* Der Funktionsterm besteht aus einfachen Glasbaussteinen, zwei formgleichen Parabeln, die symmetrisch zur y−Achse liegen. Noch deutlicher ist die Symmetrie zur y−Achse nach einer Umformung nach der 3. binomischen Formel:

$termq:=(x^2-1)^2 \triangleright (x^2-1)^2$, f ist also symmetrisch und berührt die x−Achse von oben bei x=1 und x=−1. Damit hat f eine gerade W−Form. Damit ist das Maximum auf der y−Achse bei $f(0)$, also im Punkt (0,1). Für eine Funktion 4. Grades sind mehr als diese drei Extrema nicht möglich. Sie erzwingen dann zwei Wendepunkte.

Es ist nicht ersichtlich, warum man das Zeichenintervall [−2,2] nennt, dann aber das Intergral bis x=3 verlangt.

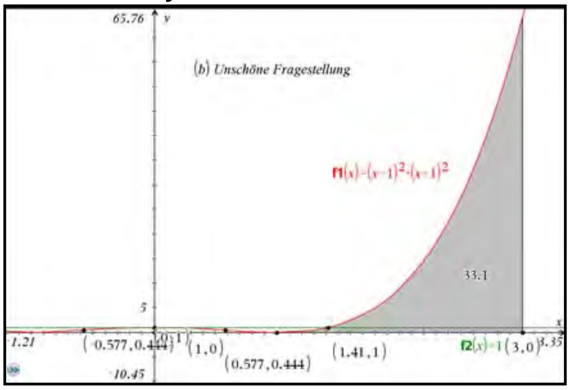
3.1

EA 108 Polynom 4.Gr. W-Form



3.2

EA 108 Polynom 4.Gr. W-Form



3.3

EA 108 Polynom 4.Gr. W-Form

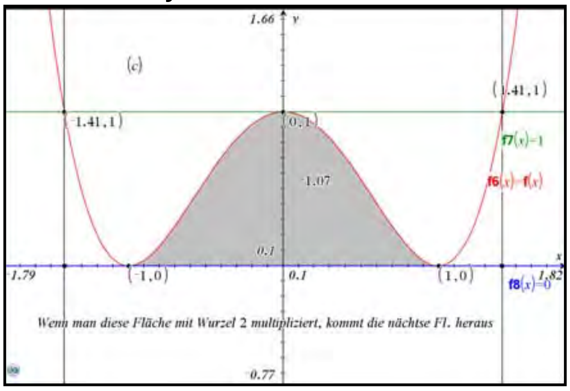
b) Aber bitte: $fl:=\int_1^3 f(x)\,dx \triangleright \frac{496}{15}$ $fl \triangleright 33.0667$ Wollte man dies von Hand machen, müsste man erste die Klammern auflösen: $term \triangleright 2\cdot x^2-x^4$ und das unbestimmte Integral ist dann $\int term\,dx \triangleright \frac{2\cdot x^3}{3}-\frac{x^5}{5}$

c) Da die Berühmullstellen klar sind, ist ersichtlich ist gemeint $fc \triangleright \frac{16}{15}$ $fc \triangleright 1.06667$

d) Wegen $f(0) \triangleright 1$ schließen die Gerade $y=1$ und f die gemeinte Fläche ein. Bestimmung der Schnittstellen $xs:=\text{zeros}(1-f(x),x) \triangleright \{-\sqrt{2},0,\sqrt{2}\}$, passt zur zeichnerisch ermittelten Lösung. $term:=\text{expand}(1-f(x)) \triangleright 2\cdot x^2-x^4$, damit man von Hand integrieren könnte.

3.4

EA 108 Polynom 4.Gr. W-Form



3.5

EA 108 Polynom 4.Gr. W-Form

weiter d)

Im 1. Quadranten ist also $xs \triangleright \{-\sqrt{2},0,\sqrt{2}\}$ und das gemeinte Integral ist

$fd:=2\cdot\int_0^{xs[3]}(1-f(x))\,dx \triangleright \frac{16\cdot\sqrt{2}}{15}$

Das ist übrigens $\frac{\sqrt{2}\cdot 16}{15} \triangleright \frac{16\cdot\sqrt{2}}{15}$ oder: Die Fläche aus c) muss man mit $\sqrt{2}$ malnehmen, um die Fläche aus d) zu erhalten.

Diese Eigenschaft wird dann für alle Polynome 4. Grades gelten.

Siehe Extragraph−Fenster

Multipliziert man die Mittelflächemit Wurzel(2), kommt die Fläche zwischen f und y=1 heraus. Wieder wird dgl. nicht betrachtet. Sie Extraaufgabe

3.6

EA 108 Polynom 4.Gr. W-Form

Extraaufgaben, Ergänzungenzu EA 108

Welchen Anteil habendie in c) und d) berechneten Flächen in dem Kasten, der sich mit der x−Achse, der Geraden y=1 und den Senkrechten an den Schnittstellen ergibt? (Pantherkäfig) Dieser hat den Flächeninhalt $fpk:=2\cdot xs[3]\cdot 1 \triangleright 2\cdot\sqrt{2}$

$fc:=\frac{16}{15} \triangleright \frac{16}{15}$ $fd \triangleright \frac{16\cdot\sqrt{2}}{15}$ $\frac{fd}{fpk} \triangleright \frac{8}{15}$ $\frac{fc}{fpk} \triangleright \frac{4\cdot\sqrt{2}}{15}$ $fc\cdot\sqrt{2} \triangleright \frac{16\cdot\sqrt{2}}{15}$

$rest:=fpk-fd-fc \triangleright \frac{14\cdot\sqrt{2}}{15}-\frac{16}{15}$ $unten:=fc+rest \triangleright \frac{14\cdot\sqrt{2}}{15}$ $\frac{fd}{unten} \triangleright \frac{8}{7}$

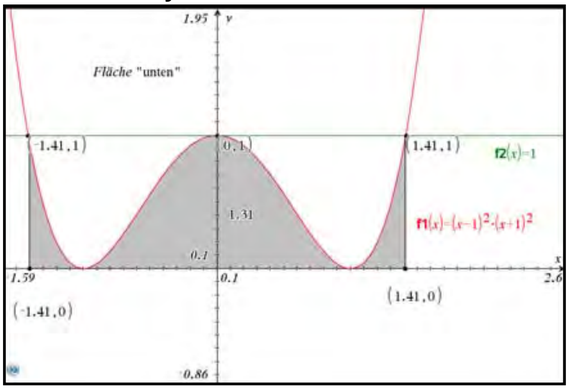
$\int_{xs[1]}^{xs[3]} f(x)\,dx \triangleright \frac{14\cdot\sqrt{2}}{15}$ Probe für "unten".

Das ist ein schönes Verhältnis: Nennt man die Fläche aus d) $oben:=fd \triangleright \frac{16\cdot\sqrt{2}}{15}$

so verhält sich oben zu unten wie $\frac{oben}{unten} \triangleright \frac{8}{7}$ Dass alles gilt auch schräg.

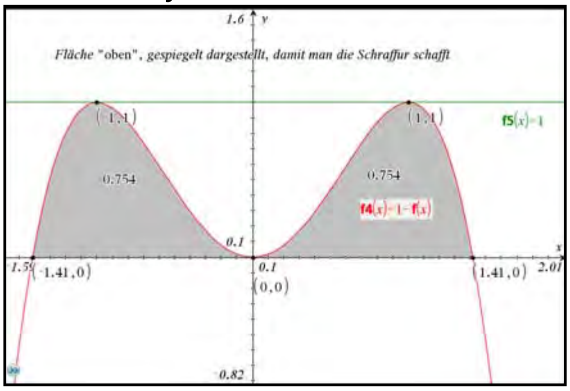
3.7

EA 108 Polynom 4.Gr. W-Form



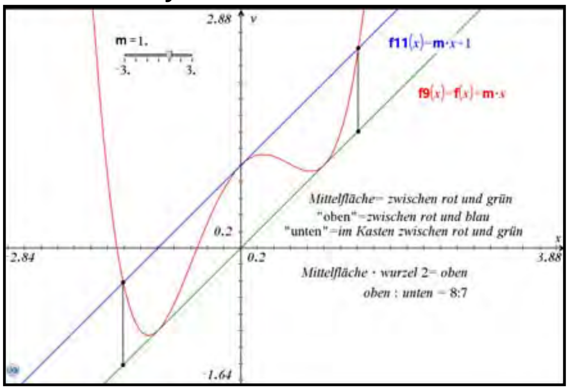
3.8

EA 108 Polynom 4.Gr. W-Form



3.9

EA 108 Polynom 4.Gr. W-Form



3.10

EA 109 zwei Parabelscharen

EA 109 Gegeben sind die Funktionenscharen f_t und g_t mit $f_t(x) = -\frac{1}{t^2}x^2 + 1$ und $g_t(x) = -\frac{1}{t}x^2 + t$ $(0 < t < 1)$.

a) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen f_t und g_t für $t = \frac{1}{2}$!

b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der Funktionen f_t und g_t eingeschlossen wird!

c) Für welchen Wert von t wird dieser Flächeninhalt maximal?

$f(x):=\frac{-1}{t^2}\cdot x^2+1$ ▸ *Fertig* $g(x):=\frac{-1}{t}\cdot x^2+t$ ▸ *Fertig* Es wird hier betrachtet 0<t<1

Beiede Parabeln sind symmetrische zur y-Achse. Für t=1 stimmen beide Funktionen überein und scheiden die y-Achse bei y=1. Die Fläche zwischen ihnen ist Null. Für kleinere t werden beide Parabeln enger,aber ist g weiter geöffnet als f und der Scheitel von g wandert nach unten, bleibt aber für positive t im Positiven. Der Scheitel von f bleibt fest. Für t nahe Null werden beide Parabeln sehr schmal unte die Fläche zwischen Ihnen wird sehr klein. Daher kann man ein Flächenmaximum erwarten. Berechnungen: Schnittpunkte $xs:=\text{zeros}(f(x)-g(x),x)$ ▸ $\{-t,t\}$ Die Schnittstellen werden direkt durch t angegeben.

4.1

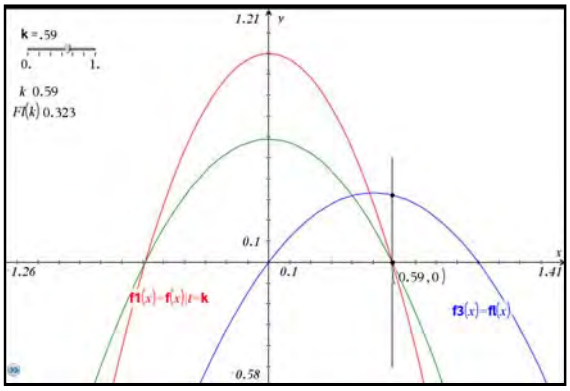
EA 109 zwei Parabelscharen

$\int_{-t}^{t}(f(x)-g(x))\,dx$ ▸ $\frac{-4\cdot t\cdot(t-1)}{3}$ $fl(t):=\frac{-4\cdot t\cdot(t-1)}{3}$ ▸ *Fertig* Dieses ist ebenfalls eine nach unten geöffnete Parabel mit den Nullstellen t=0 und t=1. Diese entsprechen der Erwartung. Als Parabel hat sie ihren Scheitel bei $t=\frac{1}{2}$. Also ist die die maximale Fläche

$fl\left(\frac{1}{2}\right)$ ▸ $\frac{1}{3}$

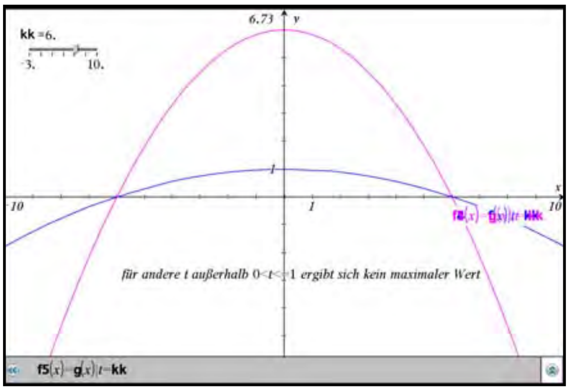
4.2

EA 109 zwei Parabelscharen



4.3

EA 109 zwei Parabelscharen



4.4

EA 110 Hyperbel und Gerade

a) Überprüfen Sie, ob f Extremstellen besitzt! Ermitteln Sie $\lim_{x\to\infty} f(x)$!

b) Berechnen Sie die Schnittpunkte der Graphen beider Funktionen! Skizzieren Sie beide Funktionen in ein Koordinatensystem!

c) Berechnen Sie das Flächenstück, das die Graphen beider Funktionen vollständig einschließen!

$f(x):=\frac{1}{x}$ ▸ *Fertig* $g(x):=-4\cdot x+5$ ▸ *Fertig*

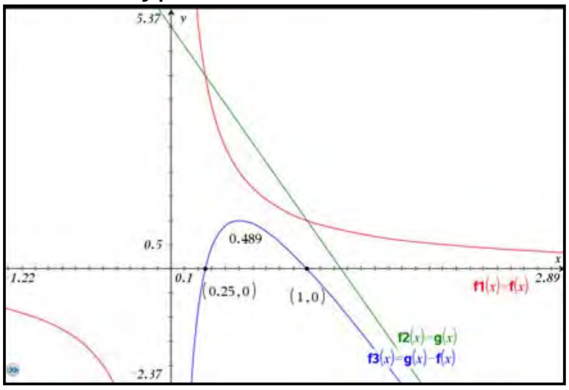
a) Es handelt sich um die übliche Hyperbel, die hat in dieser Lage keine Extremstellen und strebt für x gegen Unendlich gegen 0. (Soetwas kann man nicht fragen, wenn es überhaupt Unterricht gegeben hat, dann gab es die Hyperbel.)

b) Schnittpunkte $xs:=\text{zeros}(g(x)-f(x),x)$ ▸ $\left\{\frac{1}{4},1\right\}$ Im Graphfenster ist diese Differenzfunktioen auch gezeichnet, da man sonst die Zwischenfläche nicht schraffieren könnte.

c) $fl:=\int_{xs[1]}^{xs[2]}(g(x)-f(x))\,dx$ ▸ $\frac{15}{8}-2\cdot\ln(2)$ fl ▸ 0.488706 , nix Besonderes.

5.1

EA 110 Hyperbel und Gerade

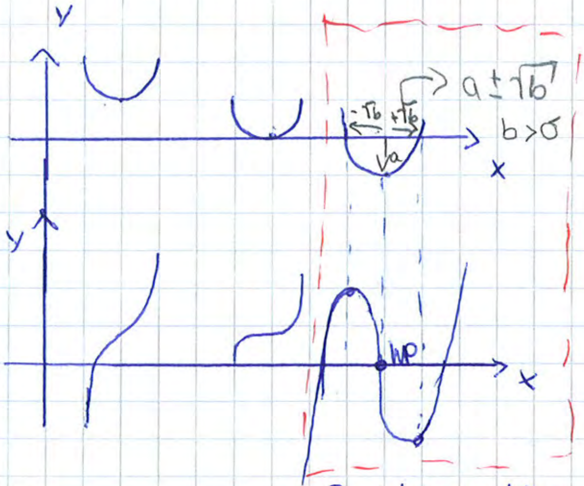


5.2

20.05.09 **Polynome im Affenkasten**

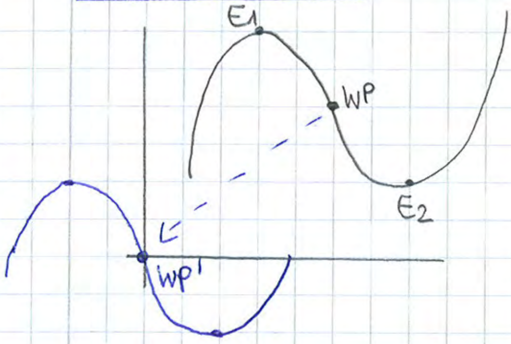
Polynome im Affenkasten

Ansicht von $p_3' = f'$

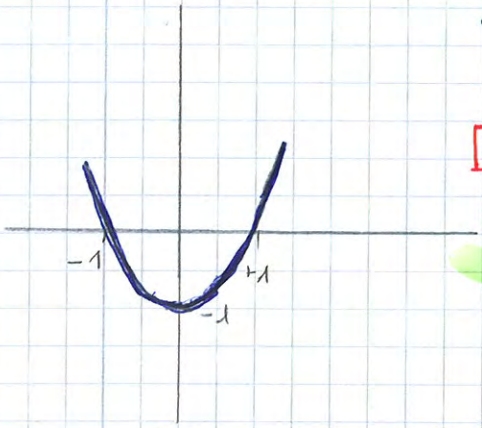


- Punktsymmetrie
- WP liegt zwischen den Extrema

wir betrachten:



Ableitung:



Prototyp für f' nehmen wir:

$f'(x) = x^2 - 1$

$\boxed{f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x = \frac{1}{3}x\,(x^2 - 3)}$

Beim Strecken oder Stauchen bleiben Teil- und Flächenverhältnisse gleich.

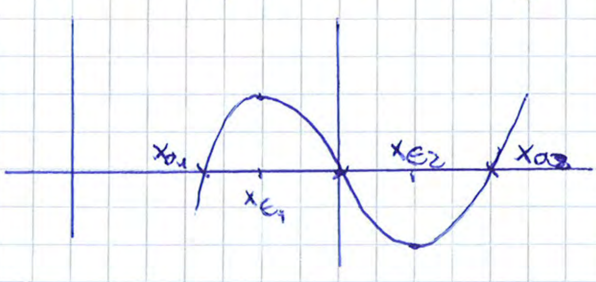
Splone: Mitte links, oben rechts: wenn hoch 3 Fkt.

Nullstellen: $f(x) = 0$: $\frac{1}{3}x\,(x^2 - 3) = 0$

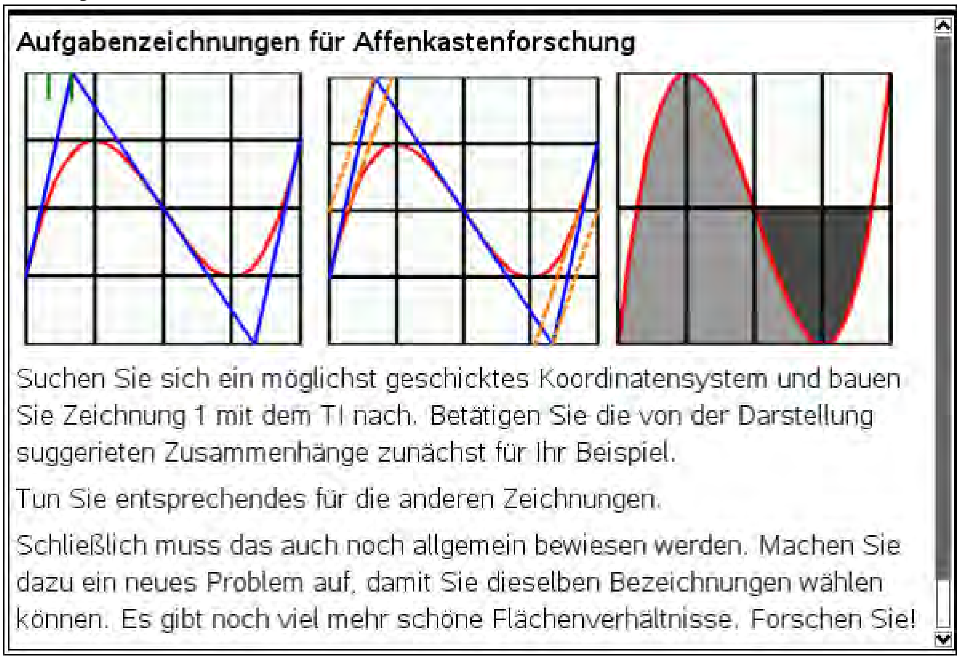
$x_1 = 0 \wedge x_2 = -\sqrt{3} \wedge x_3 = +\sqrt{3}$

für alle p_3 in der oben Lage (Achse geht durch WP) gilt:

$\boxed{x_0 = \sqrt{3} \cdot x_E}$



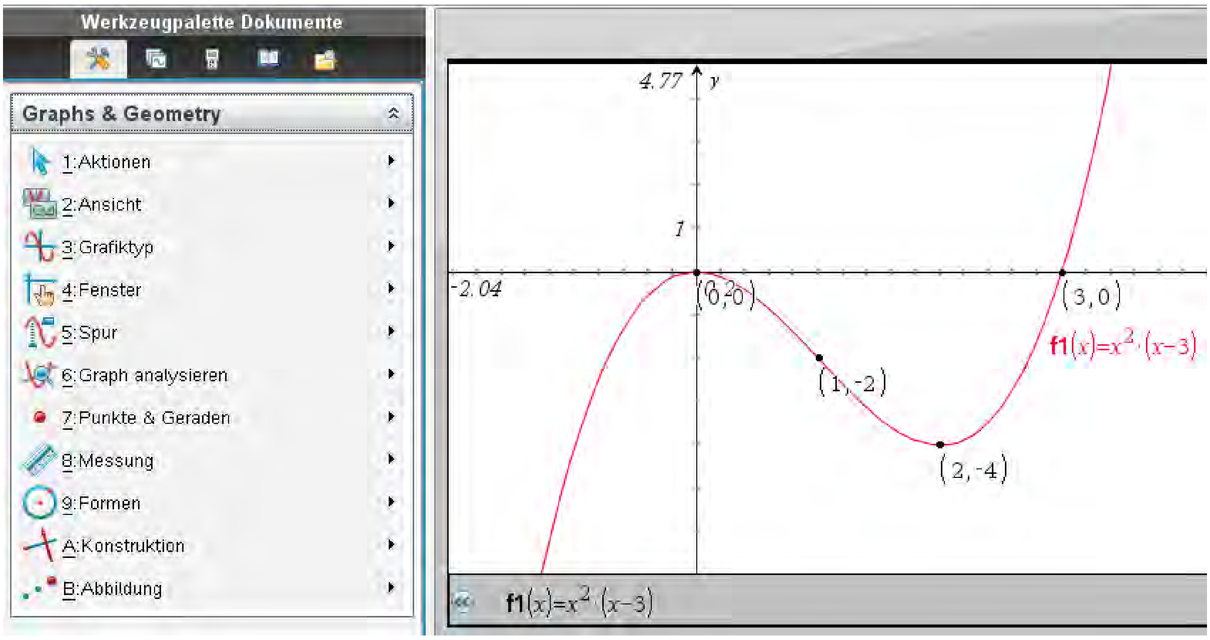
Polynome im Affenkasten Offene Aufgabenstellung für TI-nspire

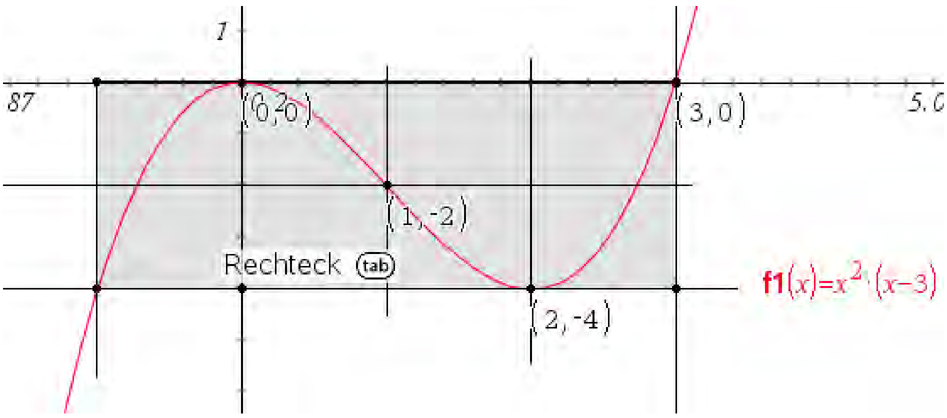


Datei affenkasten2011.tns

Offen formulierte Aufgabe.
Auf 11 Seiten wird ein mögliches Vorgehen ausführlich vorgestellt und erläutert.
Die Beweisseiten in Problem 2 der Datei erfordern CAS, die anderen nicht

Es ist formuliert für Anfänger beim Einsatz von TI-nspire.

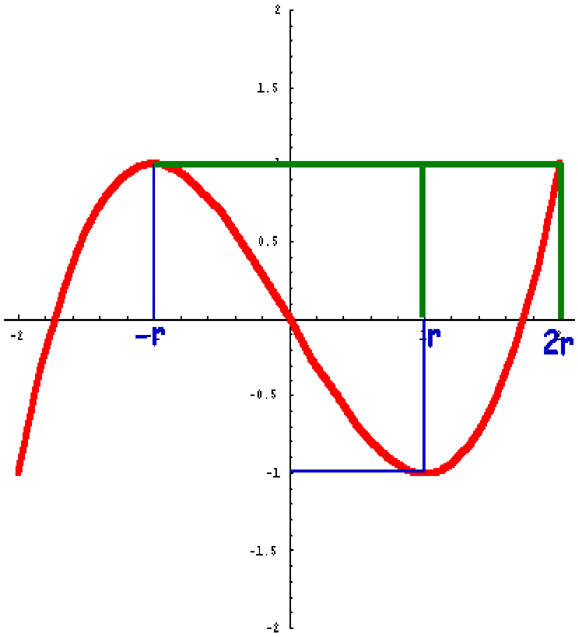


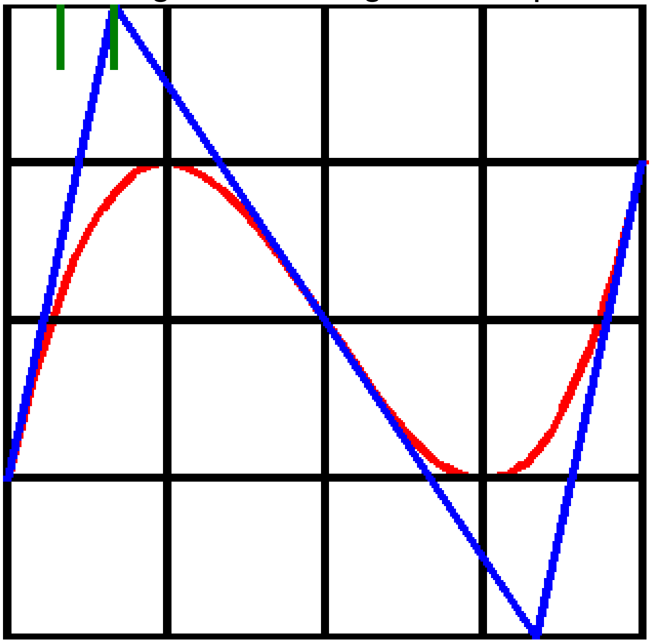


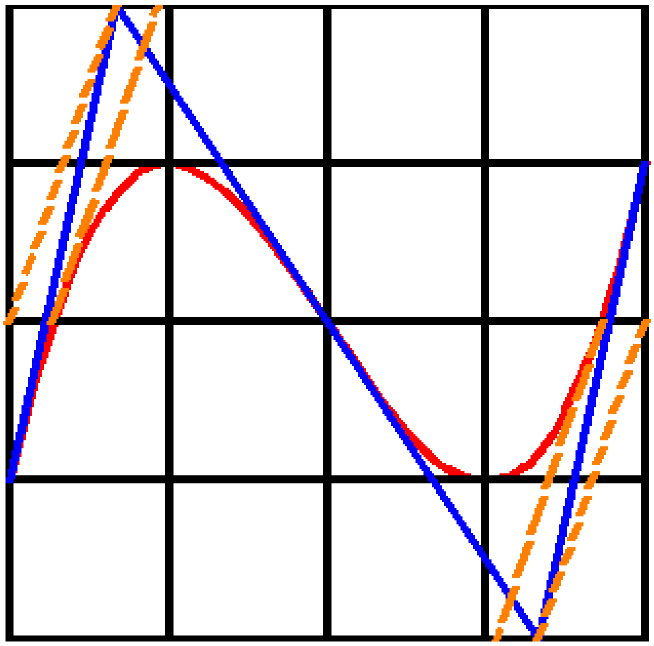
Graphen markieren und re-Klick ermöglicht ein reichhaltiges Menu. Leider ist dieses meiner Beobachtung nach nicht im Sratch-Graph vorhanden. Man muss schon in einer Datei arbeiten. Jedenfalls Graph analysieren wichtig, aber auch das Punkte-menu mit dem Schnittpunktwerkzeug und die Konstruktion mit den Senkrechten. Es folgen projizierbare Bilder für die ganz offene Bearbeitung im Unterricht:

Polynome im Affenkasten

Offene Aufgabenstellung für TI-nspire



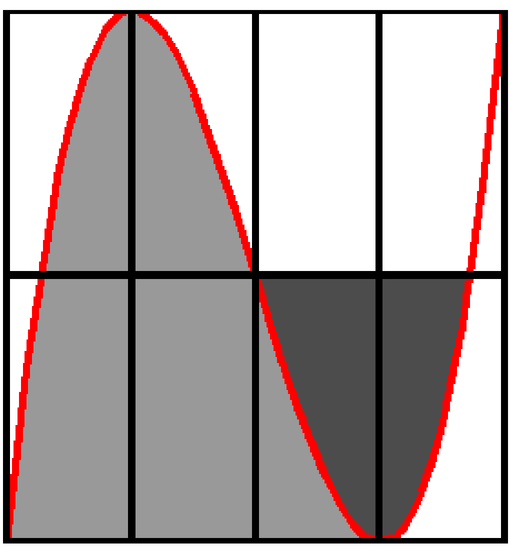


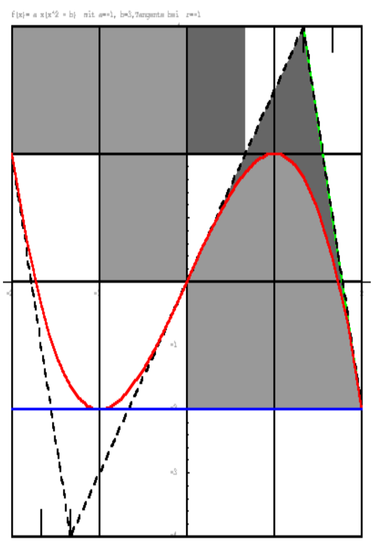


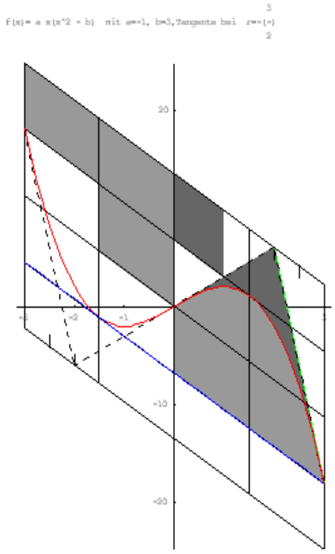
Weitere Bilder,
Übertragung auf andere Polynome und Untersuchung von Polynomen anderen Grades,
viele didaktische und mathematische Erläuterungen und Beweise
finden Sie auf
www.mathematik-verstehen.de
im Bereich Analysis → Affenkasten

Dort sind auch mehrere Powerpointvortrage verfügbar.
Jedenfalls eröffnet diese Sicht auf Polynom eine fruchtbares Arbeiten von Lernenden mit Einsatz von TI nspire, GeoGebra, CAS ….

Mathematik ist schön!



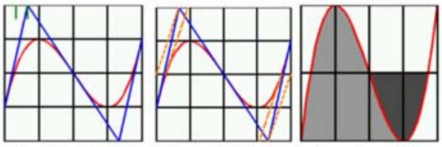




Affenkasten2011

Aufgabenzeichnungen für Affenkastenforschung

Haftendorn 2011 Weiteres dazu www.mathematik-verstehen.de Bereich Analysis



Suchen Sie sich ein möglichst geschicktes Koordinatensystem und bauen Sie Zeichnung 1 mit dem TI nach. Betätigen Sie die von der Darstellung suggerieten Zusammenhänge zunächst für Ihr Beispiel.

Tun Sie entsprechendes für die anderen Zeichnungen.

Schließlich muss das auch noch allgemein bewiesen werden. Machen Sie dazu ein neues Problem auf, damit Sie dieselben Bezeichnungen wählen können. Es gibt noch viel mehr schöne Flächenverhältnisse. Forschen Sie!

1.1

Polynome im Affenkasten Grundlage Haftendorn Mai 2011

$f(x):=x^2\cdot(x-3)$ ▸ *Fertig* Koordinatensystem so gewählt, dass die Berechnnungen vermutlich einfach werden.

Die Nullstellen sind wegen dieses Funktionsterms klar:

x01$:=0$ ▸ 0 doppelte Nullstelle **x02**$:=3$ ▸ 3 einfache Nullstelle.

Im Graphfenster sind mit re–Klick : Graph analysieren , schon ist das Minimum und der Wendepunkt gefunden. Beides entspicht den durch die Aufgabenzeichnung angeregten Erwartungen.

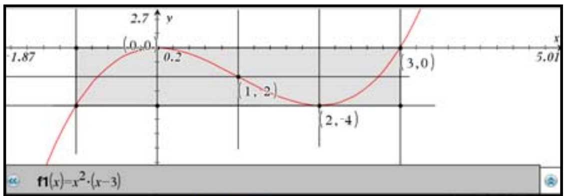
Mit dem Werkzeug–Symbol kommt man in das Geometriemenu. Damit kann mit Senkrechten und Formen–> Rechteck den Affenkasten zeichnen.

Die direkten Rechnungen wären:

Ableitung $\mathbf{df}(x):=\frac{d}{dx}(\mathbf{f}(x))$ ▸ *Fertig* $\mathbf{df}(x)$ ▸ $3\cdot x\cdot(x-2)$

Man sieht mit bloßem Auge die Nullstellen der Ableitung x=0 und x=2

1.2



Ordinate für das Minimum: **ye2**$:=\mathbf{f}(2)$ ▸ -4

Also haben die Zellen des Affenkastens die Breite 1, die Höhe 2 und die Fläche 2.

Der Wendepunkt, exakt gerechnet:

$\mathbf{ddf}(x):=\frac{d}{dx}(\mathbf{df}(x))$ ▸ *Fertig* $\mathbf{ddf}(x)$ ▸ $6\cdot x-6$

Man sieht **xw**$:=1$ ▸ 1 Ordinate dazu **yw**$:=\mathbf{f}(\mathbf{xw})$ ▸ -2 wie erwartet.

1.3

Untersuchung der Tangenten im Wendepunkt und in den Kastenecken Zeichnung 1.

Die Tangenten kann man direkt anfordern $\mathbf{ta}(x):=\text{tangentLine}(\mathbf{f}(x),x,\mathbf{xw})$ ▸ *Fertig*

$\mathbf{ta}(x)$ ▸ $1-3\cdot x$ Auf einer neuen Graphikseite, die als Kopie der anderen entanden ist, werden diese in die nachfolgenen Tangenten eingetragen.

$\mathbf{eck}(x):=\text{tangentLine}(\mathbf{f}(x),x,-1)$ ▸ *Fertig* $\mathbf{eck}(x)$ ▸ $9\cdot x+5$

Die Einzeichnung und die Beschaffung des Schnittpunktes mit den Geo–Werkzeugen zeigt als Ordinate des Schnittpunkte eine 2, das passt in einen erweiterten Affenkasten

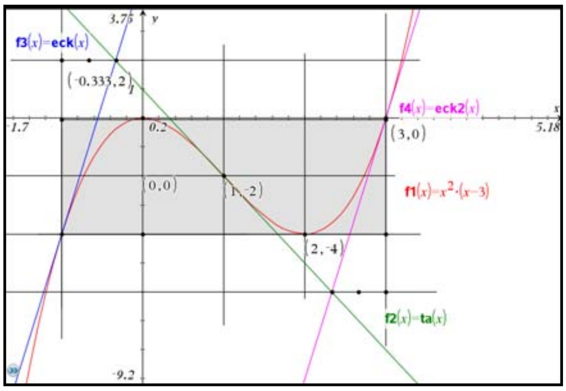
ebenso auf der anderen Seite $\mathbf{eck2}(x):=\text{tangentLine}(\mathbf{f}(x),x,3)$ ▸ *Fertig* $\mathbf{eck2}(x)$ ▸ $9\cdot x-27$

Darüberhinaus liegt die Schnittstelle (evt. nur bei diesem Beispiel ?) auf einer Drittelstelle des Kastens.

Rechnungen dazu $\text{solve}(\mathbf{ta}(x)=\mathbf{eck}(x),x)$ ▸ $x=\frac{-1}{3}$ $\mathbf{ta}\left(\frac{-1}{3}\right)$ ▸ 2

$\text{solve}(\mathbf{ta}(x)=\mathbf{eck2}(x),x)$ ▸ $x=\frac{7}{3}$ $\mathbf{ta}\left(\frac{7}{3}\right)$ ▸ -6 wie erwartet.

1.4



1.5

Untersuchung der gestrichelten Tangenten

Zuerst muss man die Schnittpunkte N1 und N2 des Graphen von f mit der waagerechten Mittellinie des Kastens bestimmen. Im Graphfenster ist das interaktiv gemacht. Die Schnittstellen sind keine ganzen Zahlen, auch keine offensichtlichen Brüche. Daher berechnen wir sie jetzt:

$\text{solve}(\mathbf{f}(x)=-2,x)$ ▸ $x=-(\sqrt{3}-1)$ or $x=1$ or $x=\sqrt{3}+1$ Klar, diese Wurzelausdrücke konnte man nicht "erkennen".

Taufe: **xn1**$:=-(\sqrt{3}-1)$ ▸ $-(\sqrt{3}-1)$ und **xn2**$:=\sqrt{3}+1$ ▸ $\sqrt{3}+1$

Tangenten in N1 und N2

$\mathbf{tan1}(x):=\text{tangentLine}(\mathbf{f}(x),x,\mathbf{xn1})$ ▸ *Fertig* $\mathbf{tan1}(x)$ ▸ $6\cdot x+2\cdot(3\cdot\sqrt{3}-4)$

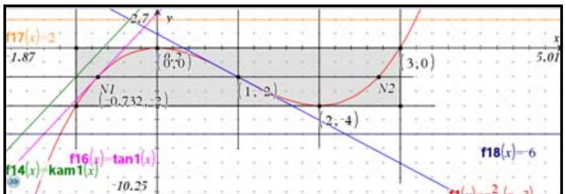
$\mathbf{tan2}(x):=\text{tangentLine}(\mathbf{f}(x),x,\mathbf{xn2})$ ▸ *Fertig* $\mathbf{tan2}(x)$ ▸ $6\cdot x-2\cdot(3\cdot\sqrt{3}+4)$

Beide Tangenten haben Steigung 6, eine Zahl, die sich im Affenkasten interpretieren lässt. In der Aufgabenzeichung wird vorgeschlagen,

Geraden durch die linke bzw. rechte Kastenmitte und den Punkt zu legen, an dem die Wendetangete den Doppelkasten verlässt.

$\mathbf{kam1}(x):=6\cdot(x+1)-2$ ▸ *Fertig* $\mathbf{kam2}(x):=6\cdot(x-3)-2$ ▸ *Fertig*

1.6

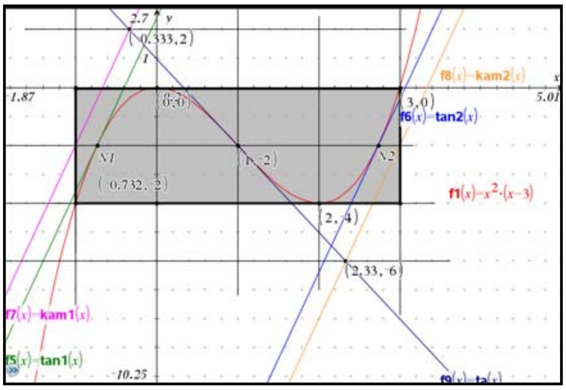


Vergleich mit der gegebenen Zeichnung ergibt, dass auf diesen Geraden jeweils der oben berechnete Schnittpunkt liegen soll. Wir prüfen das

$\mathbf{kam1}\left(\frac{-1}{3}\right)$ ▸ 2 und $\mathbf{kam2}\left(2+\frac{1}{3}\right)$ ▸ -6 Das passt.

Also könnte man die N–Tangentensteigungen aus dem Affenkasten gewinnen.

1.7



1.8

Flächenaufgabe

$f(x) \triangleright x^2\cdot(x-3)$ ist die Funktion, die wir gewählt haben.

Mit unserem Koordinatensystem ist die untere Kastenlinie y=−4

und die mittlere y=−2. Die in der Aufgabe dargestellten Flächen sind also

links $\int_{-1}^{2}(f(x)+4)\,dx \triangleright \frac{27}{4}$ und rechts $\int_{1}^{xn2}(2-(f(x)+4))\,dx \triangleright \frac{9}{4}$.

Das ist genau das Dreifache, die beiden Flächen verhalten sich wie 3:1

Die Intergale kann man auch interaktiv in Grafikfenstern bestimmen. Dazu wählt man den Graphen aus und nimmt re−Klick Integral. Die linken und rechten Grenzen hat man am besten vorher schon mit den Geometriewerkzeugen beschafft. Allerdings muss man dazu den Integranden selbst in einem anderen Grafikfenster als Funktion gezeichnet haben. "Zwischenflächen" bekommt man leider nicht interaktiv.

1.9

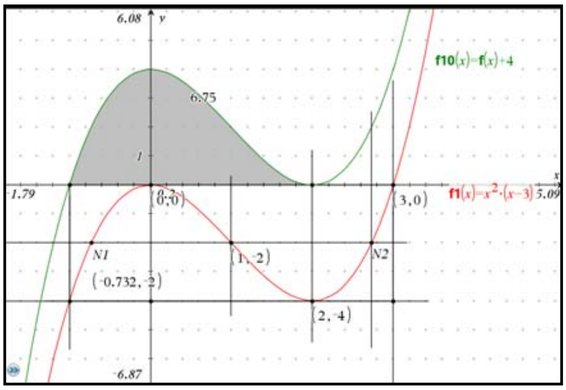
Eine Kastenzelle hat den Flächeninhalt $1\cdot2$

$\int_{-1}^{1}(f(x)+4)\,dx \triangleright 6$ das sind genau drei Kastenzellen.

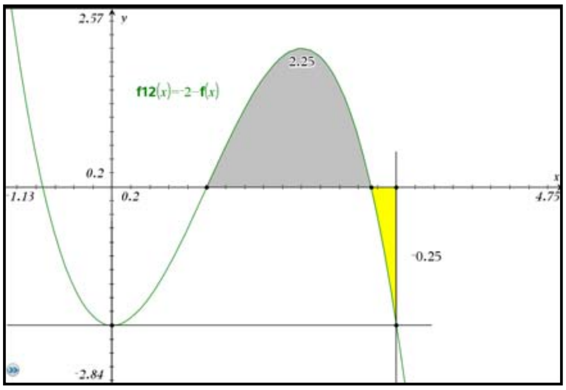
Als Flächenbilanz: $\int_{1}^{3}(2-(f(x)+4))\,dx \triangleright 2$ genau eine Kastenzelle, also ist die dunkle Fläche des Bildes um genau das gelbe Zipfelchen rechts vor dem Kastenrand größer als eine Kastenzelle. Hierzu Extragrafik.

Probe dafür $\int_{xn2}^{3}(f(x)+2)\,dx \triangleright \frac{1}{4}$

1.10



1.11



1.12

Allgemeine Rechnungen, Beweise

Allgemeine Rechnungen Beweise der dargestellten Eigenschaften

$f(x):=x^2\cdot(x-3\cdot r) \triangleright \mathit{Fertig}$ Nullstellen $x01:=0 \triangleright 0$ doppelt, $x02:=3\cdot r \triangleright 3\cdot r$

$df(x):=\frac{d}{dx}(f(x)) \triangleright \mathit{Fertig}$ $df(x) \triangleright -3\cdot(2\cdot r-x)\cdot x$ $ex:=zeros(df(x),x) \triangleright \{2\cdot r,0\}$ Extremstellen

Ordinaten dazu $f(ex) \triangleright \{-4\cdot r^3,0\}$

$ddf(x):=\frac{d}{dx}(df(x)) \triangleright \mathit{Fertig}$ $ddf(x) \triangleright 6\cdot x-6\cdot r$ $w:=zeros(ddf(x),x) \triangleright \{r\}$ Extremstellen

Ordinaten dazu $f(w) \triangleright \{-2\cdot r^3\}$ Linke Kastenecke $f(-r) \triangleright -4\cdot r^3$ entspricht dem Extremwert

Zusammen Kastenraster in x−Richtung: $kx:=\{-r,0,r,2\cdot r,3\cdot r\}$

Ordinaten dazu $f(kx) \triangleright \{-4\cdot r^3,0,-2\cdot r^3,-4\cdot r^3,0\}$ Zellenhöhe $2\cdot r^3$ wie erwartet.

Wendetangente $ta(x):=tangentLine(f(x),x,w[1]) \triangleright \mathit{Fertig}$ $ta(x) \triangleright r^3-3\cdot r^2\cdot x$

Ecktangente $eck(x):=tangentLine(f(x),x,-r) \triangleright \mathit{Fertig}$ $eck(x) \triangleright 5\cdot r^3+9\cdot r^2\cdot x$

$solve(ta(x)=eck(x),x) \triangleright x=\frac{-r}{3}$ $ta\left(\frac{-r}{3}\right) \triangleright 2\cdot r^3$ Also ist der Schnittpunkt immer an der dargestellten Drittelstelle einer Zelle in der Höhe der Doppelkastenlinie.

2.1

Flächenuntersuchung

$\int f(x)\,dx \triangleright \frac{x^4}{4}-x^3\cdot r$ $\int_{-r}^{2\cdot r}(f(x)+4\cdot r^3)\,dx \triangleright \frac{27\cdot r^4}{4}$ Schnitt mit der Kastenmittellinie

$n:=zeros(-2\cdot r^3-f(x),x) \triangleright \{-(\sqrt{3}-1)\cdot r,(\sqrt{3}+1)\cdot r,r\}$ $n2:=n[2] \triangleright (\sqrt{3}+1)\cdot r$

$\int_{r}^{n2}(-2\cdot r^3-f(x))\,dx \triangleright \frac{9\cdot r^4}{4}$ und das ist, wie erwartet immer genau ein Drittel des obigen Integralwertes. $zelle:=r\cdot2\cdot r^3 \triangleright 2\cdot r^4$ $\int_{r}^{3\cdot r}(-2\cdot r^3-f(x))\,dx \triangleright 2\cdot r^4$ diese Flächenbilanz hat die Größe einer Zelle. Das oben grau gezeichnete Stück ist immer $\frac{\frac{9\cdot r^4}{4}}{2\cdot r^4} \triangleright \frac{9}{8}$ ⚠ einer Zelle. Das gelbe ist $\int_{n2}^{3\cdot r}(-2\cdot r^3-f(x))\,dx \triangleright \frac{-r^4}{4}$, also eine Achtelzelle.

2.2

Tangenten durch die Nulllinienstellen

$n \triangleright \{-(\sqrt{3}-1)\cdot r,(\sqrt{3}+1)\cdot r,r\}$ $f(n) \triangleright \{-2\cdot r^3,-2\cdot r^3,-2\cdot r^3\}$ links $n1:=n[1] \triangleright -(\sqrt{3}-1)\cdot r$

$tan1(x):=tangentLine(f(x),x,n1) \triangleright \mathit{Fertig}$ $tan1(x) \triangleright 2\cdot(3\cdot\sqrt{3}-4)\cdot r^3+6\cdot r^2\cdot x$

Steigung $6\ r^2$

Geraden durch die linke bzw. rechte Kastenmitte und den Punkt zu legen, an dem die Wendetangete den Doppelkasten verlässt.

$kam1(x):=\frac{4\cdot r^3}{\frac{-r}{3}-r}\cdot(x+r)-2\cdot r^3 \triangleright \mathit{Fertig}$ $kam1(x) \triangleright 2\cdot r^2\cdot(2\cdot r+3\cdot x)$ ⚠

Hat auch die Steigung $6\cdot r^2$ Damit ist auch diese Eigenschaft nachgewiesen.

Ein Steckfaktor a vor f(x) ändert an den Schnittstellen, Extremstellen und Wendestellen nichts. Die Zellenhöhe und alle anderen Ordinaten werden auf das a−fache gestreckt. Das ändert aber nichts an den Flächenverhältnissen. Alle Erkenntnisse gelten auch für verschobene Polynome 3. Grades, entsprechtend auch für gescherte.

2.3

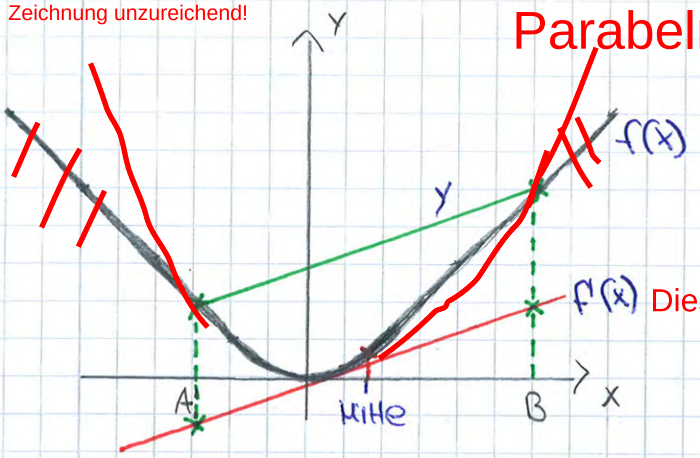
Zeichnung unzureichend!

Parabeln im Bärenkasten

25.05.09

Polynom 3. Grades ⇒ Affen-Kästen

Parabeln ⇒ Bärenkasten



Diese rote Gerade muss Tangente sein!

$f(x) = \frac{1}{4}x^2$ $\qquad y = \frac{1}{2}x + 2$ gegebene Gerade

$f'(x) = \frac{1}{2}x \iff y' = \frac{1}{2}$ gleichsetzen

$\frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{2}x + 2 \Rightarrow x_1 = -2 \wedge x_2 = 4$

$x_M = \frac{-2+4}{2} = 1$

$y' = f'(x)$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}x \quad | : \frac{1}{2}$

$1 = x$

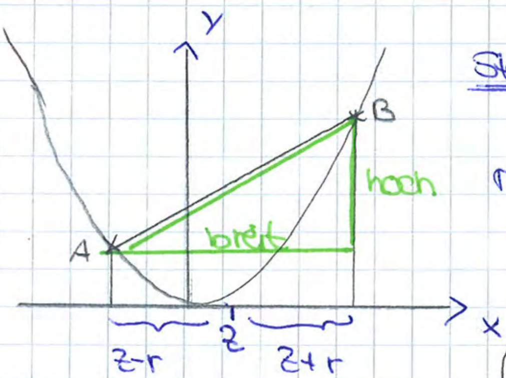
(q.e.d.)

Geometrischer Beweis:

$f(x) = y = x^2$

$f'(x) = y' = 2x$

$f(z) = 2z$



Steigung AB

$m = \frac{\text{hoch}}{\text{breit}} = \frac{4zr}{2r}$

$= 2z$

$\text{hoch} = (z+r)^2 - (z-r)^2$

$= 2zr + 2zr$

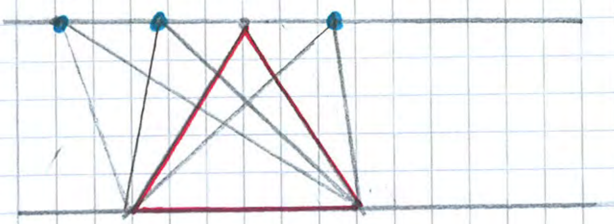
$= 4zr$

09.06.09

Parabel - Bärenkasten

Scherung

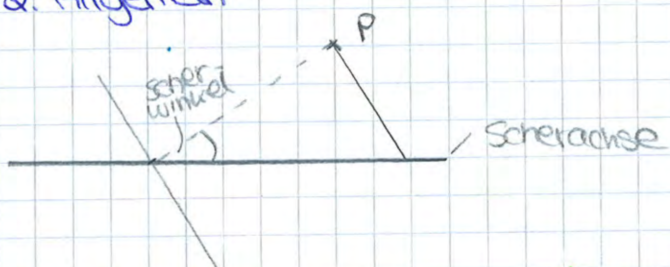
1) vertraut



sie sind Flächentreu, bei Scherung bleiben Flächen erhalten

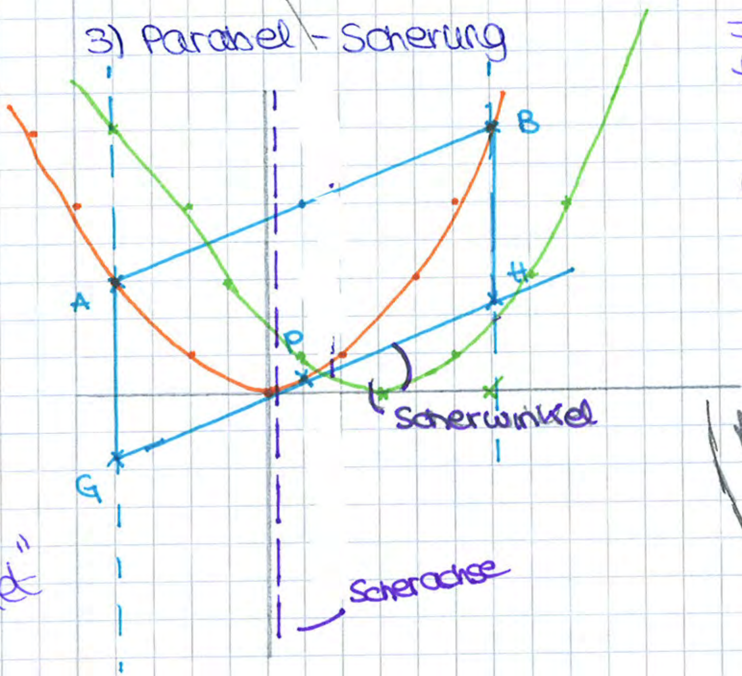
Klausur !

2. Allgemein



Scherung definiert durch Scherwinkel und -achse beide können beliebig gewählt werden

3) Parabel - Scherung



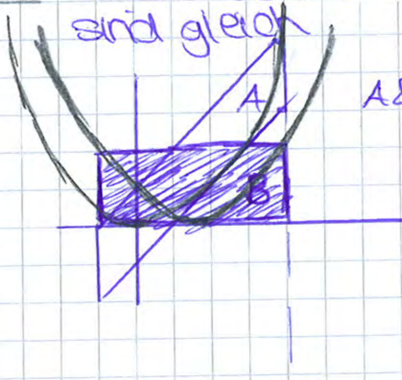
„Internet"

Flächen- und Teilverhältnistreu

Nullstelle der Tangente bildet die Scherachse

Scherung bedeutet Addition einer Geraden

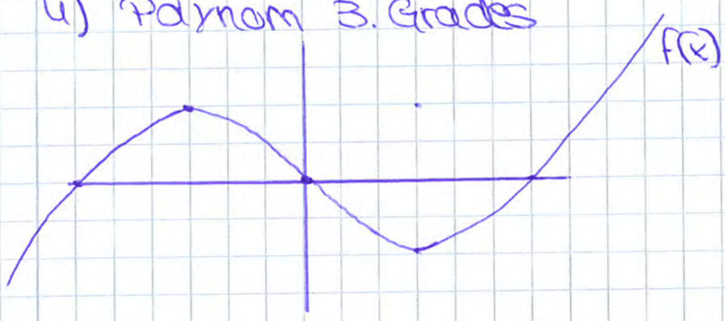
Fläche von A und B (ggb.) sind gleich



A & B Flächengleich

Geraden Affenkasten scheren ⇒ schrägen ~

4) Polynom 3. Grades



Beweis

$g(x) = f(x) + \overbrace{mx + b}^{\text{Gerade}}$

$g'(x) = f'(x) + m$

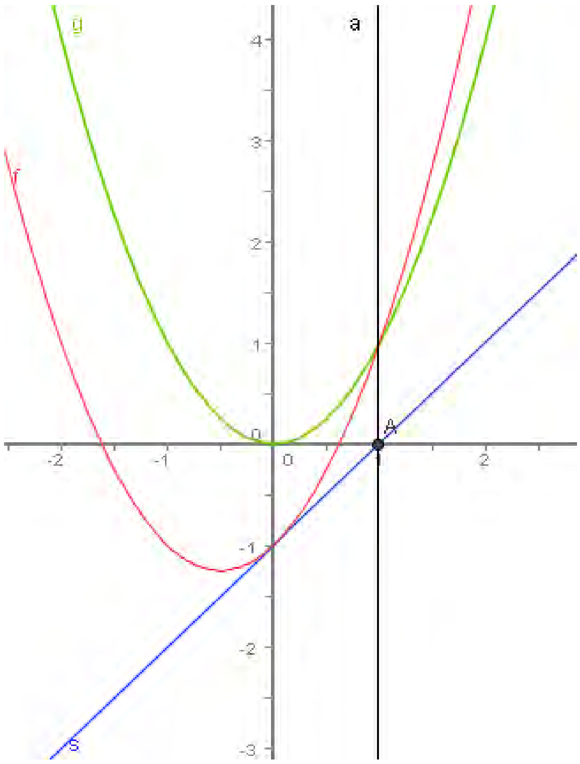
$g''(x) = f''(x)$

⇒ Scherung ist wendestellentreu

Scherung durch Geradenaddition mit GeoGebra

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Uni Lüneburg, 24. September 2004

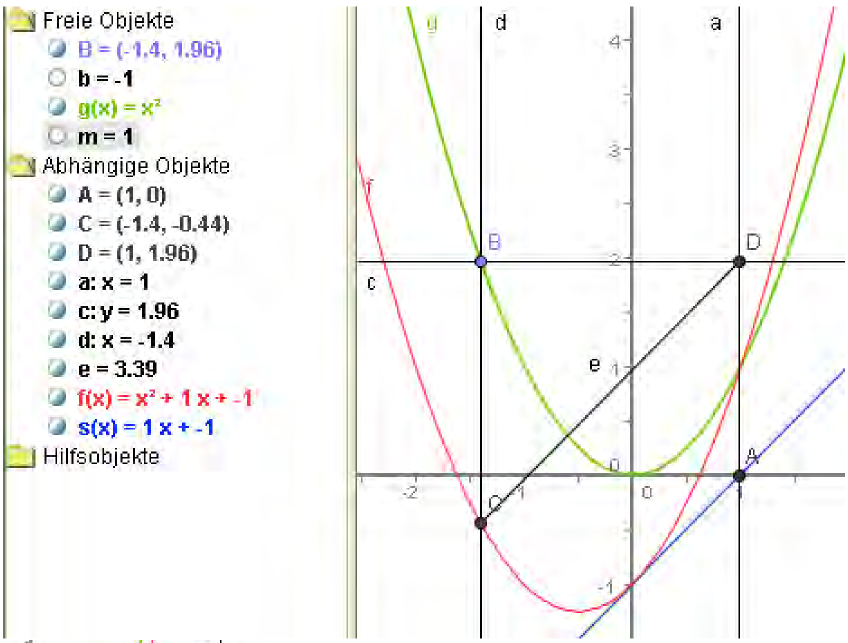
Definiere in GeoGebra eine Funktion mit $g(x)$, eine Gerade $s(x) = m\ x + b$ oder $s(x) = m(\ x - a)$ mit Parametern und die Addition $f(x) = g(x) + s(x)$.



Behauptung:
Durch die Addition der Geraden s wird g nach f geschert. Scherachse a ist die Senkrechte in der Nullstelle a von s. Scherwinkel ist der Steigungswinkel der Geraden.

Definition: Bei der Scherung an einer Geraden a wandern alle Punkte parallel zu so, dass sie Ihr Lot um den festen Scherwinkel kippen.

Verdeutlichung:
Setze auf g einen Punkt B. Fälle das Lot auf und a und auf die x-Achse. Es entstehen als Schnittpunkte mit a b.z.w. mit f die Punkte D und C. Bewege B und beachte, dass CD stets parallel zu $D = (a, g(x))$ s ist.



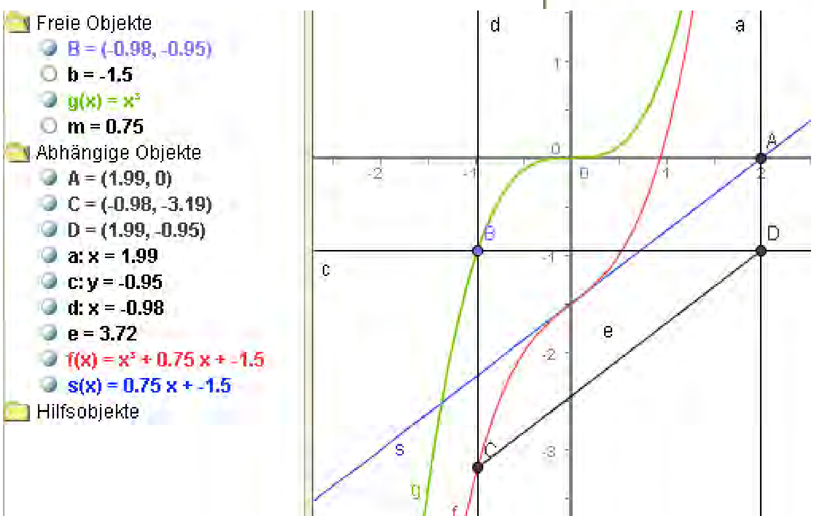
Beweis:

$D = (a, g(x)) \qquad C = (x, g(x) + s(x))$

Steigung(CD)= $= \dfrac{g(x) + s(x) - g(x)}{x - a} =$

$= \dfrac{s(x)}{x - a} = \dfrac{m(x - a)}{x - a} = m$

Damit ist die Behauptung für alle x ungleich a gezeigt. Für x=a schneiden sich f und g. ,da s(a)=0 gilt.
Bei der Verwirklichung mit GeoGebra ist dieser Zusammenhang eindrucksvoll durch ziehen an A und



Parametervariation demonstrierbar. Man kann zudem einfach bei g eine andere Funktion eintragen.
Scherungen sind teilverhältnistreu, flächentreu und wendepunkttreu. Daher gelten die bewiesenen Eigenschaften für gerade Kästen ebenso wie für schräge..
Alle Beweise sind in meinen Vorträgen angedeutet und in meinem Heft “Polynome im Affenkasten” ausgeführt. Dort zeigt sich auch dass alles ebenso für Polynome 3. Grades ohne Extrema gilt.

www.doerte-haftendorn.de

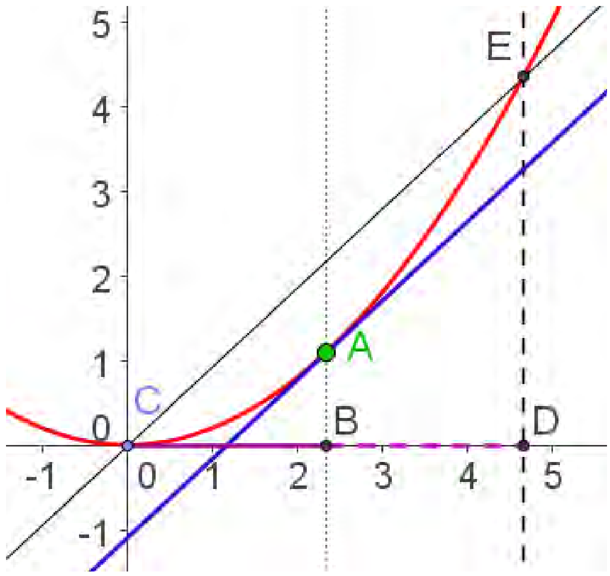
Solche Seiten sind in der Vorlesung meist nur interaktiv gezeigt.

Scherung-geogebra-funktionen.pdf

Konstruktion einer Parabeltangente zu einem Parabelpunkt

Konstruktionsbeschreibung

1. Gegeben ist eine Parabel und ein Punkt A auf ihr.
2. B ist der Fußpunktes des Lotes von A ausf die x-Achse.
3. C ist der Ursprung und D ist der Spiegelpunkt von C an B.
4. Erzeuge E als Parabelpunkt an der Stelle von D.
5. Zeichne die Sehne CE und eine Parallele zu ihr durch A. Diese ist die gesuchte **Tangente.**



Beweise:
Je nach dem eingesetztem Vorwissen kann es verschiedene Beweise geben.

1) Elementare Bestätigung (kein Beweis im strengen Sinn): Erzeuge in GeoGebra oder einem anderen passenden Werkzeug die Tangente in A in der "Schnell-Version", tangente[A,f] heißt der Befehl in GeoGebra. Siehe dir an, dass in jeder Stellung von A die auf obige Art konstruierte Tangente mit der vom Werkzeug erzeugten Tangente übereinstimmt. Wenn du auch noch die Parabelöffnung variierst, kannst du ziemlich sicher sein, dass du wirklich die Tangente konstruiert hast. Für einen echten Beweis brauchst du mehr mathematisches Handwerkszeug, das du später lernst.

2) Beweis mit Methoden der **Analysis.**

$f(x) = y = a x^2 \qquad A=(x,y)$

$f'(x) = 2ax$

$f(2x) = a(2x)^2 = 4ax^2 \qquad E=(2x, 4ax^2)$

$\text{Steigung } CE = \frac{\text{hoch}}{\text{breit}} = \frac{4ax^2}{2x} = \underline{\underline{2ax = f'(x)}}$

3) Beweis mit Methoden der **Algebra**

$f(x) = y = ax^2 \qquad A=(x_0,y_0)$

$f(2x_0) = a(2x_0)^2 = 4ax_0^2 \qquad E(2x / 4ax_0^2)$

$\text{Steigung } CE = \frac{\text{hoch}}{\text{breit}} = \frac{4ax_0^2}{2x_0} = 2ax_0$

Parallele zu CE durch A $\quad y = 2ax_0(x-x_0)+y_0$

Schnitt der Parallelen mit der Parabel

$ax^2 = 2ax_0x - 2ax_0^2 + ax_0^2$

$ax^2 - 2ax_0x + ax_0^2 = 0$

$x^2 - 2x_0x + x_0^2 = 0$

$(x-x_0)^2 = 0$

doppelte Schnittstelle x_0

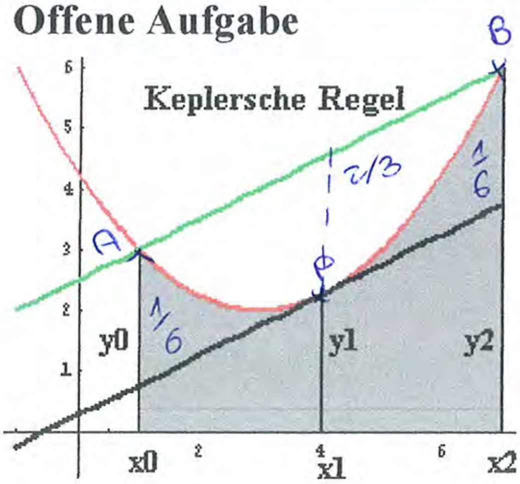
also Berührung

4) Beweis aus den Eigenschaften des "**Bärenkastens**" ist trivial, wenn man diesen kennt. Siehe www.mathematik-verstehen.de Bereich Analysis, Polynome im Affenkasten (Haftendorn)

5) Beweis durch **Scherung**: Schert man die Parabel an der y-Achse mit dem Steigungswinkel der Geraden CE, also so dass E auf die x-Achse fällt, dann bleibt die Parabel eine Parabel und A wird ihr Scheitel. Dann wird die konstruierte Parallele die Scheiteltangente und daher musste sie auch schon vorher Tangente sein. (Die Scherung ist eine einendeutige Abbildung.)

6.) Beweis durch Betrachtung der **Parabelkonstruktion** mit der Leitgeraden. Dazu mehr auf obiger Website unter algebraische Kurven, Kegelschnitte, Parabeln.

Offene Aufgabe



Sie kennen von einer Parabel drei Stützpunkte $P_o(x_o,y_o)$, $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, wobei x_1 genau der Mittelwert von x_o und x_2 ist. Können sie, ohne die Parabel selbst zu bestimmen, das Integral über die Parabel im Intervall $[x_0,x_2]$ bestimmen?
Gesucht ist ein Term mit den x_i und y_i.

Konkrete Stützpunkte
$P_o(1/3)$, $P_1(4/2\frac{1}{4})$, $P_2(7/6)$

Was nützt ihnen Ihr Berechnungsterm, wenn Sie von einer beliebigen Kurve drei Stützpunke kennen und das entsprechene Integral berechnen wollen?

```
TrapezGroß = (y0 + y2)/2 (x2 - x0)
TrapezKlein = y1 (x2 - x0)
Parallelogramm = TrapezGroß - TrapezKlein
Integral = TrapezKlein + 1/3 Parallelogramm
```

$\frac{1}{2}(x2-x0)(y0+y2)$

$(x2-x0)\,y1$

$\frac{1}{2}(x2-x0)(y0+y2)-(x2-x0)\,y1$

$(x2-x0)\,y1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}(x2-x0)(y0+y2)-(x2-x0)\,y1\right)$

```
Integral // Expand // Factor
```

$-\frac{1}{6}(x0-x2)(y0+4y1+y2)$

Lösung: *Kern dieses Beweises ist die Drittelung, die jede Parabel im Sehnen-Tangenten-Kasten vornimmt.*

Johannes Kepler (Mathematiker, Astronom) fand schon Anfang des 17. Jahrhunderts die folgende Formel (heutige Schreibweise):

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx \frac{x_2 - x_0}{6}\,(y_0 + 4y_1 + y_2)}$$

oder

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)}$$

Sie berechnet bestimmte Integrale für Parabeln (u.a.) exakt, für andere Funktionen ist die Näherung umso besser, je mehr der Funktionsgraph im betrachteten Bereich von einem Parabelbogen angenähert werden kann.

Die Keplersche Regel wird oft auch **Keplersche Fassregel** genannt. Sie berechnet aber Flächen und nicht Volumina.

Durch mehrfache Anwendung der Keplerschen Regel mit einer geraden Anzahl n gleich breiter Streifen der Breite h erhält man die Simpson-Regel:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\,(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + 4y_{n-1} + y_n) \text{ mit } h = \frac{b-a}{n}$$

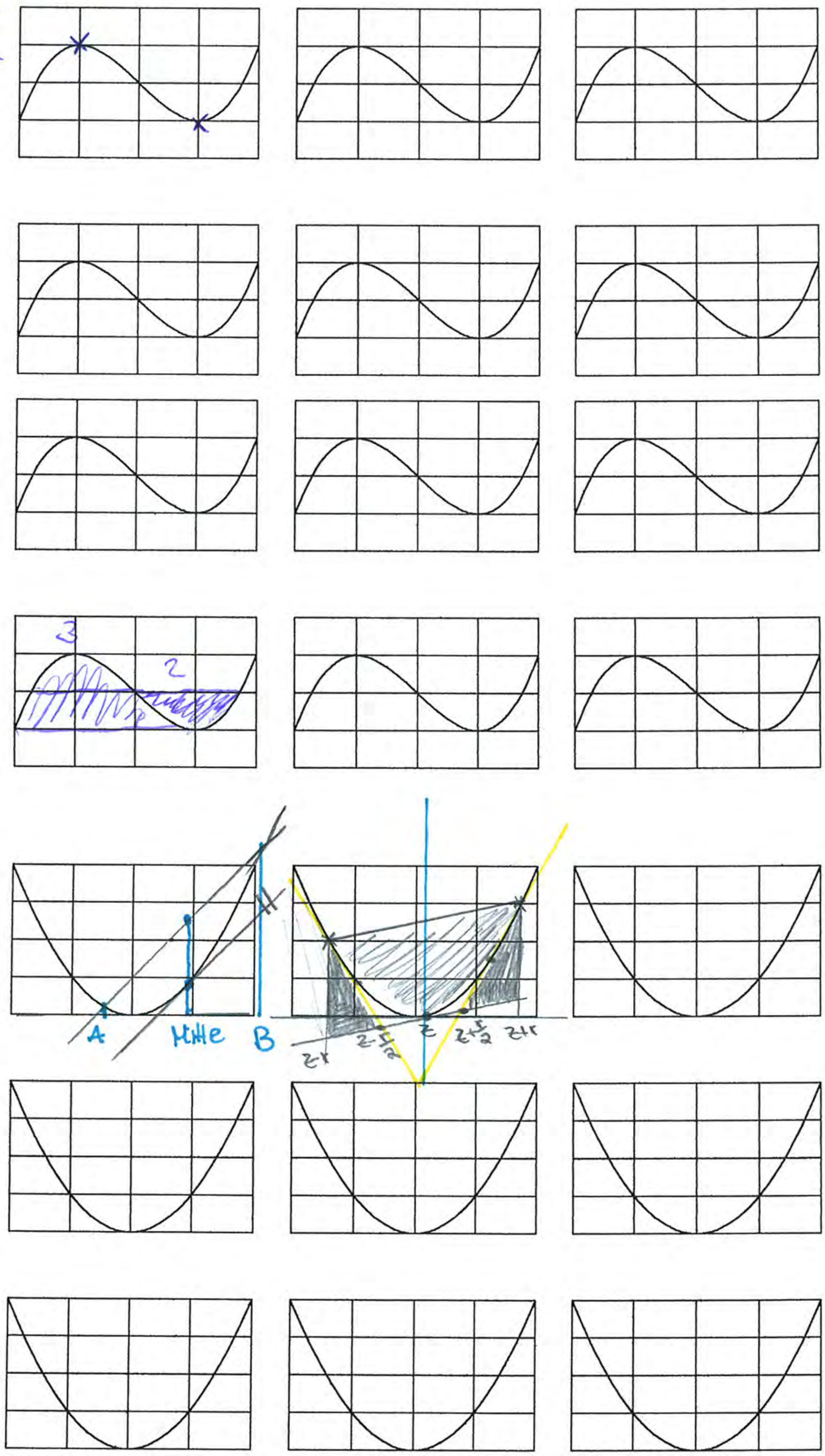
Seiten parallel

Kasten entsteht durch Parabelsehne → definiert ein Parabelsegment
→ es gibt eine gegenüberliegende Seite und 2-Achsenparallele auf die Tangente. Auf Tangente liegt ein Berührpkt der die Sehne $\overline{AB}$ halbiert.

Experimentierfeld, in dem man Flähenverhältnisse erkunden kann

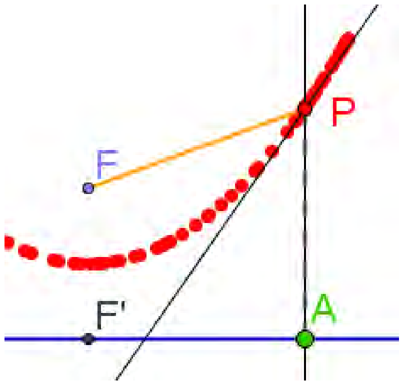
experimentierfeld.pdf

der Affenkasten kommt durch die Tangenten im Extremum zustande



Affen1,Mon Sep 25 1995,2 Mathematica Student Version

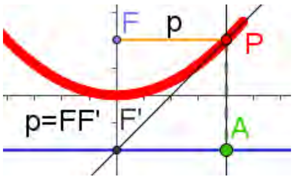
Parabel Definition mit der Leitgeraden

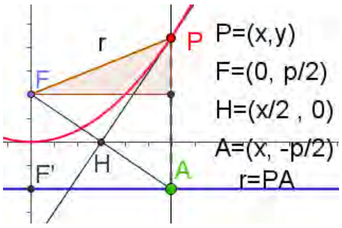


Konstruktionsbeschreibung

1. Gegeben ist eine "Leitgerade", hier waagerecht, und ein Punkt F außerhalb.
2. A ist ein beliebiger Punkt auf der Leitgeraden.
3. a ist die Mittelsenkrechte von FA.
4. a schneidet die Senkrechte in a auf die Leitgerade in P_A.
5. Die Parabel ist der geometrische Ort von, wenn sich A auf der Leitgeraden bewegt. (Ebenso ist hier noch P_B erzeugt.)

Die Parabel ist der geometrische Ort aller Punkte, die von einem festen Punkt F und der Leitgeraden dieselbe Entfernung haben.



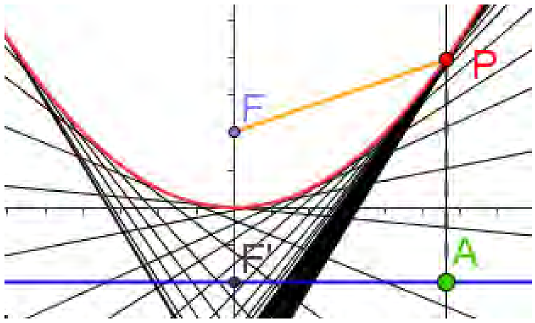


$$r^2 = x^2 + (y - \tfrac{p}{2})^2 \wedge r = y + \tfrac{p}{2}$$
$$(y + \tfrac{p}{2})^2 = x^2 + (y - \tfrac{p}{2})^2$$
$$2py = x^2 \iff y = \tfrac{1}{2p} x^2$$

Dass F die Ordinate p/2 hat, ist eine übliche Setzung. Aus dem Strahlensatz folgt dann, dass A die Ordinate –p/2 hat und H die halbe Abszisse von A. Damit ist die **Gleichung der Parabel** in der erwarteten Form hergeleitet.

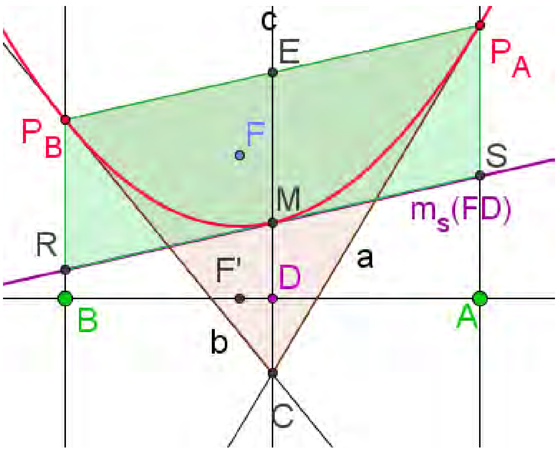
Gleichzeitig ist bewiesen, dass die Tangente die Steigung $y' = \frac{x^2}{2p} : \frac{x}{2} = \frac{x}{p}$ hat.

Verfolgt man die Spur von a, so sieht man:
Die Parabel ist die Hüllkurve aller Mittelsenkrechten a.



Führt man die Konstruktion noch für einen weiteren Leitgeradenpunkt B aus (sihe unten), so lassen sich noch andere wichtige Parabeleigenschaften herleiten: Das Dreieck AFB hat die beiden Tangenten als Mittelsenkrechten. Es hat noch eine weitere Mittelsenkrechte, nämlich die Senkrechte c durch C auf die Leitgerade. Sie verläuft durch die Mitte D von AB.
Damit gilt:

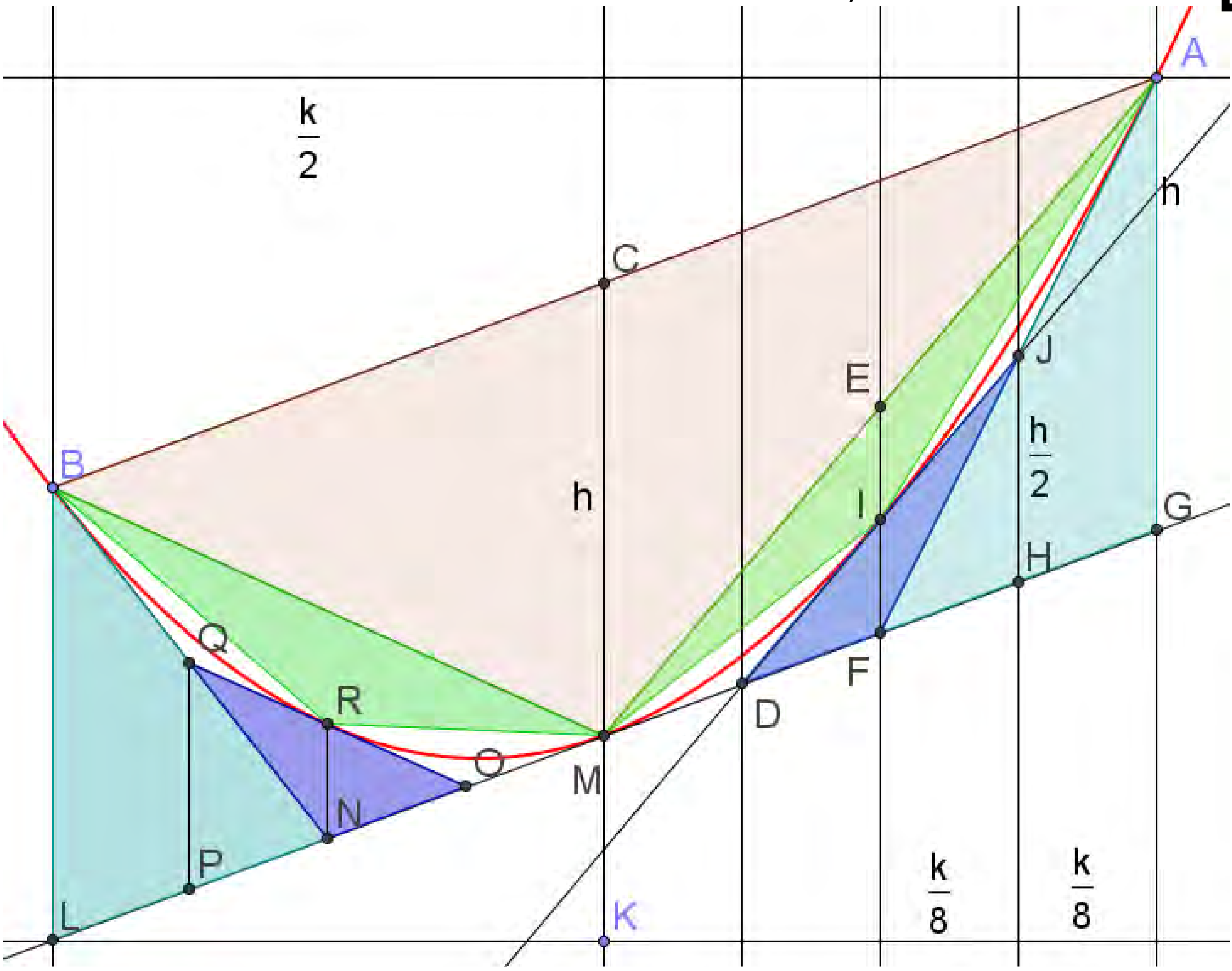
Zwei verschiedene Tangenten schneiden sich immer an der "Mittelstelle" zwischen den Berührstellen.



Die Mittelsenkrechte von FD schneidet c in M, M ist wegen FM=MD Parabelpunkt und m_s(FD) ist Parabeltangente. Betrachten wir das Trapez RSP_AP_B .SP_A und MC sind gleichlang, denn die beiden Tagenten schneiden sich in der Mitte (s.o.) Ebenso sind MC und RP_B gleichlang. Und das Trapenz mit diesen beiden gesichert parallelen Seiten ist dann ein Parallelogramm, bei dem auch die beiden anderen Seiten parallel sind, d.h. die Sehne P_AP_B ist parallel zur Tangente m_s(FD). Damit ist der **Bärenkasten**, d.h. RSP_AP_B elementargeometrisch nachgewiesen.
Speziell ist auch gezeigt, dass sie beiden Randtangenten die untere Kastenstrecke vierteln.

parabel-leit-tangente.pdf

Parabel und Dreiecke nach Archimedes, Beweis



Es wurde für alle Parabeln schon gezeigt: Wenn C die Mitte der Sehne AB ist, dann ist die Tangente in M parallel zur Sehne. So entsteht das Parallelogramm ABLG. Es hat den Flächeninhalt kh. Die Worte "Flächeninhalt" und "Strecke" werden im Folgenden weggelassen.
Damit gilt Dreieck ABM=kh/2. Dieses ist das Bezugsdreieck von Archmedes.
Er schöpft die konvexe Parabelfläche von innen aus durch wiederholtes Ansetzen grüner Dreiecke und grenzt sie von außen ein durch die blauen Dreiecke.
Genauer: P,N,O,M,D,F,H achteln LG. Nach dem Strahlensatz ist damit HJ=PQ=FE=h/2 und FI=IE=NP=h/4. Damit gilt Dreieck EIA=EIM und MIA=2*1/2*h/4*k/4=kh/16 =MBR, also sind die grünen Dreiecke zusammen kh/8 und damit ¼ so groß wie das Ausgangsdreieck ABM.
Es ergibt sich also eine geometrische Folge von Dreiecksflächen mit dem Faktor ¼ .

In moderner Schreibart heiß das: $Par \geq \frac{1}{2}kh \cdot \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n} = \frac{1}{2}kh \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}kh \cdot \frac{4}{3}$.

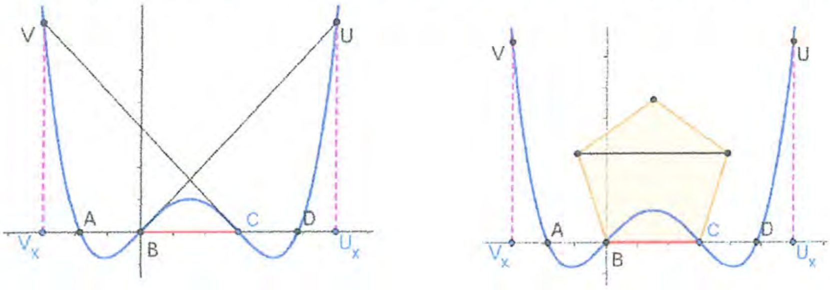
Als Eingrenzung von außen ergibt sich: FGA=1/2*k/4*h=kh/8=NLB. Der nächste Schritt liefert DFJ=FID+FIJ=2*1/2*h/4*k/8=kh/32 und das ist wieder ¼ des vorigen Dreiecks. Es ergibt sich also auch hier eine geometrische Folge von Dreiecksflächen mit dem Faktor ¼ . In moderner Schreibart heiß das: $Par \leq kh - 2\cdot\left(\frac{1}{8}kh \cdot \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}\right) = kh - \frac{1}{4}kh \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = kh - \frac{1}{4}kh \cdot \frac{4}{3} = kh \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}kh \cdot \frac{4}{3}$.

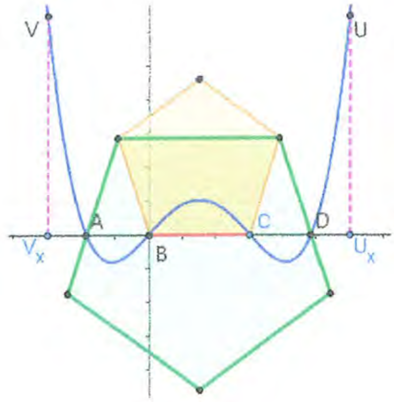
Vier Drittel des einbeschriebenen Dreiecks ergeben die Parabelfläche. In dem Parallelogramm nimmt die Parabelfläche zwei Drittel ein.

Archimedes hat die Grenzwerte natürlich nicht auf die moderne Art ausgerechnet. Er sah die Parabelfläche als "innere Dreicke plus ein Sandkorn" und als "von äußeren Dreiecken übrig gelassene Fläche minus ein Sandkorn".

nur 2009, kurz

Polynome 4. Grades und der goldene Schnitt





Gegeben ist ein beliebiges Polynom 4. Grades, das zwei Wendepunkte hat. O.B.d.A. hat es die **Gleichung**

$\boxed{f(x)=t(x^4-2wx^3+bx)}$

Beweis: $f''(x)=ax(x-w)$ O.B.d.A. liegt ein Wendepunkt in O, der andere an der Stelle w.

Also $f'(x)=a(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}w\,x^2+c)$, O.B.d.A. verlauf f durch O. $\Rightarrow f(x)=a(\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{6}w\,x^3+c\,x)$

Mit $t=a\cdot\frac{1}{12}$ // $b=12c$ folgt die Behauptung. q.e.d.

Satz: Die Wahl $b=w^3$ führt zu dem obigen symmetrischen Graphen.

$\boxed{g(x)=t(x^4-2wx^3+w^3x)}$ Damit entsteht f aus g durch Scherung mit (Addition von) der Geraden $y=\left(b-w^3\right)x$, Scherachse ist die y-Achse, Scherwinkel ist der Steigungswinkel dieser Geraden.

Beweis: Bei Symmetrie muss der WP C auf der x-Achse liegen: d.h.

$f(w)=0 \Leftrightarrow 0=w^4-2w\,w^3+b\,w=0 \quad \Rightarrow b=w^3$ q.e.d.

Satz: Die Wendetangenten schneiden g an den Stellen x=-w und x=2w.

Beweis: Wendetangente in O: $wt(x)=t\,w^3\,x$, Schnitt mit g

$t\,w^3\,x=t\,x^4-2t\,w\,x^3+t\,w^3\,x=0 \quad \Leftrightarrow x=0 \quad x=2w$, linke Schnittstelle wegen Symm. $x=-w$.

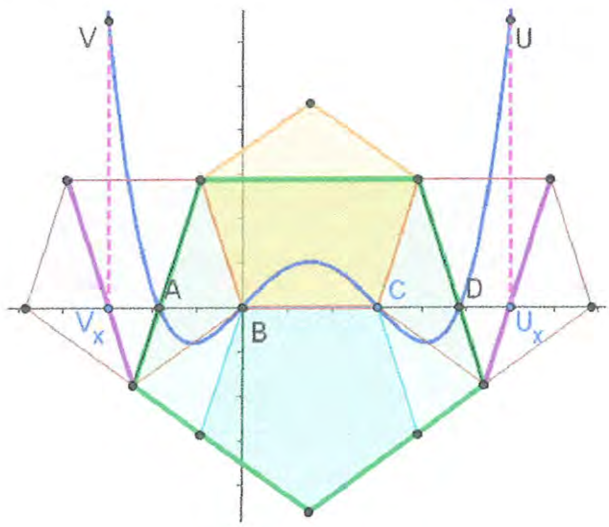
Satz: Die Nullstellen von g stehen im Goldenen Schnitt zueinander: B teilt CA im Goldenen Schnitt. C teilt BD im Goldenen Schnitt. D teilt C U_x im Goldenen Schnitt.

Beweis:
Hornerschema

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2w & 0 & w^3 \\ w & & w & -w^2 & -w^3 \\ \hline & 1 & -w & -w^2 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow x^4-w\,x \quad -w^2=0$$

$$x=-\frac{\sqrt{5}-1}{2}w \quad \vee \quad x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}w$$

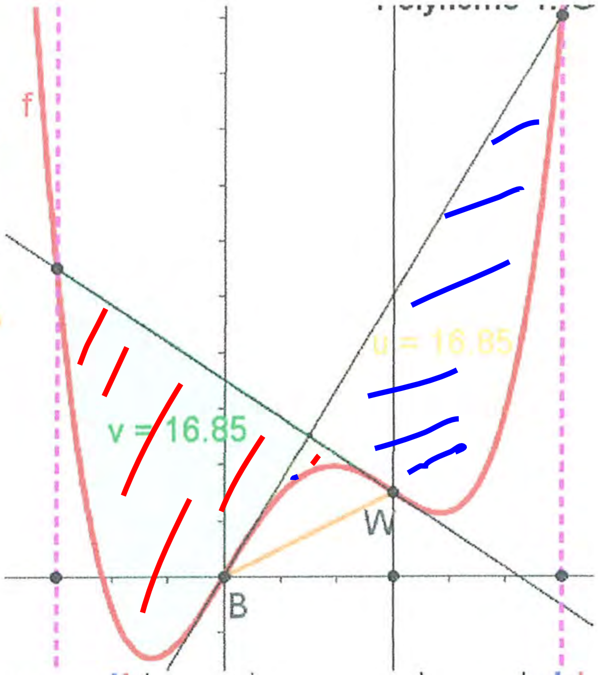


Durch die Fünkfecke werden die Goldenen Schnitt-verhältnisse visualisiert

p4-panther-goldschnitt.doc

Für alle behandelt, wichtig, siehe Bay. Abi

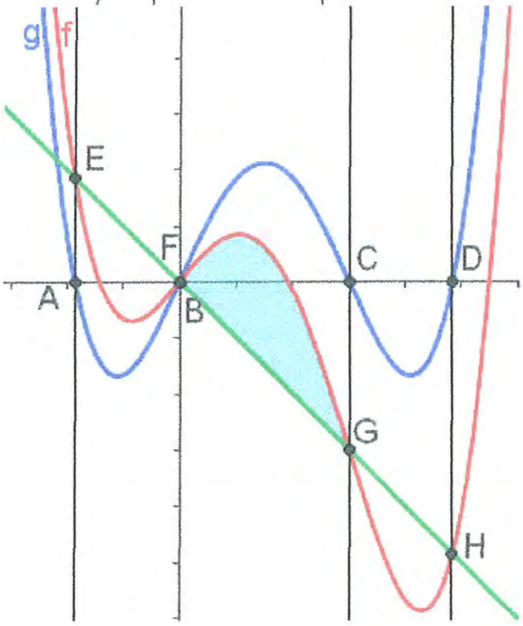
Das gleichmäßige Raster der vier Senkrechten habe ich **"Pantherkäfig"** genannt. Es geht hier um **alle Polynome 4. Grades**, die überhaupt Wendepunkte haben.



Satz: Die Flächen zwischen Wendetangente und Kurve sind links und rechts gleich groß.

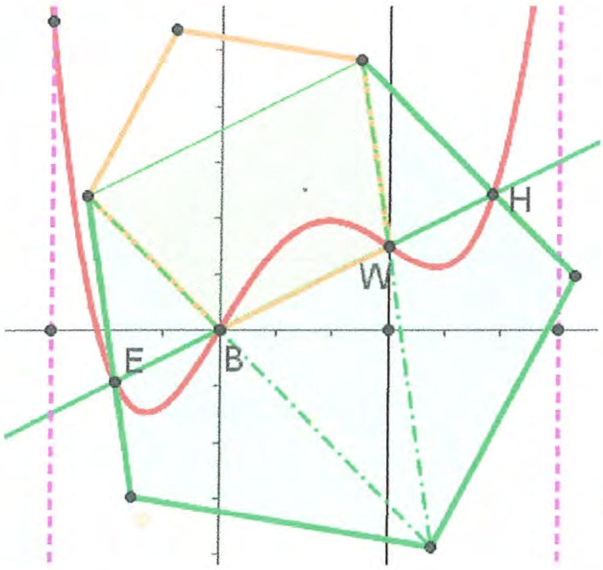
Beweis: Es handelt sich bei f um eine gescherte symmetrische Funktion g. Scherungen sind flächentreu. Da sie durch die Addition eines linearen Terms vermittelt werden, sind sie Wendepunkt erhalten.d q.e.d

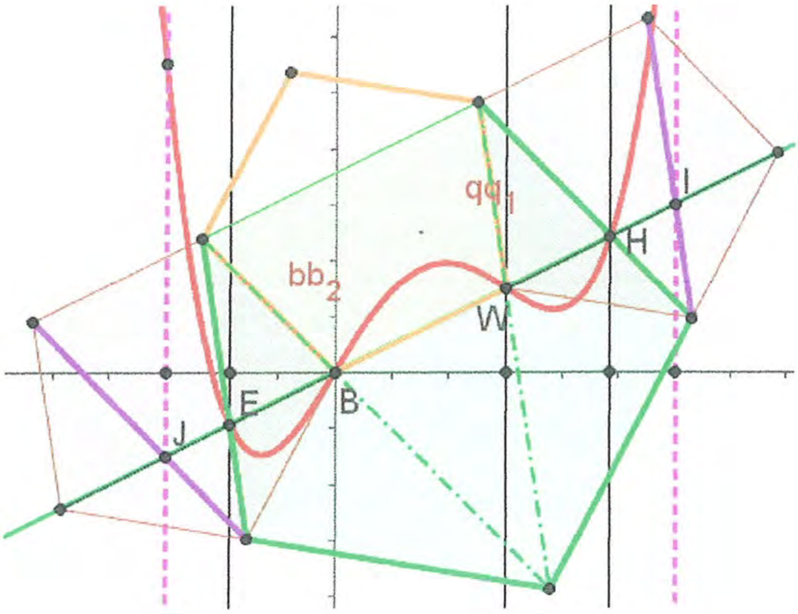
Satz: Die Gerade durch die Wendepunkte schneidet f so, dass Goldene Schnittverhältnisse entstehen:
F teilt EG im Goldnen Schnitt,
G teilt FH im Goldnen Schnitt.
Die Fünfecke visualisieren dies.



Beweis: Bei der Scherung bleiben Teilverhältnisse erhalten. Damit übeträgt sich dies aus dem geraden Fall. q.e.d

Satz: Die Gerade durch die Wendepunkte erzeugt mit f drei geschlossene Flächen stücke. Das mittlere ist so groß wie die äußeren zusammen und es ist ein Achtel von der oben durch eine Wendetangente gebildtete Fläche.
Beweis: Leicht zu berechen.





nur 2009

Dörte HAFTENDORN, Lüneburg

Polynome im Affenkasten

Polynome nicht zu hohen Grades haben die überraschende Eigenschaft, dass sie sich in Kästen oder äquidistanten Gittern einpassen. Im Zusammenhang damit gelten auch viele schöne Flächenverhältnisse. Es eröffnet sich die Möglichkeit, entdeckendes Lernen anzuregen und dabei durchaus sinnvolle Experimente mit Computeralgebrasystemen zu unterstützen. Der Scherungsgedanke führt zu eleganten Beweisen und Verallgemeinerungen, einige Grundgedanken lassen sich auch bei anderen Funktionenklassen anwenden. Ziel des Beitrags ist es zu zeigen, dass auch in mathematischem Standardstoff außerordentliche Schönheit verborgen ist, geeignet, die Freude an der Mathematik wach zu halten.

Vorbemerkungen

Wenn Lernende in der Mathematik eigenständig tätig werden sollen, ist es unerlässlich, dass sie ihre Vermutungen, Überlegungen und Entdeckungen in Worte fassen können, mit Worten kann der kreative Prozess erst eigentlich in Gang kommen. Daher habe ich die "Affenkästen", "Bärenkästen" und "Pantherkäfige" für die Polynome eingeführt. Ein wenig stand auch der mittelalterliche Gaukler Pate, der sein exotisches Tier im Käfig präsentierte. Das Bild des Käfigs passt zu dem im Folgenden vorgestellten gleichmäßigen Raster, dem sich die Polynome niederen Grades nicht entziehen können. Die starke "innere Formbindung" kennt auch der Ingenieur, der lieber zu Splines statt zum Interpolationspolynom greift.

Affenkästen der Polynome 3. Grades

Wendepunkt und Extrempunkt (falls vorhanden) definieren eine Kastenzelle. Alle Polynome 3. Grades mit Extrema haben (bis auf Achsenstreckungen) den hier mit ausgewählten Tangenten gezeigten Graphen. Offenes Arbeiten wird schon dadurch angeregt, dass kein Funktionsterm und kein Koordinatensystem vorgegeben wird[1]. Auch die Generalisierung muss nicht vorweg angeregt sein, sondern ergibt sich als sinnvolles mathematisches Tun[2].

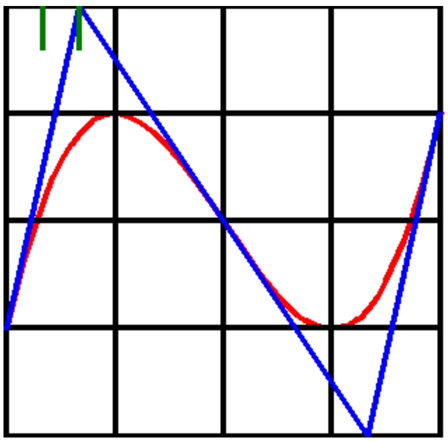


Abb. 1

[1] Selbstverständlich sollen die gezeigten Rasterpunkte exakt erreicht werden und nicht nur ungefähr. Stets vermittelt das Raster exakte Information.

[2] Insofern sollen fundamentale mathematische Arbeitsweisen angestrebt werden.

Scherung

Die Addition eines linearen Terms zu einem beliebigen Funktionsterm bewirkt eine Scherung des Graphen. Scherachse ist die Parallele zur y-Achse durch die Nullstelle der addierten Geraden. Inzidenzen, Teilverhältnisse und Flächen bleiben erhalten, aber auch Wendestellen und der Grad der Polynome.

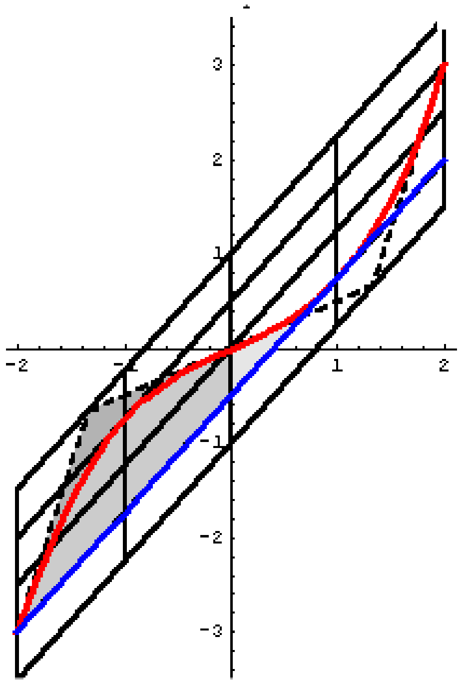


Abb. 2

Daher gelten alle am geraden Affenkasten gefundenen Eigenschaften auch an schrägen Affenkästen. Die Rolle des Extremums nimmt der Berührpunkt einer beliebigen Tangente ein. Damit gibt es nun zu jedem Polynom 3. Grades unendlich viele solcher Affenkästen.

Es zeigt sich, dass die Scherung eine zu unrecht vernachlässigte Abbildung ist. In den hier betrachteten Zusammenhängen wird sie auch bei anderen Polynomen mit großer Wirkung eingesetzt.

Es ist sehr ergiebig Flächen und Flächenverhältnisse zu betrachten. Das kann hier nicht dargestellt werden [Ha].

Bärenkästen der Parabeln

Zu jeder Sehne einer Parabel existiert an ihrer Mittenstelle[3] die zu ihr parallele Tangente. Diese Tatsache wird auch von Physikern gern verwendet und ergibt sich hier, wenn man sich die Sehne in waagerechte Lage geschert denkt. Die vier Zeilen des Kastens folgen aus $(2r)^2 = 4r^2$. Besonderheit ist, dass die Randtangente stets wie gezeigt den Rasterpunkt trifft. Das hat zur Folge, dass sich die Tangenten an der Mittenstelle auf dem Doppelkastenrand treffen. Das lässt sich sowohl durch Ableiten, als auch durch Scherung zeigen. Auch hier sind Flächenberechnungen und ihr Vergleich mit der Kastenfläche sinnvoll.

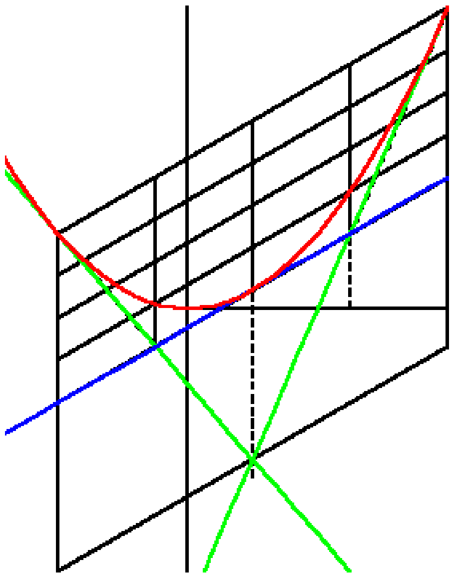


Abb. 3

[3] Das Wort “Stelle” wird konsequent für Abszissen (x-Werte) verwendet.

Archimedes hat die Fläche zwischen Parabel und Sehne durch Ausschöpfung mit Dreiecken bestimmt [Ha]. Heute ist die Integralrechnung das angemessene Werkzeug, um zu beweisen, dass die Parabel zwei Drittel des Kastens einnimmt (Abb. 4).

Aus ihm folgt durch Betrachtung passender Trapeze sofort die "Keplersche Regel"[4]

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right)$$

und damit ein direkter Bezug zu Anwendungen.

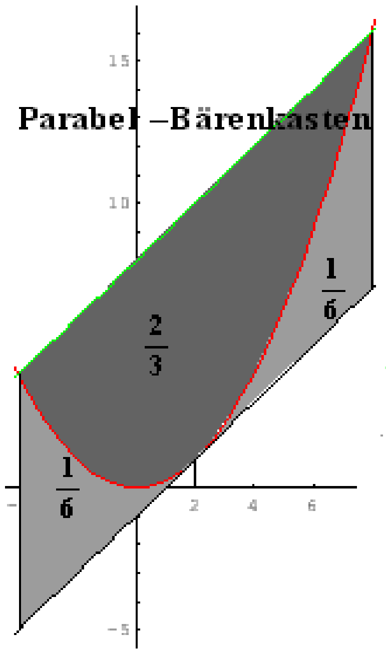


Abb. 4

Pantherkäfig der Polynome 4. Grades

Polynome 4. Grades haben entweder genau zwei Wendepunkte oder gar keinen. Die beiden Wendestellen, so vorhanden, definieren ein Gitter, auf dessen äußeren Stangen die Wendetangenten den Graphen schneiden. Die Flächen links und rechts zwischen Wendetangenten und Graphen sind gleich groß. Die Verbindung des Wendepunktes mit dem Schnittpunkt halbiert die betrachtete Fläche [Ha].

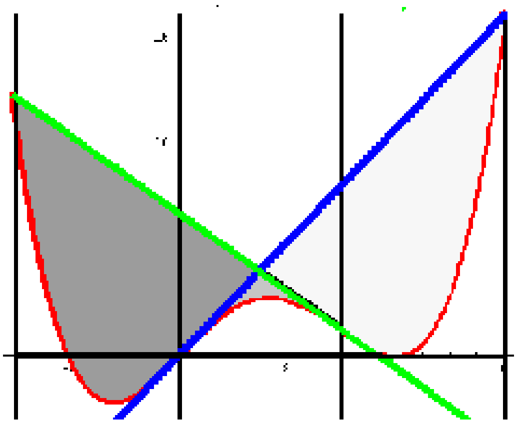


Abb. 5

Wenn bei der Funktion f mit $f(x) = a\left(\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}r\,x^3 + m\,x\right)$

der Wendestellenabstand r ganzzahlig gewählt wird, lassen sich die Schnittprobleme leicht lösen, obwohl sie vom Grad 4 sind. Dazu muss man ausnutzen, dass die Wendestelle dreifache Nullstelle der Schnittproblem-Gleichung ist. Natürlich lassen sich auch biquadratische Funktionsterme gut handhaben. Eine Quergliederung bringt hier keine "guten" Ergebnisse mehr. Die Formenvielfalt nimmt mit dem Grad der Polynome stark zu.

[4] Die Bezeichnung "Fass-Regel" sollte man vermeiden, da Lernende leicht meinen, man bestimme mit ihr ein Volumen.

[5] Der Name "Pantherkäfig" ist dem Gedicht von R. M. Rilke: "Der Panther" entlehnt.

Potenzfunktionen

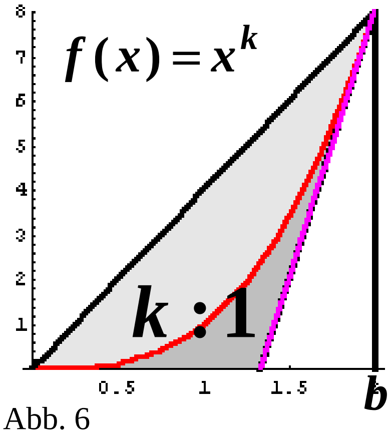


Abb. 6

Verbindet man einen beliebigen Punkt einer beliebigen Potenzfunktion mit k>1 mit dem Ursprung und längs der Tangente mit der x-Achse, so teilt der Funktionsgraph das entstehende Dreieck im Verhältnis $\boldsymbol{k : 1}$.

Beim ersten Erkunden sollte man mit b=1 die Rechnungen vereinfachen.

Varianten dieses schönen Zusammenhangs kann man durch Addition eines linearen Terms (Scherung, s.o.) oder durch Betrachtung von Wurzelfunktionen erhalten.

Eine besondere Exponentialfunktionenschar

Die durch $f_k(x) = \left(e^x - k\right)^2$

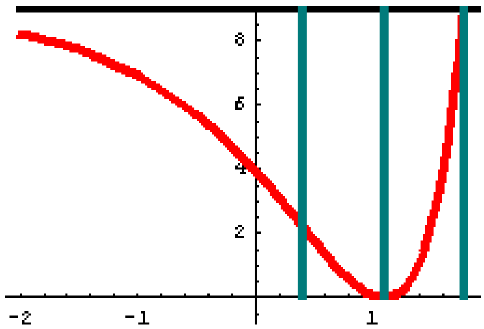


Abb. 7

definierte Schar ist einschlägig bekannt. Dennoch wird i.d.R. nicht das Augenmerk auf Zusammenhänge gerichtet.

Beachtet man, dass da eine verschobene eSFunktion quadriert wird, so sind die Berührnullstelle ln(k) und die Asymptote in der Höhe k^2 klar. Erstaunlich ist, dass die Wendestelle und die Schnittstelle mit der Asymptote von der Nullstelle stets den festen Abstand ln(2) haben (Abb. 7).

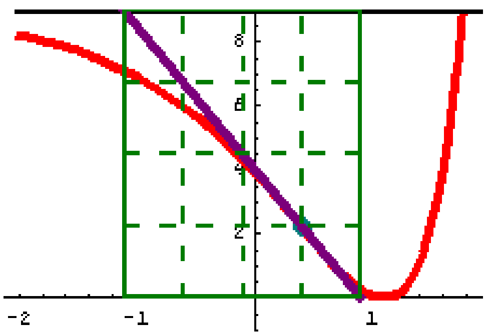


Abb. 8

Die Wendetangente bildet durch ihren Schnitt mit der x-Achse und der Asymptote einen Kasten. Dieser hat die feste Breite 2 und der Wendepunkt liegt immer auf der gezeigten Viertelstelle (Abb. 8). Die Fläche des Kastens ist $2k^2$ und damit genau gleich der links nicht begrenzten Fläche zwischen Asymptote und Graph.

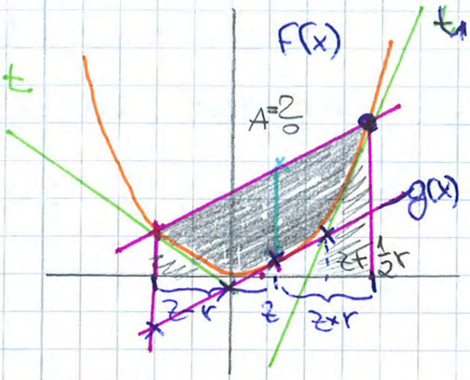
Mathematische Besonderheiten und Schönheiten lassen sich vielfältig entdecken.

Literatur und weitere Informationen

[Ha] Haftendorn: “Polynome im Affenkasten”, www.doerte-haftendorn.de

Parabel Bärenkasten

26.05.09

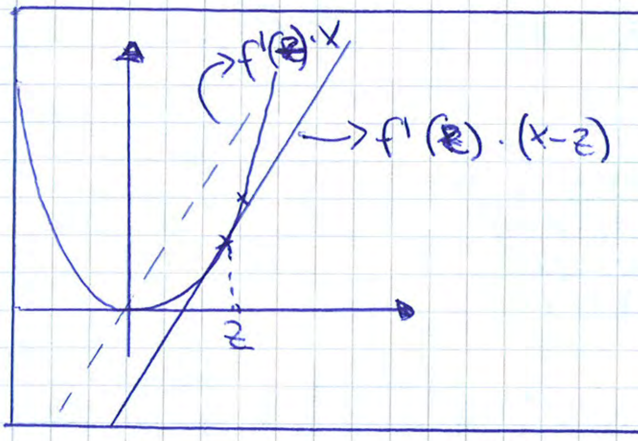


$f(x) = \frac{1}{4}x^2$

$f'(x) = \frac{1}{2}x$

Tangenten an der Stelle z

$g(x) = y = f'(z)\cdot(x-z)+f(z)$



Tangentengleichung allgemein

Hier speziell: $g(x) = \frac{1}{2}z\cdot(x-z) + \frac{1}{4}z^2$

$t_1(x) = \frac{z+r}{2}(x-(z+r)) + \frac{1}{4}(z+r)^2$

$g \cap t_1$: $\cancel{\frac{1}{2}z(x-z)} + \cancel{\frac{1}{4}z^2} = \frac{z+r}{2}(x-z-r) + \frac{1}{4}(z+r)^2$

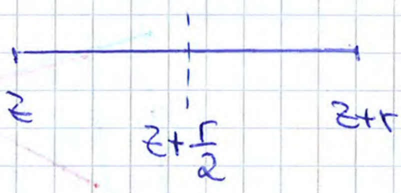
$\frac{1}{2}zx - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{4}z^2 = \frac{zx+rx}{2} - \frac{z^2+rz}{2} - \frac{z+r^2}{2} + \frac{1}{4}(z+r)^2$

Tafel: $= \cancel{\frac{z}{2}(x-z)} - \cancel{\frac{z}{2}\cdot r} + \frac{r}{2}(x-z) - \frac{r^2}{2} + \cancel{\frac{1}{4}z^2} + \cancel{\frac{1}{2}rz} + \frac{1}{4}r^2$

$0 = \frac{r}{2}(x-z) - \frac{r^2}{2} + \frac{r^2}{4}$ nach x auflösen

$\frac{r}{2}x = + \frac{rz}{2} + \frac{r^2}{4} \quad | \cdot \frac{2}{r}$

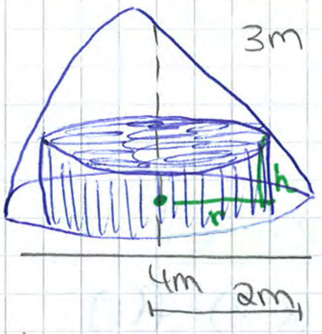
$\boxed{x = +z + \frac{r}{2}}$ q.e.d.

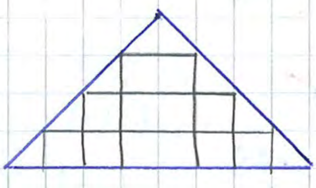


Flächen betrachten

Extremwertaufgaben

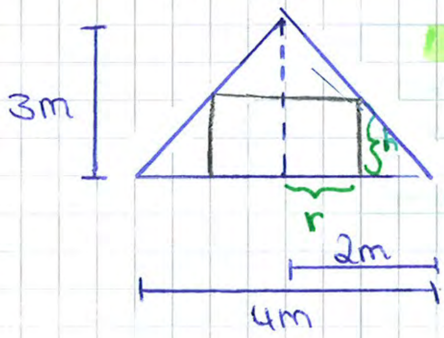
Wasser in der Mühle





gesucht ein Zylinder mit max. Volumen?

Wir betrachten den mittleren Fall:

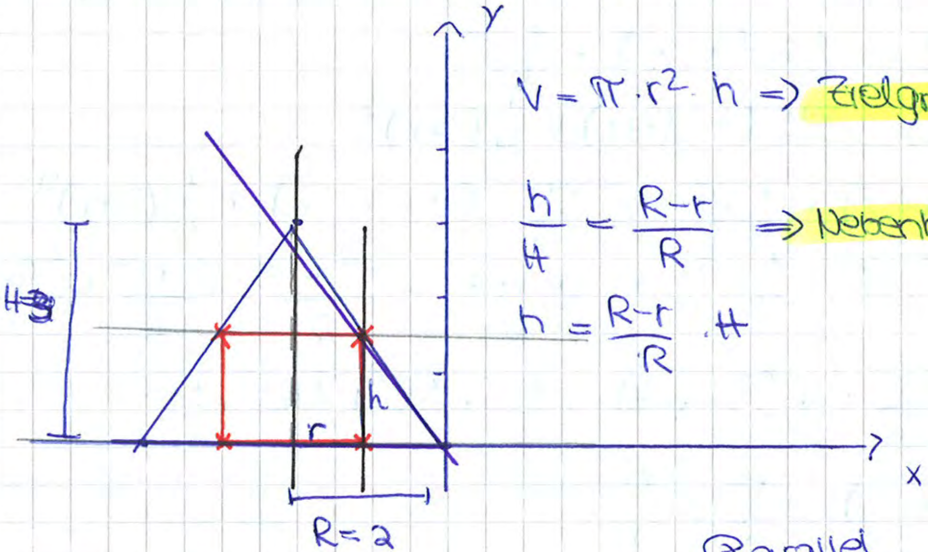


Zielgröße: $V = G \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$
Volumen

Nebenbedingung: (Einschränkung der Wahl von r und h)

(Extremwertaufgaben)

Für den ges. Zylinder: $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \pi \cdot 2^2 \cdot 3 = 12m^3$



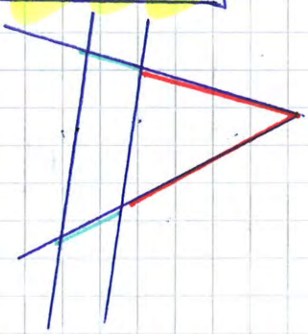
$V = \pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow$ **Zielgröße**

$\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R} \Rightarrow$ **Nebenbedingung**

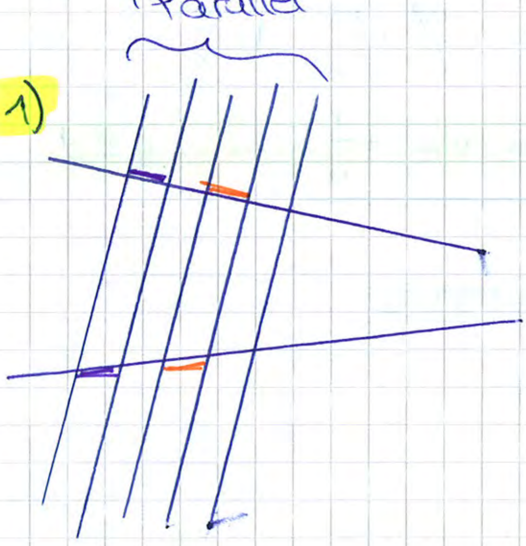
$h = \frac{R-r}{R} \cdot H$

Zielfunktion:
$V(r): \pi \cdot r^2 \cdot \frac{R-r}{R} \cdot H$

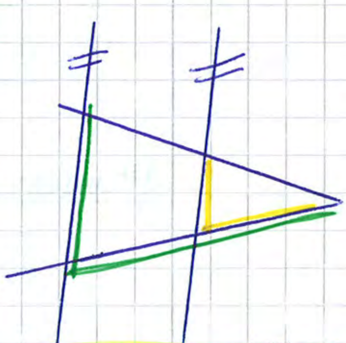
⇒ Strahlensätze:



1)



2. Strahlensatz:



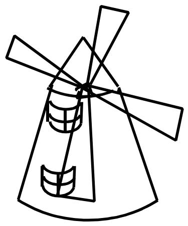
$\frac{\text{gr. P}}{\text{kl. P}} = \frac{\text{gr. A. Zentr.}}{\text{kr. ab. Zentr.}}$

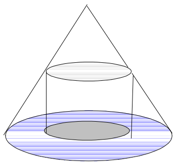
Projektionssatz ≙ 1. Strahlensatz

Damals verwirklicht in Euklid-Dynageo, heute in GeoGebra.

Euklid-Dynageo Extremwertaufgaben Mühle

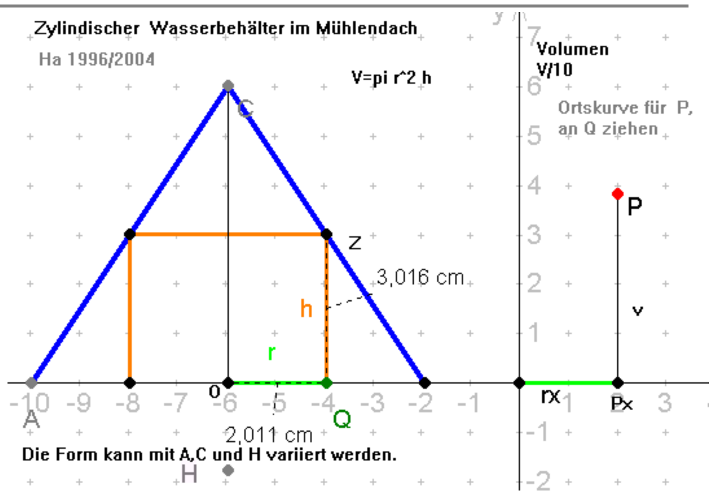
Prof. Dr. Dörte Haftendorn Uni Lüneburg Datei muehle1ko.geo Juni 96 Feb.04





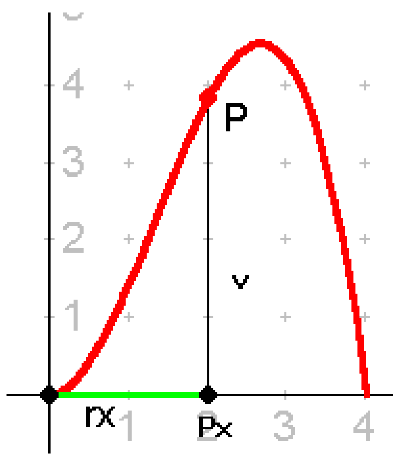
Aufgabe

Mathilde will in einer Mühle ein kleines Café eröffnen. In dem kegelförmigen Dach der Mühle soll nun ein zylindrischer Wasserbehälter mit möglichst großem Volumen aufgestellt werden.
Das Dach hat eine Höhe von 6 m und unten einen Durchmesser von 8 m.
Welche Maße muss der optimale Zylinder haben?



1.) Erkunde die Zusammenhänge der Aufgabe.
Internetexplorer: Ziehe an Q, beobachte die Bahn von P
Euklid-Dynageo: Zeichne die Ortskurve von P. (Hauptmenü, Ortskurve, P klicken, Q ziehen)
2.) Welche Grenzlagen kann der Zylinder einnehmen?
3.) Liegt die Form, die maximales Volumen liefert, in der Mitte zwischen den Grenzlagen?
4.) Von welchem Funktionstyp könnte die Volumenfunktion sein?
5.) Welche optimale Form ergibt sich aus der Zeichnung?

6.) Stelle Formeln für die Zielgröße V und die Nebenbedingungen auf.
7.) Stelle eine Formel für die Zielfunktion V(d) auf.
8.) Bestimme das Maximum rechnerisch.
9.) Wie viel Prozent des Dachvolumens können auf diese Weise für den Wasserbehälter genutzt werden. Wie viel wiegt das Wasser in dem Behälter dann?
10.) Mathilde hat sich inzwischen die Maße des besten Zylinders ausgerechnet. Die Firma, die den Behälter liefern soll, stellt in dieser Größenordnung folgende Typen her:
A(d=6m, h=2m), B(d=5m, h=2m), C(d=5,2m, h=2m) D(d=5,3m, h=1,9m)
Welchen Typ soll Mathilde bestellen?

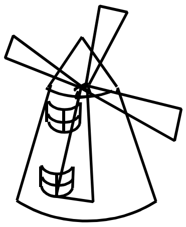


11.) Ist eine andere Form als ein Zylinder geeigneter? Berücksichtige aber, dass eine Sonderanfertigung, die sich dem Dach genau anpasst, aus Kostengründen nicht in Frage kommt. Gummiblasentanks werden bis zu einem Inhalt von 10 m^3 hergestellt. Man kann höchstens 2 Schichten Gummiblasentanks legen.
12.) Verändere auch die Abmessungen des Mühlendaches. Was ändert sich an der Lösung?

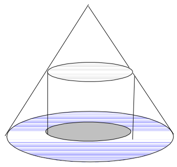
Lösungen: Zielgröße $V = \pi r^2 h$ Nebenbedingungen $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$ R=4 m, H=6 m Ergebnis r=2,67m; h=2m; V= 44,68m^3	NB auflösen nach h und in Zielgröße einsetzen ergibt die Zielfunktion $V = V(h) = \pi r^2 \frac{R-r}{R} H = \pi \frac{H}{R} r^2 (R-r)$ Polynom 3. Grades, Nullstellen 0 (dopp.) und R, Extr.bei 2/3*R Dies ist euk-muehle.wpd

TI-92 Extremwertaufgaben — Mühle

Prof. Dr. Dörte Haftendorn Uni Lüneburg Datei muehle.92a / muehletx.92t Juni 96 Okt.03



Aufgabe Mathilde will in einer Mühle ein kleines Café eröffnen. In dem kegelförmigen Dach der Mühle soll nun ein zylindrischer Wasserbehälter mit möglichst großem Volumen aufgestellt werden.



Das Dach hat eine Höhe von 2,5 m und unten einen Durchmesser von 3 m. Welche Maße muss der optimale Zylinder haben?

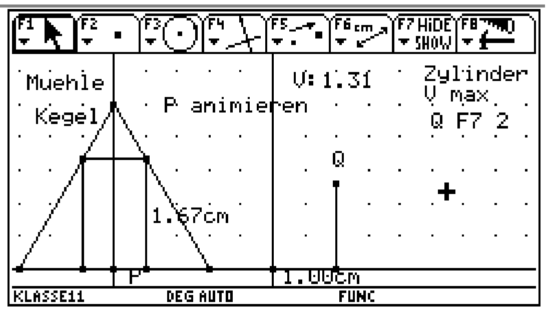
Bemerkung: Das Pünktchenraster in den rechten Bildern entspricht dem Karopapier, der Abstand bedeutet hier 0,5m. Rechts ist als Variable der Durchmesser gewählt. Die Stange unter Q gibt das Volumen wieder. Die Höhe des Zylinders ist links eingetragen.

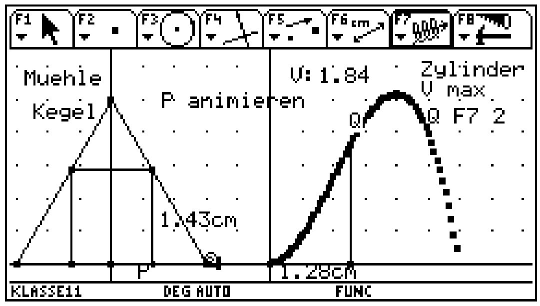
Erkunde die Zusammenhänge der Aufgabe.
Welche Grenzlagen kann der Zylinder einnehmen? Liegt die Form, die maximales Volumen liefert, in der Mitte zwischen den Grenzlagen?
Von welchem Funktionstyp könnte die Volumenfunktion sein?
Welche optimale Form ergibt sich aus der Zeichnung?

Stelle Formeln für die Zielgröße V und die Nebenbedingungen auf.
Stelle eine Formel für die Zielfunktion V(d) auf.
Bestimme das Maximum rechnerisch.
Wie viel Prozent des Dachvolumens können auf diese Weise für den Wasserbehälter genutzt werden.
Wie viel wiegt das Wasser in dem Behälter dann?

Mathilde hat sich inzwischen die Maße des besten Zylinders ausgerechnet. Die Firma, die den Behälter liefern soll, stellt in dieser Größenordnung folgende Typen her:
A(d=2m, h=0,8m), B(d=1,9m, h=1m), C(d=1,8m, h=1m) D(d=2,1m, h=0,75m)
Welchen Typ soll Mathilde bestellen?

Ist eine andere Form als ein Zylinder geeigneter? Berücksichtige aber, dass eine Sonderanfertigung, die sich dem Dach genau anpasst, aus Kostengründen nicht in Frage kommt. Gummiblasentanks werden bis zu einem Inhalt von 2 m^3 hergestellt.





:Muehle

:In das kegelfoermige Dach einer
:Muehle soll ein zylindrischer Wasser-
:behaelter mit maximalem Inhalt
:eingebaut werden.
:Fuer Q ist der Trace-Modus einzu-
:schalten, P ist zu ziehen oder zu
:animieren. Rechts wird die Volumenfkt
:ueber dem Durchmesser gezeichnet.
:Ha 5|96

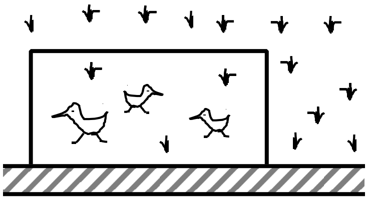
Apps 9 9 Enter 9÷muehletx Enter Enter

Die Hantierungen mit dem TI-92 werden dir auf dem Zettel **Anleitung** erklärt.
siehe unten Dies ist ticabri-mühle.wpd

Diese und die folgenden 3 Seiten sind schon seit 1996 von mir eingesetzt, auch oft in der Lehrerfortbildung. Die Screenshots sind vom ersten CAS-Handheld, den es seit 1995 gab. Aber mit dem TI Nspire kann man alles fast genauso, z.T. noch schöner machen. Zudem sollen diese Seiten zeigen, wie man sich einen entdeckenden Unterricht vorstellen kann.

TI-92 Extremwertaufgaben — Hühnerhof

Dr.Dörte Haftendorn Johanneum Datei huehner.92a / huehnert.92t 29. Juni 1996



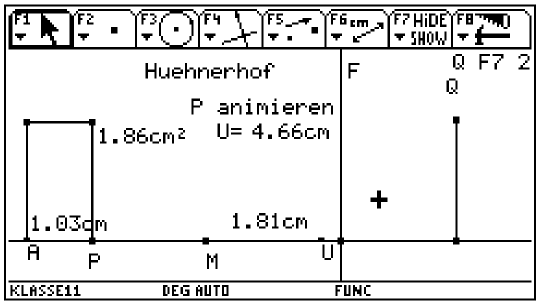
Aufgabe
Mathix hat noch 20 m Maschendraht übrig. Er möchte damit an der Scheunenwand einen möglichst großen rechteckigen Hühnerhof einzäunen.
Welche Maße soll er für Länge und Breite wählen?

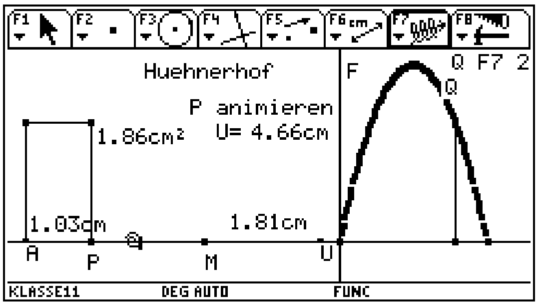
Bemerkung: In den rechten Bildern ist U=4,66 statt 20.
Lade das Programm huehner wie auf dem Zettel **Anleitung** beschrieben ist.
Schalte auch für Q den Spurmodus mit F7 2 ein.
Animiere P mit F7 3 .
Rechts ist als Variable die Höhe gewählt, die Stange unter Q gibt den Flächeninhalt wieder.
Mit der Taste F7 1:Hide/Show kannst du ansehen, wie die Zusammenhänge hier geometrisch mit Kreisen übertragen sind. Der Flächeninhalt ist aber mit F4 9 als Maß übertragen. Mit F1 ENTER wird wieder in den normalen Bildschirm umgeschaltet.

***Ausführlichere Aufgabenstellung*:**
Erkunde die Zusammenhänge der Aufgabe.
Mache dir klar, daß mit jeder Wahl der Breite AP eine bestimmte Höhe und damit auch ein bestimmter Flächeninhalt des Hühnerhofes festliegt.
Welche “unsinnigen” Hühnerhof-Formen ergeben sich als Grenzfälle? Liegt die Form, die maximale Fläche liefert, in der Mitte zwischen diesen Grenzlagen?
Von welchem Funktionstyp könnte die Flächenfunktion sein?
Welche optimale Form ergibt sich aus der Zeichnung?
Kann man jetzt schon eine sichere Aussage machen?

Stelle Formeln für die Zielgröße F und die Nebenbedingung auf.
Stelle eine Formel für die Zielfunktion F(h) auf.
Bestimme das Maximum und die optimale Form rechnerisch.
Versuche, die Aufgabe mit beliebigem U zu lösen.

Kann Mathix in der Bauernzeitung unter der Rubrik GUTE TIPS eine brauchbare Regel für solche Fälle angeben?

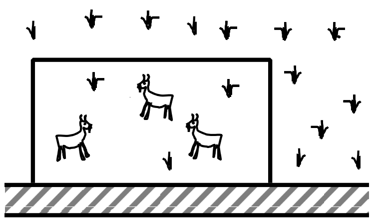




:Huehnerhof
:Aufgabe Fester Umfang U=4.66
:Man kann U variieren, fuer groessere
:U liegt aber das Extremum nicht mehr
:auf dem Bildschirm.
:Die untere Waagerechte ist die Wand,
:an die 3 Seiten eines rechteckigen
:Huehnerhofs gebaut werden sollen.
:Welche Masse hat der Hof mit maxima-
:ler Flaeche?
:Schalte fuer Q den Trace-Modus ein.
:Bei Animation von P wird rechts die
:Flaechenfkt. in Abhaengigkeit von der
:Hoehe gezeichnet. :Ha 5/96

APPS 9 9 ENTER 9÷HUEHNERT ENTER ENTER

Aufgabenvariation:
Bauer Frühauf will am Fluß 30m² einer Wiese als Weide für drei Ziegen einzäunen. Welche rechteckige Form muß die Weide haben, damit er möglichst wenig Maschendraht braucht?

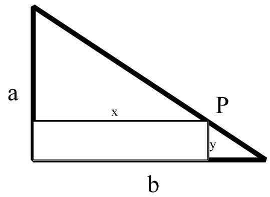


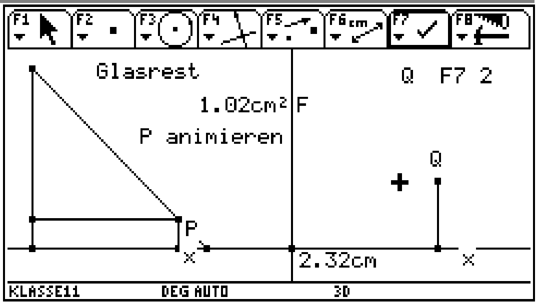
Dies ist ticabri-huehner.wpd

TI-92 Extremwertaufgaben Glasrest

Prof. Dr. Dörte Haftendorn Uni Lüneburg Datei glasrest.92a / glasretx.92t Juni 96 Okt.03

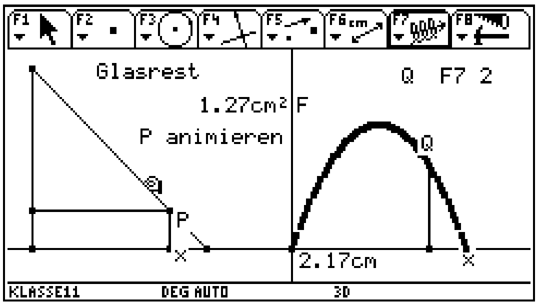
Aufgabe: Mathix will aus einem dreieckigen Glasrest eine möglichst große rechteckige Scheibe ausschneiden. Es kommt ihm auf möglichst großen Flächeninhalt an.





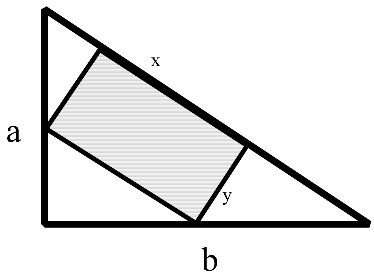
1) Mache dir klar, dass Mathix für jede Lage von P auf der schrägen Kante eine Scheibe bestimmter Form erhält, die ihren Flächeninhalt hat. Diesen Zusammenhang zeigt das Geometrieprogramm **glasrest**.

2) Wähle a=4 und b=6. Zeichne einige mögliche Scheiben, bestimme ihren Flächeninhalt und stelle ebenso den Zusammenhang graphisch dar.



3) Welche Abmessungen die optimale Scheibe haben? Beantworte dies für dein Beispiel, das Beispiel des Geometrieprogramms und möglichst allgemein.

4) Kann Mathix einen größeren Flächeninhalt erhalten, wenn er die Scheibe **anders** legt?



5) Für das Kirchenfenster, das Mathix in Arbeit hat, kann er auch halbkreisförmige Scheiben gebrauchen. Sollte er den Glasrest lieber für eine **Halbkreisscheibe** mit möglichst großem Flächeninhalt verwenden?

:Glasrest
:Aus einem dreieckigen Glasrest soll
:eine rechteckige Scheibe moeglichst
:grossen Inhalts ausgeschnitten werden.
:Fuer Q ist der Trace-Modus einzu-
:schalten, P ist zu animieren
:Dann wird rechts die Flaechenfkt.
:gezeichnet.

Dieser Text ist auf dem Ti-92 im Ordner Klasse11 APPS 9:Texteditor 9 open ENTER
Folder: Klasse11 9 glasretx (ggf. mit ÷, 9wählen) ENTER

Hilfen für den Spurmodus, zum Markieren, Ziehen und Animieren findest du auf dem Zettel **Anleitung**.

Konstruktionsbeschreibung Mit einigen zusätzlichen Bezeichnungen.

1. Erzeuge die untere Waagerechte u :
   F2 4:Line, Cursor li unt.S, ENTER ÷ ENTER
2. Erzeuge die linke Senkrechte s: F4 1:PerpendicularLine ENTER, zu A, bis THRU THIS POINT erscheint, zu u, bis PERPENDICULAR TO THIS LINE erscheint ENTER
3. Definiere die Hypothenuse AB als Strecke:
   F2 5: Segment, oben auf Senkrechte s zeigen, bis ON THIS LINE erscheint, ENTER ÷ 9 mit dem entstehenden Strich zu Waagerechten u, bis wieder ON THIS LINE erscheint, ENTER.
4. Erzeuge P auf AB: F2 2:Point on Object, zur Hypothenuse, bis ON THIS LINE erscheint,ENTER.
   Diese beiden Schritte gewährleisten, P später bei der Animation nur auf der Hypothenuse wandern kann.
5. Lote von P auf u und s: Verwende F4 1.
6. Definition des Rechtecks: F3 4:Polygon, zu P ENTER, dann zu den anderen Pkt. und zu P zurück. Jedesmal ENTER.

Fortsetzung der Konstruktionsbeschreibung:

7. Messen der Rechtecksfläche: F6 2:Area . Zu einer Polygonkante, bis THIS POLYGON erscheint, ENTER.
8. x definieren und messen: Mit F2 5 die Strecke x definieren und mit F6 1 messen.
9. Die beiden Maßzahlen besser plazieren: F1 ENTER, zur Zahl, bis THIS NUMBER erscheint, ENTER, 7 drücken und halten, mit Cursor ø ù die Zahl verschieben.
10. Auf u einen Koordinatenursprung O frei setzen mit F2 2.
11. x eintragen: F4 9 , zur Zahl bis THIS NUMBER erscheint, ENTER, zu O, ENTER. Die entstehende gestrichelte Linie auf u plazieren, ENTER.
12. Dort mit F4 1 eine Senkrechte errichten und mit F4 9 die Flächenzahl abtragen. So entsteht Punkt Q, dessen Spur die Flächenfkt. zeichnet.

Dies ist ticabri-Glasrext.wpd

muss für TI Nspire nur wenig verändert werden.

TI-92 Extremwertaufgaben Anleitung

Dr.Dörte Haftendorn, Johanneum Verzeichnis klasse11 29. Juni 1996

Aufgabe auswählen
Wähle Mode Current Folder ÷ klasse11 .
Wähle Apps 8:Geometry 2:Open ENTER
Der Ordner klasse11 ist schon gewählt.
Tippe 9 ÷, um alle vorhandenen Aufgaben zu sehen.
Wähle die richtige mit 9 ENTER , warte, bis sie angezeigt wird.

Für Q Trace-Modus einschalten
Tippe F7 2:Trace On/off ENTER
Bewege den Cursor auf Q bis THIS POINT erscheint, ENTER
Bemerkung: Trace heißt Spur, nun ist eingeschaltet, daß Q beim Bewegen eine Spur hinterläßt.
Man kann für mehrere Objekte gleichzeitig den Spurmodus einschalten.

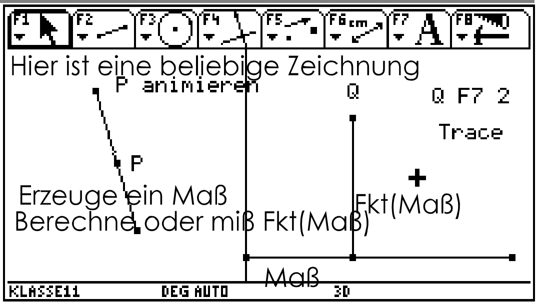
Grundsätzlich kann man nun den oft P genannten Punkt entweder ***ziehen oder animieren****. Ziehen ist etwas einfacher, animieren ist meist eindrucksvoller . Man kann auch mit dem Werkzeug* F4 8 A Locus *erst Q und dann P anwählen. Es erscheint sofort die ganze Kurve.*

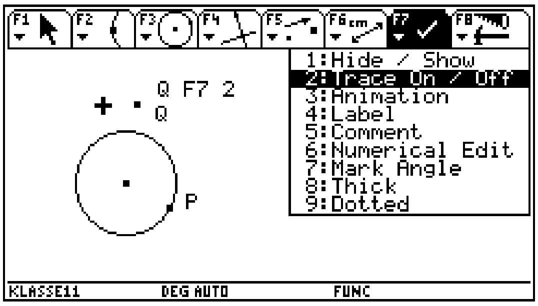
Markieren eines Objektes
F1 ENTER Damit wird der Pointer aktiviert.
Bewege den Cursor zu dem Objekt, das markiert werden soll, und zwar solange bis THIS POINT oder THIS SEGMENT *..oder was man markieren wollte.* erscheint. Dann tippe wieder ENTER.

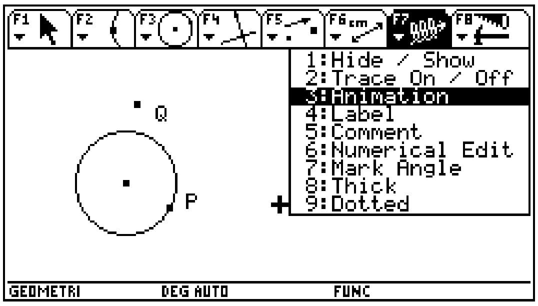
P ziehen
Markiere P. Tippe auf 7 -Taste und halte sie gedrückt, bewege den Cursor. Bei diesem Aufgabentyp wandert P entlang seiner “Wanderlinie”, das ist das Objekt, auf dem P definiert ist. Meist ist das eine Strecke oder ein Kreis. P bewegt sich, solange du 7 hältst und die Cursortasten betätigst.

P animieren
Tippe F7 3:Animation
Bewege den Cursor auf P bis THIS POINT erscheint, ENTER.
Tippe auf 7 und halte 7 gedrückt, bewege 7 mit ø ù **etwas** entlang der Wanderlinie. Laß los. Rechts unten erscheint BUSY und dann startet P **von allein**.
Das animierte P kann man mit ENTER anhalten.

Grundsätzliche Augabenstellung
Beobachte, in welcher Weise die Bahn von Q von der Lage von P abhängt. Für welche Lagen von P ergeben sich höchste oder tiefste Lagen von Q?
Information Auf dem Ti-92 steht ein Text, der das Nötigste über die Aufgabenstellung sagt. Sein Name ist fast derselbe wie der des Programms, nur mit tx am Ende. APPS 9:Texteditor 9 open ENTER
Folder: Klasse11 9 *Name* mit ÷, 9wählen ENTER
Tip Bei den Programmen wird von allein der letzte Bildschirm gespeichert. Daher muß man entweder Kopien mit einer guten Ausgangssituation haben, oder eine solche am Ende stets wieder herstellen.





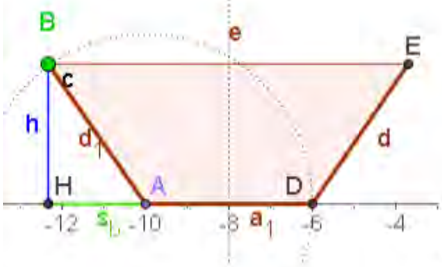


Kurzanleitung für eigene neue geometrische Extremwertaufgaben:
Geeignet sind Aufgaben, bei denen die Zielgröße ein geometrisches Maß ist: (Länge, Winkel, Fläche, Volumen).
1. Verankere die Nebenbedingung NB geometrisch.
2. Konstruiere die Figur unter Verwendung der NB. Setze evt. F5 1 oder F4 9 ein.
3. Miß die variable Größe (das Maß) mit F6.
4. Berechne oder miß die Zielgröße Fkt(Maß). Verwende evt. die Meßwerkzeuge in F6 (Länge, Fläche, Winkel, Steigung) und dann evt. F6 6, den Rechner.
6. Stelle ein “Koordinatensystem” her. Trage nach rechts mit F4 9 das Maß aus 3. ab.
Errichte dort mit F4 1 eine Senkrechte, trage auf ihr mit F4 9 das Ergebnis aus 4. ab.
Der so entstandene Endpunkt ist Q, der Punkt, dessen Spur die Kurve zeichnet, deren extremaler Wert gesucht ist.

Dies ist ticabri-extremwert.wpd

Im Web www.mathematik-verstehen.de sind die interaktiven GeoGebra-Dateien

Rinne aus drei gleichen Brettern. In welcher Form fasst die Rinne am meisten Wasser?



$a = a_1 = d = d_1$, $b = s_b$ $\Big\}$ $h^2 = a^2 - b^2$

Trapez oben $a + 2b$, unten a $\quad m = \frac{a+2b+a}{2}$, $m = a + b$

Zielgröße V maximal

Rinne als Prisma $\Rightarrow$ Querschnitt Fläche maximal

$V = m \cdot h = (a+b)h$ Vorstellung z.B. auf 1m Länge

$V(b) = (a+b)\sqrt{a^2 - b^2}$ V ist maximal $\Leftrightarrow$ V^2 maximal, V pos.

$V^2(b) = (a+b)^2(a^2 - b^2)$ Zielfunktion

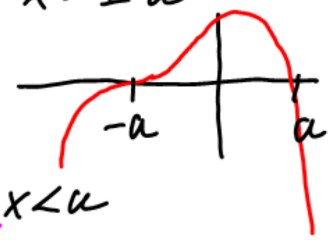
$f(x) = (a+x)^2(a^2-x^2)$ Polynom 4. Grades

Dopp. Nst. bei $x = -a$

zwei weitere Nullstellen bei $x = \pm a$ $\Big\}$ 3-fach Nst bei $x = -a$, einfach $x = a$

Verlauf

Also



ein Maximum für $0 < x < a$ erwartet

für $x = b < 0$ sieht die Rinne so aus:  sicher nicht maximal.

$f(x) = (a^2 + 2ax + x^2)(a^2 - x^2)$

$= a^4 + 2a^3x - 2ax^3 - x^4$

$f'(x) = 2a^3 - 6ax^2 - 4x^3$

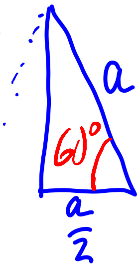
Sichere Lösung von $f'(x) = 0$ $\quad x = -a$

Hornerschema

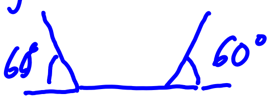
	-4	$-6a$	0	$2a^3$
$-a$		$4a$	$2a^2$	$-2a^3$
	-4	$-2a$	$2a^2$	0
$-a$		$4a$	$-2a^2$	
	-4	$2a$	0	

$-4x + 2a = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{2}$

$f\left(\frac{a}{2}\right) = \left(\frac{3a}{2}\right)^2 \frac{a^2 \cdot 3}{4} = \frac{27a^4}{16}$ $\quad V_{max} = \frac{3}{4}\sqrt{3}\, a^2$ für $b = \frac{a}{2}$

Also 

An der Seite muss also ein halbes gleichseitiges Dreieck stehen können.

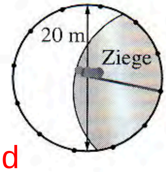


Dann passt am meisten Wasser in die Rinne.

Schulbuch

FA 44 Für eine nach oben offene Halbkugel als Vorratsbehälter ist eine Füllstandskala zu berechnen, auf der in 10er-Schritten der Füllstand in Prozent (von 0% bis 100%) angegeben wird. Berechnen Sie für diese Prozentsätze die jeweilige Höhe als Vielfaches des Halbkugelradius!

FA 45 Ein Bauer will seine runde Wiese von einer Ziege, die an einem Pfahl am Rande der Wiese angebunden wird, zur Hälfte abfressen lassen. Wie lang muss die Leine sein, wenn die Wiese einen Durchmesser von 20 m hat?



F 3 Extremwertprobleme

Diese Extremwertprobleme sind zumeist mit TI Nspire gelöst , Seiten anschließend

FA 46 Vor einer Werkhalle soll ein rechteckiger Lagerplatz mit einer Fläche von 450 m^2 angelegt werden. Dazu ist der Platz an 3 Seiten zu umzäunen, an der 4. Seite begrenzt ihn die Werkhalle. Die Abmessungen des Lagerplatzes sollen so gewählt werden, dass die Gesamtlänge des Zaunes minimal wird. Berechnen Sie für diesen Fall Länge und Breite des Platzes und die Gesamtlänge des Zaunes!

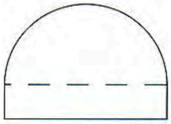
FA 47 Ein Zaun von 40 m Länge soll dazu verwendet werden, eine rechteckige Fläche mit größtmöglichem Inhalt einzuschließen. Man ermittle die Länge a, die Breite b und den maximalen Flächeninhalt dieses Rechtecks.

FA 48 Es sind quaderförmige Behälter mit einem Volumen von 12 m^3 herzustellen, bei denen die Breite halb so groß wie ihre Länge ist. Welche Maße muss ein solcher Behälter haben, damit zu seiner Herstellung möglichst wenig Material verbraucht wird?

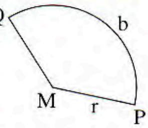
FA 49 Auf einem Baugrundstück, das die Form eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Kathetenlängen 80 m und 100 m hat, soll eine Halle mit rechteckiger Grundfläche errichtet werden. Bei welchen Abmessungen wird die Hallenfläche am größten?

FA 50 Von einer rechteckigen Marmorplatte ist an einer Ecke ein Stück abgebrochen. Aus dieser Restplatte soll wieder ein rechteckiges Stück mit möglichst großer Fläche geschnitten werden. Wie groß sind dabei die Seiten zu wählen? (Maße siehe Abbildung!)

FA 51 Der Querschnitt eines 25 m langen Tunnels besteht aus einem Rechteck mit aufgesetztem Halbkreis (siehe Abbildung). Der Umfang der Querschnittsfläche beträgt 18 m. Wie ist der Radius des Halbkreises zu wählen, damit das Tunnelvolumen möglichst groß ist?



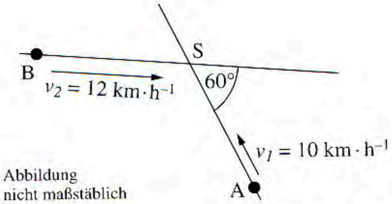
FA 52 Ein Kreisausschnitt PQM habe einen Flächeninhalt von $A = 100\ cm^2$. Bestimmen Sie den Radius r und die Länge des Kreisbogens b für den Fall, dass der Umfang des Kreisbogens minimal wird!

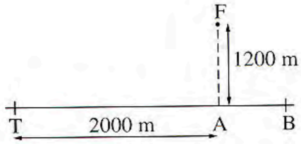


FA 53 An zwei geradlinig verlaufenden Straßen, die sich unter einem Winkel von 60° schneiden, liegen die Orte A 30 km und B 45 km von der Kreuzung S entfernt. Von A fährt ein Radfahrer R_1 mit einer Geschwindigkeit $v_1 = 10\ km \cdot h^{-1}$ in Richtung der Kreuzung. Von B fährt ein Radfahrer R_2 mit einer Geschwindigkeit $v_2 = 12\ km \cdot h^{-1}$ in Richtung der Kreuzung (s. Abbildung S. 113 links).

a) Bestimmen Sie die Abstände der beiden Radfahrer von der Kreuzung und den Abstand voneinander nach 40 Minuten!

b) Nach welcher Zeit ist der Abstand der Radfahrer voneinander am geringsten? Geben Sie diesen Abstand an! (Auf einen Nachweis der Art des lokalen Extremums wird verzichtet.)





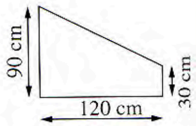
FA 54 Ein Firmenneubau F soll durch ein Erdkabel an die nächstgelegene Trafostation T angeschlossen werden. Von T über A nach B verläuft eine Straße, F befindet sich abseits einer Straße. Die Verlegungskosten längs der Straße betragen 150 €/m, im unerschlossenen Gelände 250 €/m (s. Abb. oben rechts). Berechnen Sie die Kosten, die entstehen, wenn die Verlegung des Kabels

a) geradlinig von T nach F nur im Gelände,
b) geradlinig von T nach A längs der Straße und dann nach F im Gelände erfolgt!

Nach welcher Strecke sollte man die Straße verlassen, um die Kosten so gering wie möglich zu halten? Wie hoch sind sie dann? (Auf den Nachweis der Art des Extremums wird hier verzichtet.)

FA 55 Aus quadratischen Kartonstücken mit den Seitenlängen a sollen an den Ecken gleiche Quadrate herausgeschnitten werden, so dass aus den Restflächen durch Falten oben offene Schachteln entstehen. Wie muss die Seitenlänge der herauszuschneidenden Quadrate gewählt werden, damit das Schachtelvolumen maximal wird?

FA 56 Aus trapezförmigen Blechabfällen sollen Rechtecke größter Fläche zur weiteren Verwendung herausgeschnitten werden. Berechnen Sie die Seitenlängen des geforderten Rechtecks! (Maße siehe Abbildung!)



FA 57 Einem geraden Kreiskegel mit gegebenem Grundkreisdurchmesser d und Höhe h soll der gerade Kreiszylinder mit größtmöglichem Volumen einbeschrieben werden, so dass sein Grundkreis auf dem des Kreiskegels liegt.
Bestimmen Sie für diesen Fall den Grundkreisradius, die Höhe des Kreiskegels und das Volumen!

FA 58 Einem geraden Kreiszylinder mit gegebenem Grundkreisdurchmesser d und Höhe h soll der Kreiskegel mit dem kleinsten Volumen umbeschrieben werden. Bestimmen Sie für diesen Fall Grundkreisradius, Höhe und Volumen des Kegels!

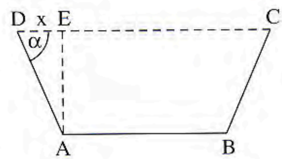
FA 59 Bestimmen Sie Grundkreisradius, Höhe und Volumen des Zylinders mit dem größtmöglichen Volumen, der sich in eine Kugel mit gegebenem Radius R einbeschreiben lässt!

FA 60 Ein Stück Draht, das den Umfang eines Kreises mit einem Radius von 12 cm bildet, soll so zerschnitten werden, dass mit ihm zwei Kreise geformt werden können. Wie groß sind die Radien dieser beiden Kreise, wenn die Summe der Flächeninhalte dieser beiden Kreise ein Minimum werden soll?

FA 61 Aus einem Silberdraht der Länge s soll ein Ohrgehänge angefertigt werden, welches aus einem Kreis mit angelötetem Quadrat besteht. Wie verhält sich der Durchmesser des Kreises zur Seitenlänge des Quadrates, wenn die Summe der Flächeninhalte von Kreis und Quadrat möglichst klein sein soll? (Der Drahtdurchmesser bleibt unberücksichtigt.)

FA 62 Drei Bretter, die die gleiche Breite b haben, sollen zu einer Wasserrinne zusammengebaut werden, deren Querschnitt ein gleichschenkliges Trapez ist. Unter welchem Winkel müssen die Bretter zusammenstoßen, wenn das Fassungsvermögen maximal werden soll?

FA 63 Eine oben offene Rinne hat als Querschnitt ein gleichschenkliges Trapez. $|\overline{AB}| = 6{,}8$ dm; $|\overline{BC}| = |\overline{AD}| = 4{,}0$ dm $x = |\overline{DE}|$; $\alpha = \sphericalangle ADE$



Berechnen Sie x oder α für den Fall, dass der Flächeninhalt des Querschnitts maximal wird! Berechnen Sie auch den maximalen Flächeninhalt!

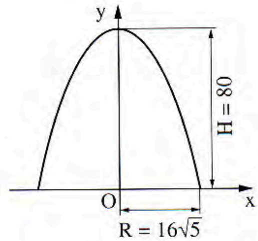
FA 64 Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3\sqrt{x} - x$. Skizzieren Sie den Graphen von f! Es soll ein Punkt $P(x_p; f(x_p))$ im 1. Quadranten so bestimmt werden, dass das Dreieck OPP′ mit $P'(x_p; 0)$, $O(0; 0)$ maximalen Flächeninhalt besitzt.

FA 65 Der Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{5}\sqrt{225 - 9x^2}$ ist die Hälfte einer Ellipse, deren Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt. Skizzieren Sie den Graphen von f!

a) Ein Rechteck soll so einbeschrieben werden, dass eine Seite auf der x-Achse liegt. Ermitteln Sie die Seitenlängen des Rechtecks, das maximalen Flächeninhalt hat!

b) Ein gleichschenkliges Trapez soll so einbeschrieben werden, dass eine der parallelen Seiten auf der x-Achse liegt. Bestimmen Sie die Maße der Seitenlängen des Trapezes, das maximalen Flächeninhalt hat!

FA 66 Einem Rotationsparaboloiden (Körper, der bei Rotation einer Parabel um ihre Achse entsteht) soll ein gerader Kreiszylinder mit maximaler Oberfläche einbeschrieben werden. Die Skizze zeigt seinen Achsenschnitt, der eine quadratische Parabel darstellt. Berechnen Sie die Maße des Zylinders!



FA 67 Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = \frac{x}{(\ln x)^2}$ $(x \in D_f)$. **GTA**

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion f an!
Der Graph der Funktion f besitzt genau einen lokalen Minimumpunkt. Berechnen Sie dessen Koordinaten!

b) Es existiert genau ein Punkt $P(x; f(x))$ $(x \in \mathbb{R}, x > 1)$, dessen Abstand zum Koordinatenursprung minimal ist. Berechnen Sie die Koordinaten dieses Punktes P!

FA 68 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{x}{(\ln x)^3}$ $(x \in \mathbb{R}, x > 1)$. **GTA**

Berechnen Sie die Koordinaten desjenigen Punktes M auf dem Graphen von f, der vom Koordinatenursprung den kleinsten Abstand hat! Berechnen Sie diesen minimalen Abstand!

FA 69 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^{4x} + e^{-4x}$; $0 \leq x \leq 4$ **GTA**

Die Punkte $A(x; 0)$, $B(x; f(x))$, $C(4; 0)$ bilden ein Dreieck. Untersuchen Sie, für welches x der Flächeninhalt des Dreiecks ABC maximal wird! Berechnen Sie A_{max}!

FA 70 Gegeben sind die Funktionen $f(x) = e^x + e^{-x}$ und $g(x) = e \cdot x$.
An welcher Stelle x wird der Abstand $d(x) = f(x) - g(x)$ minimal?

FA 71 Bei einem Wettbewerb für Modellflugzeuge mit Verbrennungsmotoren wird ermittelt, welches Flugzeug mit einer vorgegebenen Tankfüllung am weitesten fliegen kann. Bei gleichförmigen Flug hängt die pro Stunde „verbrauchte“ Energie E (in MJ pro Stunde) von der Geschwindigkeit v (in $\frac{km}{h}$) des Flugzeugs nach folgendem Gesetz ab: **GTA**

$E(v) = Av^2 + Bv + C.$

Dabei sind A, B und C Konstanten, die vom Flugzeugtyp abhängen. Durch Messung mögen für ein zweimotoriges Modell folgende Werte festgestellt worden sein:

Geschwindigkeit in $\frac{km}{h}$	20	50	90
Leistung in kW	1,144	2,153	3,73
„Energieverbrauch“ pro Stunde in MJ	4,12	7,75	13,43

Untersuchen Sie, für welche Fluggeschwindigkeit das Modellflugzeug bei gegebener Kraftstoffmenge maximale Reichweite hat!

FA 72 Gegeben ist die Funktion $f(x) = e^{a \cdot x}$; $a \in R$, $a \neq 0$
Durch die Punkte $P_1(0; f(0))$ und $P_2(1; f(1))$ ist die Lage einer Geraden g eindeutig bestimmt. Untersuchen Sie, für welches $x \in [0; 1]$ der Abstand d der Graphen von f und g ($d(x) = |g(x) - f(x)|$) maximal wird!

FA 73 Ein Abschnitt der positiven x-Achse und die Graphen der Funktionen $f(x) = \frac{1}{x^2}$ und $g(x) = \frac{1}{8}x$ begrenzen über einem Intervall $I = [a, b]$ der Länge 1 eine Fläche A.
Ermitteln Sie die Intervallgrenzen a und b, so dass der Flächeninhalt von A ein Maximum annimmt! Berechnen Sie A_{max}!

FA 74 Eine Firma stellt Mikrochips her, wobei für x Produktionseinheiten (jeweils 100 Stück) Gesamtkosten in Höhe von k(x) Geldeinheiten (jeweils 1000 €) entstehen. Diese Kosten lassen sich mit der Funktion $k(x) = \frac{1}{24}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{x}{2} + \frac{4}{3}$ modellieren. Jede Produktionseinheit wird zum Preis von p Geldeinheiten verkauft.

a) Wie viele Bauteile müssen mindestens hergestellt werden bzw. wie viele dürfen höchstens produziert werden, damit die Firma für $p = \frac{5}{6}$ mit Gewinn arbeitet?
b) Wie viele Bauteile müssen produziert werden, damit für $p = \frac{5}{6}$ der Gewinn maximal wird? Berechnen Sie den maximalen Gewinn.
c) Wie groß muss der Mindestpreis p_0 pro Produktionseinheit sein, damit die Firma ohne Verlust arbeitet?

F 4 Weitere Anwendungen der Integralrechnung

F 4.1 Volumen und Mantelfläche von Rotationskörpern; Bogenlänge von Kurven

FA 75 Die Fläche unter dem Graphen der Funktion $f(x) = \sqrt{2x}$ rotiert im Intervall [1; 4] um die x-Achse. Fertigen Sie eine Skizze an und berechnen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers!

FA 76 Die Fläche unter dem Graphen der Funktion f_i rotiert im angegebenen Intervall um die x-Achse. Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers! Fertigen Sie jeweils eine Skizze an! Welche der Ihnen bekannten Körper entstehen durch die Rotation?

a) $f_1(x) = 2$; [0; 5]
b) $f_2(x) = \frac{2}{5}x$; [0; 5]
c) $f_3(x) = \sqrt{4 - x^2}$; [−2; 2]
d) $f_4(x) = \frac{2}{3}x + 1$; [2; 6]
e) $f_5(x) = x^2 - 3x$; [0; 3]
f) $f_6(x) = x^2 - 1$; [1; 3]
g) $f_7(x) = \frac{1}{2}x$; [1; 4]
h) $f_8(x) = \sqrt{x}$; [0; 4]
i) $f_9(x) = \sqrt[4]{x - 1}$; [1; 2]
j) $f_{10}(x) = (x - 1)(x + 1)$; [−1; 1]

Im Web sind pdf-Dateien in Vorlesungsgröße, bei denen jedes Rechteck eine Seite ist.

Ebenso befinden sich dort die TI-Nspire *.tns-Dateien, die interaktives Arbeiten zulassen.

Extremertaufgaben Übersicht

Extremwertaufgaben (aus TPC 2001 PAETEC) Haftendorn 2011

Jede Aufgabe ist hier ein neues Problem

FA 46/47 Rechteck U min, F max

FA 48 Quader, Oberfläche minimal

FA 49 Baugrundstück (wie "Glasrest")

hierin Erklärung für Maßübertragung, (existiert auch extra)

FA 50 Glasrest mit abgebrochener Ecke

FA 51 Kanal (bzw. Tunnel) ist eine eigene Datei, die steht bei anderen Aufgaben zum Kanal

1.1

FA 46 47 Rechteck, U min, F max

FA 46

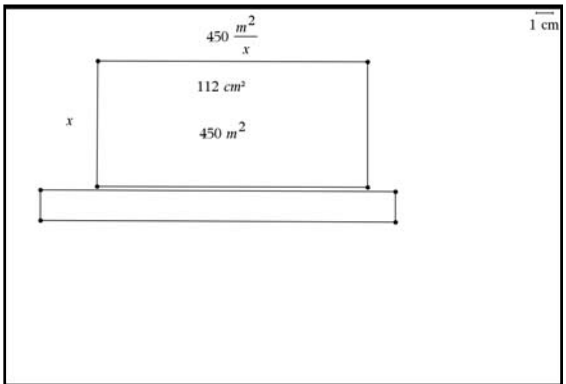
Kanten x und 450/x **umfang**$(x):=2\cdot x+\frac{450}{x}$

$\frac{d}{dx}(\mathbf{umfang}(x)) \blacktriangleright 2-\frac{450}{x^2}$ solve$\left(2-\frac{450}{x^2}=0,x\right) \blacktriangleright x=-15$ or $x=15$

$\mathbf{y}:=\frac{450}{15} \blacktriangleright 30$ Also ist jede Seite, die an die Werkhalle grenzt, 15 m lang und die andere Seite misst 30 m. Die Form ist aus zwei Quadraten der Kantenlänge 15 m aufgebaut.

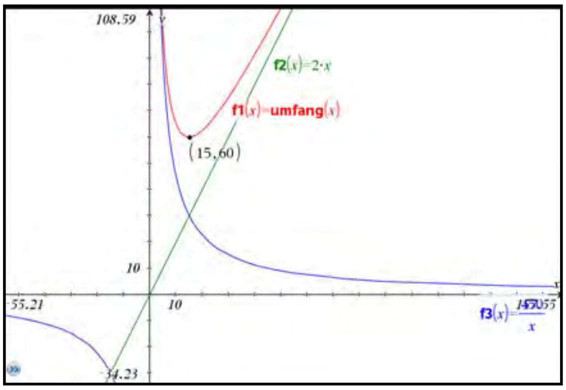
2.1

FA 46 47 Rechteck, U min, F max



2.2

FA 46 47 Rechteck, U min, F max



2.3

FA 46 47 Rechteck, U min, F max

FA 47

Der Umfang ist $u=2\cdot x+b \blacktriangleright u=2\cdot x+b$ Die Fläche $\mathbf{f}(x):=x\cdot(u-2\cdot x) \blacktriangleright$ *Fertig*

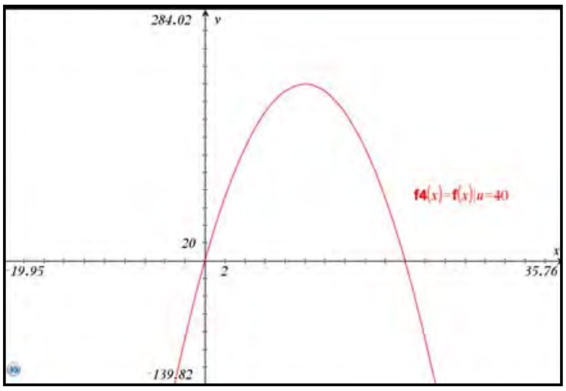
$\frac{d}{dx}(\mathbf{f}(x)) \blacktriangleright u-4\cdot x$ also $\mathbf{xmax}:=\frac{u}{4} \blacktriangleright \frac{u}{4}$ Hier xmax=10 m

Die andere Kante ist $u-2\cdot\mathbf{xmax} \blacktriangleright \frac{u}{2}$ Hier bmax=20 m.

Auch bei dieser Aufgabe besteht das beste Rechteck aus zwei Quadraten.

2.4

FA 46 47 Rechteck, U min, F max



2.5

FA 48 Quader, Ob min

FA 48

Die heißen x,a,b. x sei die Breite und a die Länge. Dann gilt $2\cdot x \to \mathbf{a} \blacktriangleright 2\cdot x$. Für b gilt $\mathbf{b}:=\frac{v}{2\cdot x\cdot x} \blacktriangleright \frac{v}{2\cdot x^2}$. Nebenbedingungen

Materialverbrauch: $2\cdot(2\cdot x\cdot x+2\cdot x\cdot\mathbf{b}+x\cdot\mathbf{b}) \blacktriangleright \frac{3\cdot v+4\cdot x^3}{x}$

Zielfunktion $\mathbf{f}(x):=\frac{3\cdot v+4\cdot x^3}{x} \blacktriangleright$ *Fertig*

$\frac{d}{dx}(\mathbf{f}(x)) \blacktriangleright \frac{8\cdot x^3-3\cdot v}{x^2}$ solve$\left(\frac{8\cdot x^3-3\cdot v}{x^2}=0,x\right) \blacktriangleright x=\frac{(3\cdot v)^{\frac{1}{3}}}{2}$

(nächste Seite)

3.1

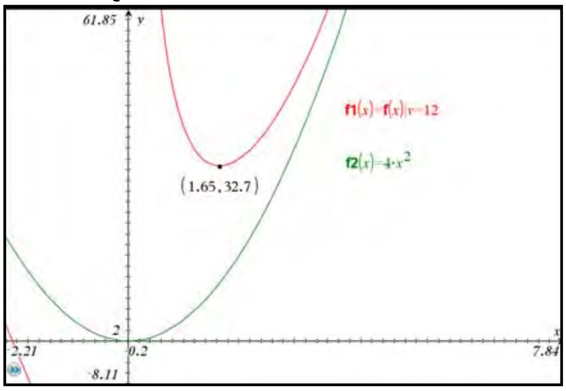
FA 48 Quader, Ob min

$\mathbf{br}:=\frac{(3\cdot v)^{\frac{1}{3}}}{2}|v=12 \blacktriangleright \frac{6^{\frac{2}{3}}}{2}$ Das ist die Lösung für die Breite x.

Die Kantenlängen sind (in m): approx$(\mathbf{br}) \blacktriangleright 1.65096$ approx$(2\cdot\mathbf{br}) \blacktriangleright 3.30193$ approx$(\mathbf{b}|v=12)|x=\mathbf{br} \blacktriangleright 2.20128$ und der Materialverbrauch ist $\mathbf{f}(1.65)|v=12 \blacktriangleright 32.7082\ m^3$.

3.2

FA 48 Quader, Ob min



3.3

FA 49 "Glasrest"

separat)

Fall A Eine Rechteckseite auf die Katheten legen. (gelb)

Fall B Eine Rechteckseite auf die Hypotenuse legen. (blau)

Fall A Eine Seite x, die andere Seite q. Zielgröße Fläche f(x)=x*q

Nebenbedingung **nb**: $\frac{q}{b}=\frac{a-x}{a}$ ▸ $\frac{q}{b}=\frac{-(x-a)}{a}$ solve(**nb**,q) ▸ $q=\frac{-b\cdot(x-a)}{a}$

Zielfunktion $f(x):=x\cdot\frac{-b\cdot(x-a)}{a}$ ▸ *Fertig* Das ist eine Parabel, nach unten geöffnet, mit den Nullstellen 0 und a. Diese sind auch aus den Grenzlagen des Rechtecks zu schließen.

Ihr Maximum ist bei $\frac{a}{2}$ ▸ $\frac{a}{2}$ für x. $\frac{-b\cdot(x-a)}{a}|x=\frac{a}{2}$ ▸ $\frac{b}{2}$ Auch die andere Seite muss halbeirt werden, wie auch der Strahlensatz erfordert.

Der maximale Flächeninhaltist dann also $f\left(\frac{a}{2}\right)$ ▸ $\frac{a\cdot b}{4}$, das ist die Hälfte der Dreiecksfläche. Mehr kann man nicht "rausholen".

4.1

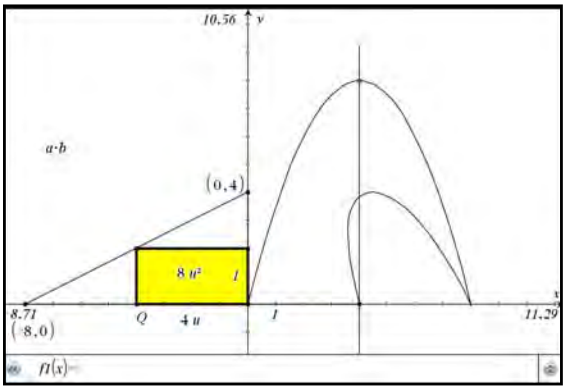
FA 49 "Glasrest"

Ihr Maximum ist bei $\frac{a}{2}$ für x. $\frac{-b\cdot(x-a)}{a}|x=\frac{a}{2}$ ▸ $\frac{b}{2}$ Auch die andere Seite muss halbeirt werden, wie auch der Strahlensatz erfordert.

Der maximale Flächeninhaltist dann also $f\left(\frac{a}{2}\right)$ ▸ $\frac{a\cdot b}{4}$, das ist die Hälfte der Dreiecksfläche. Mehr kann man nicht "rausholen".

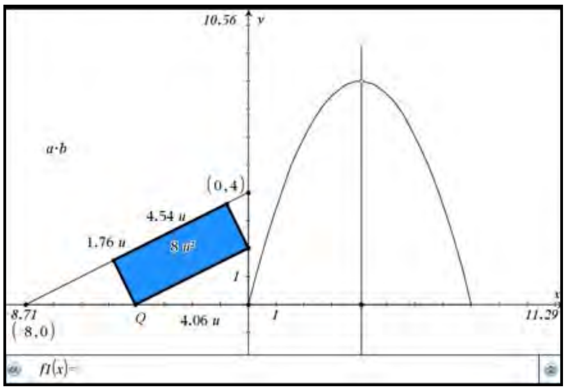
4.2

FA 49 "Glasrest"



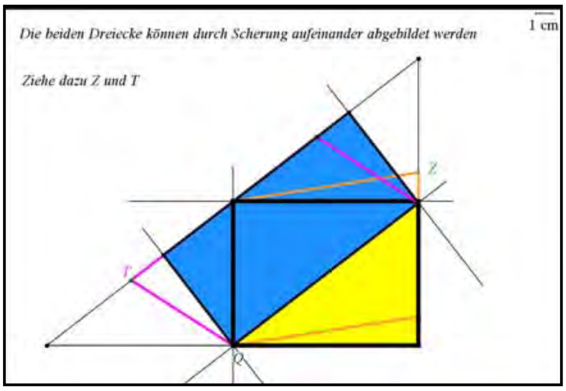
4.3

FA 49 "Glasrest"



4.4

FA 49 "Glasrest"



4.5

FA 49 "Glasrest"

Fall B Wenn die eine Rechtecksseite die Hypotenuse ist:

Diesen Fall kann man durch **Scherung** auf den Fall zurückführen. Also hat man hier denselben Flächeninhaltfür das optimale Rechteck.

Allerdings ist das Seitenverhältnis ein anderes, Seiten r und s.

$\mathbf{s}:=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}}$ ▸ $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ und $\mathbf{r}:=\frac{a\cdot b}{4\cdot \mathbf{s}}$ ▸ $\frac{a\cdot b}{2\cdot\sqrt{a^2+b^2}}$

$\mathbf{s}|a=8$ and $b=4$ ▸ $2\cdot\sqrt{5}$ $\mathbf{r}|a=8$ and $b=4$ ▸ $\frac{4\cdot\sqrt{5}}{5}$

$\mathbf{s}|a=8$ and $b=4$ ▸ 4.47214 approx($\mathbf{r}|a=8$ and $b=4$) ▸ 1.78885

Außer mit Scherung kann man in der besonderen optimalen Lage auch elementar durch "**Abschneideflächen**" begründen, dann die beiden Rechtecke gleich sind. Dabei brauch man aber die Pythagorassatz-Variante für ähnliche auf die Dreiecksseiten aufgesetzte Figuren. Das gelb sichtbare Dreieck

4.6

FA 49 "Glasrest"

FA 49 Auf einem Baugrundstück, das die Form eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Kathetenlängen 80 m und 100 m hat, soll eine Halle mit rechteckiger Grundfläche errichtet werden. Bei welchen Abmessungen wird die Hallenfläche am größten?

Nun Bezug zur gestellten Aufgabe

$\mathbf{nb}|a=100$ and $b=80$ ▸ $\frac{q}{80}=\frac{-(x-100)}{100}$ solve$\left(\frac{q}{80}=\frac{-(x-100)}{100},q\right)$ ▸ $q=\frac{-4\cdot(x-100)}{5}$

$f(x)|a=100$ and $b=80$ ▸ $\frac{-4\cdot x\cdot(x-100)}{5}$

$f\left(\frac{a}{2}\right)|a=100$ and $b=80$ ▸ 2000

Antwort: Die Halle muss die Abmessungen 50m X 40m haben. Sie hat dann einen Flächeninhaltvon 2000 m^2.

4.7

FA 49 "Glasrest"

A: Maßübertragung und B: Berechnung in den Graphfenstern.

B: Berechnung

Das erforderliche Menu ist beim Werkzeugsymbol

1. Vorbereitung mit "*8.Messung*" die zu den passenden Größen Messwerte herstellen und anzeigen (durch Enter)
2. *Aktionen Text* einfügen Berechnungsterm schreiben, z.b. $a\cdot b$
3. *Aktionen Berechnung* den Text aus 2. anklicken.
4. Es kommt ein Fenster mit der Aufforderung die erste Zahl oder Variable einzugeben, z.B. nun den Messwert von a anklicken, dann den Messwert von b anklicken.
5. nun sofort neben dem Text aus 2 einfügen durch Enter.

4.8

FA 49 "Glasrest"

A: Maßübertragung und B: Berechnung in den Graphfenstern.

B: Maßübertragung

Erst muss man sich klarmachen, was man wohin übertragen will. Es gibt viele Möglichkeiten, gut beschrieben im Online-Handbuch.

Suchwort Maßübertragung

Hier wird "*Maß auf Streckenlänge übertragen*" beschrieben.

(Strecke auf Strecke geht schneller mit dem Zirkel-Werkzeug (bei Konstruktion))

Menu Werkzeuge

A *Konstruktion 8 Maßübertragung* anklicken, Zahl anklicken oder eingeben,

A *Konstruktion 7 Zirkelwerkzeug,*

es erscheint an der Maus ein Kreis mit dem gewählten Radius. Diesen setzt man passend ab. Die gewünschte Strecke erhält man durch Schnitt des Kreises mit einer Geraden.

4.9

FA 50 Vari-Glasrest

platte soll wieder ein rechteckiges Stück mit möglichst großer Fläche geschnitten werden. Wie groß sind dabei die Seiten zu wählen? (Maße siehe Abbildung!)

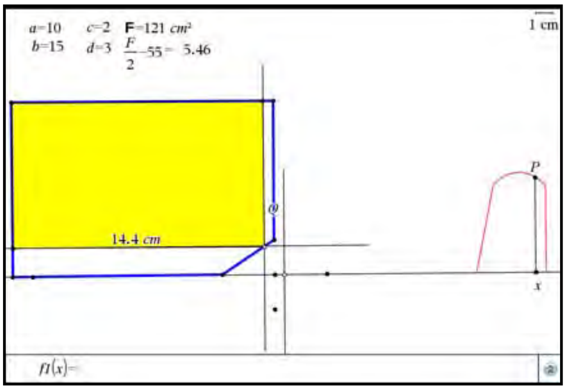
Die Längen nehme ich in dm.

Wenn man das Koordinatensytem in die linke untere Ecke legt, hat die Hypotenuse der abgeschnittenen Ecke die Gleichung $\mathbf{g}(x):=\frac{2}{3}\cdot(x-12)$ ▸ *Fertig*

Zielgröße: Der Flächeninhalt ist fl=x*h In dem Bereich mit der Schräge gilt $\mathbf{h}:=10-\mathbf{g}(x)$ ▸ $18-\frac{2\cdot x}{3}$ Also $\mathbf{fl}(x):=x\cdot\left(18-\frac{2\cdot x}{3}\right)$ ▸ *Fertig* $\mathbf{fl}(x)$ ▸ $\frac{-2\cdot x\cdot(x-27)}{3}$ Diese Parabel hat ihren Scheitel bei $\mathbf{xs}:=\frac{27}{2}$ ▸ $\frac{27}{2}$ und der Flächenimhalt ist $\mathbf{fl}(\mathbf{xs})$ ▸ $\frac{243}{2}$ $\mathbf{fl}(\mathbf{xs})$ ▸ 121.5 Anfang der Schräge x=12, Ende x=15 $\mathbf{fl}(12)$ ▸ 120 $\mathbf{fl}(15)$ ▸ 120 Andere Platte ist sind sicher kleiner. Also Bei einer Breite von 135 cm und einer Höhe von $\mathbf{h}|x=\frac{27}{2}$ ▸ 9 90cm entsteht der maximae Inhalt 12150 cm^2

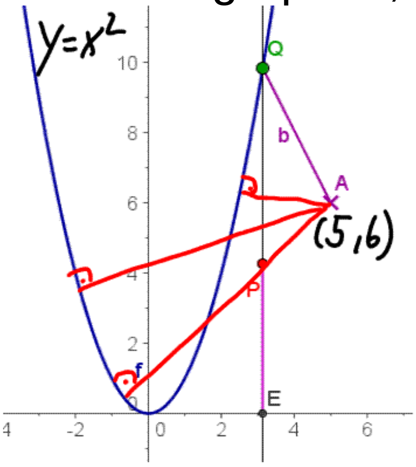
5.1

FA 50 Vari-Glasrest



5.2

Extremaler Abstand eines Punktes von einem Funktionsgraphen, hier A=(5; 6) von der Normalparabel



$Q(u,v)$ $\quad P(x,y)$

$v=u^2$ $\quad$ Zielgröße $b=\sqrt{(5-u)^2+(6-v)^2}$

NB $\quad$ Zielfunktion $b(u)=\sqrt{(5-u)^2+(6-u^2)^2}$

Betrachte $g(u)=b^2(u)=(5-u)^2+(6-u^2)^2$

g und b haben für $b>0$ dieselben Extremstellen.

Hier ist $b>0$.

$g'(u)=2(5-u)(-1)+2(6-u^2)(-2u)$

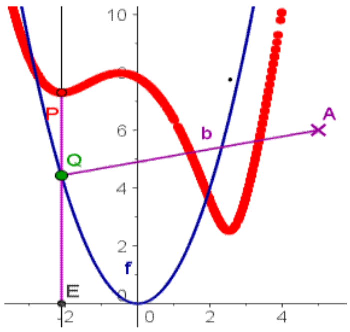
$=-10+2u-24u+4u^3=4u^3-22u-10$

Nach dem Experiment erwarten wir 3 Extremstellen $2u^3-11u-5=0$

Andere Ansatz: Extremale Abstände sind dort, wo die Abstandsstrecke senkrecht auf der Parabel steht. Gerade QA $y=-\frac{v-6}{5-u}(x-5)+6$

Steigung der Parabel $y'=2x$

in Q $m_Q=2u$ $\quad m_\perp=-\frac{1}{2u}$



Gesucht ist also $-\frac{1}{2u}=-\frac{v-6}{5-u} \wedge v=u^2$

$\frac{1}{2u}=\frac{u^2-6}{5-u}$

$(5-u)=2u(u^2-6)$

$2u^3-12u+u-5=0$

$2u^3-11u-5=0$

dieselbe Gleichung wie oben!

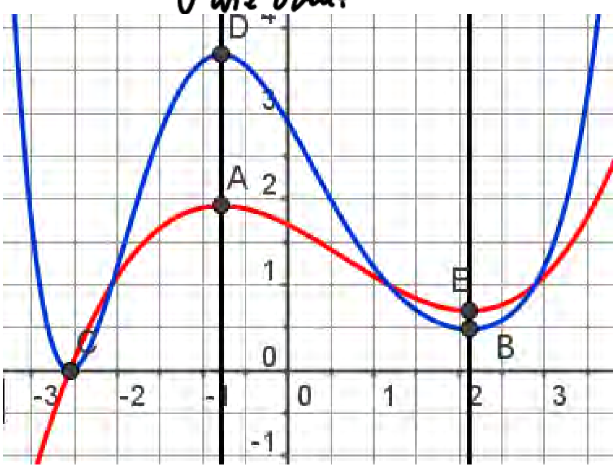
TI solve(..., u)

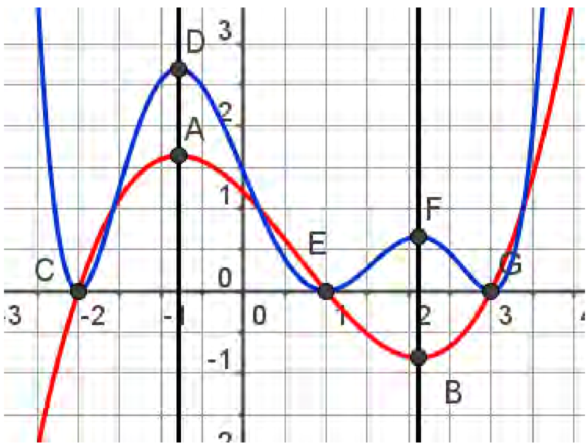
$x=-2{,}07207$

$x=-0{,}473\ldots$

$x=2{,}54\ldots$

passt.

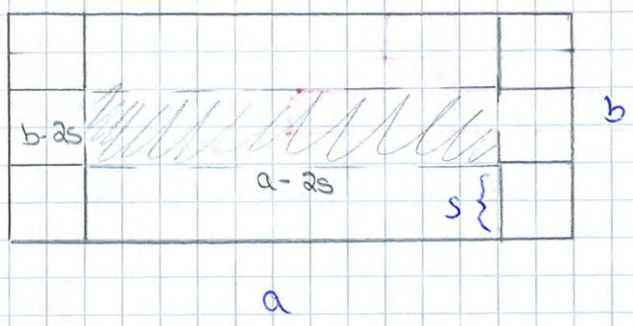




Betrachtet man bei einer Extremwertaufgabe das Quadrat der Zielfunktion, so muss man aufpassen: Die Quadratfunktion hat an jeder Nullstelle der Zielfunktion ein Minimum, auch wenn vorher dort kein Extremum war. Minima im negativen Bereich werden durch das Quadrieren zu Maxima. Daher lohnt sich die Methode nur wenn die Zielfunktion von der Sache her im interessanten Bereich positiv ist.

02.06.09

Volumen maximieren vom inneren ~~Rechteck~~ Quader



$a = 50$
$b = 30$

$V(s) = (a-2s)(b-2s) \cdot s$

V(s) maximieren: V(s) ableiten => Fkt. 2. Grades, also evtl. 2 Extrema

Extremwertaufgabe

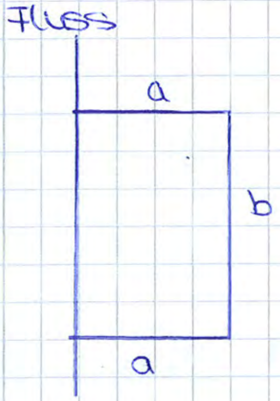
Alle Längen in m
Alle Flächen in m^2

Schafe

200 m

Randlösung ① Breite 100 + 100 = 200
Länge 0

② Breite 0
Länge 200



① $\boxed{\text{Zielgröße:}}$ Fläche: $a \cdot b$

② $\boxed{\text{NB:}}$ $2a + b = 200 \iff 200 - 2a = b$

(b) in Fläche:

$A = a \cdot (200 - 2a) \Leftarrow \boxed{\text{Zielfunktion}}$ ③

$= 200a - 2a^2$

$\Rightarrow -2a^2 + 200a$ ableiten $f' = 0$

$f' = -4a + 200 = 0 \quad | + 4a$
$200 = 4a \quad | : 4$
$50 = a$

NB: $2a + b = 200 \quad a = 50$

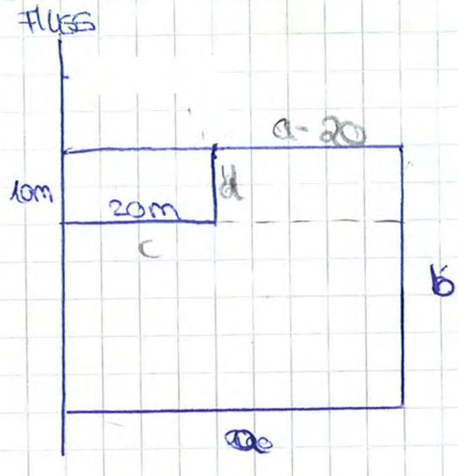
$2 \cdot 50 + b = 200$

$100 + b = 200 \quad | - 100$
$b = 100$

$A_{max} = 100 \cdot 50 = \underline{5.000}\, m^2$

$10.000 m^2 = 1 ha$
$(100 m \times 100 m) = 1 ha$

$10 m \times 10 m = 1 a$
$100 a = 1 ha$



$A_{neu}: \ a \cdot b - 200$ ⇐ Zielfkt

$NB: \ a + b + a - 20 = 200$

$2a + b = 220 \Leftrightarrow b = 220 - 2a$

$A: \ a(220 - 2a) - 200$

$220a - 2a^2 - 200$

$f' = -4a + 220 = 0$

$220 = 4a \quad | :4$

$a = 55$

a in NB: $b = 220 - 2a$

$220 - 2 \cdot 55$

$220 - 110$

$b = 110$

Stall: 20 m x 10 m

Zaun: 200 m

$A_{alt}: 5.000 \quad A_{Stall} \Rightarrow 10 \cdot 20 = 200$

$(A_{neu}: 5000 - 200 = 4.800)$

$A_{neu}: \ 110 \cdot 55 - 200 = 5850 \, m^2$

Aufgabe Fußballfeld

Laufbahn = 400 m
Fußballfeld = maximieren

Kreis: $\pi \cdot d$ oder $\pi \cdot 2r$

$NB: \ 2a + \pi \cdot d = 400$

$A_{Feld}: a \cdot d = Max$ ⇐ Zielgröße

$a = 100$
$d = 63{,}6$

$NB: \ 2a + \pi \cdot d = 400 \quad | -\pi \cdot d$

$2a = 400 - \pi \cdot d \quad | :2$

$\Leftrightarrow \quad a = 200 - \frac{\pi d}{2}$

a in A_{Feld}: $\left(200 - \frac{\pi \cdot d}{2}\right) \cdot d$

$= 200d - \frac{1}{2} \pi \cdot d^2$

$\Rightarrow$ Zielfkt: $-\frac{1}{2} \pi \cdot d^2 + 200d$

Ableitung $\quad -3{,}14 d + 200 = 0 \quad | -200$

$-200 = -\pi \cdot d \quad | : -\pi$

$63{,}652 = d$

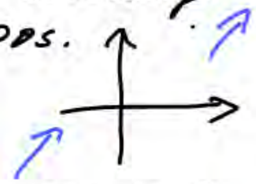
$a = 200 - \frac{\pi \cdot 63}{2} = 100$

Kurvendiskussion

$f(x) = \frac{1}{16}\, x(x-6)^2$

Gesamtverlauf ①

x^3, pos.



Nullstellen von f: $f(x)=0$

$x\underbrace{(x-6)^2}=0$

einfache Nst. $x=0$ ②

doppelte Nst. $x=6$

Berührung der x-Achse ohne VZ-Wechsel ③

qualitativ (aus ①,②,③)

Zusammen ergibt sich:

Minimum in Mi = (6/0)

Maximum und Wendepkt existieren

$0 < x_e < x_w < 6$, klar ist $x_w = \frac{x_e + 6}{2}$

Berechnung: $f(x) = x(x-6)^2 = x^3 - 12x^2 + 6x$

$f'(x) = 3x^2 - 24x + 36$

Extremstellen lösen $f'(x)=0$, also

$3x^2 - 24x + 36 = 0$

$x^2 - 8x = -12$

$x^2 - 8x + 4^2 = -12 + 16$

$(x-4)^2 = 4$

$x = 4 \pm 2$

$x = 2 \vee x = 6$

$f(2) = \frac{1}{16} \cdot 2 \cdot (2-6)^2 = \frac{1}{16} \cdot 2 \cdot 16 = 2$

Also Max = (2/2) ; Min = (6/2) war klar

Da f' eine Parabel ist, liegt der Scheitel in der Mitte zwischen zwei Nullstellen: $x_w = \frac{2+6}{2} = 4$

Wegen der Symmetrie der Polynome 3. Grades zum WP gilt: $y_w = \frac{y_{min} + y_{max}}{2} = \frac{2+0}{2} = 1$

Alternativ ist $f''(x) = 6x - 24$

Wendestellen lösen $f''(x) = 0$

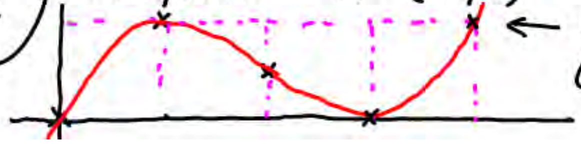
Also: $6x - 24 = 0$

$6x = 24$

$x = 4$

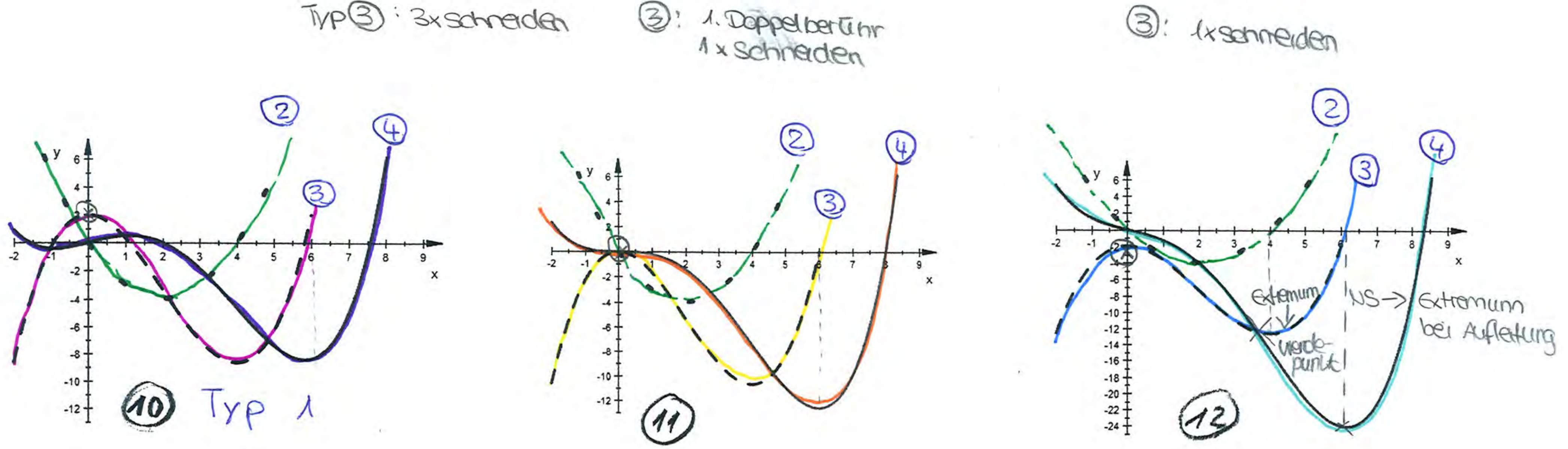
$f(4) = \frac{1}{16} \cdot 4(4-6)^2 = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$

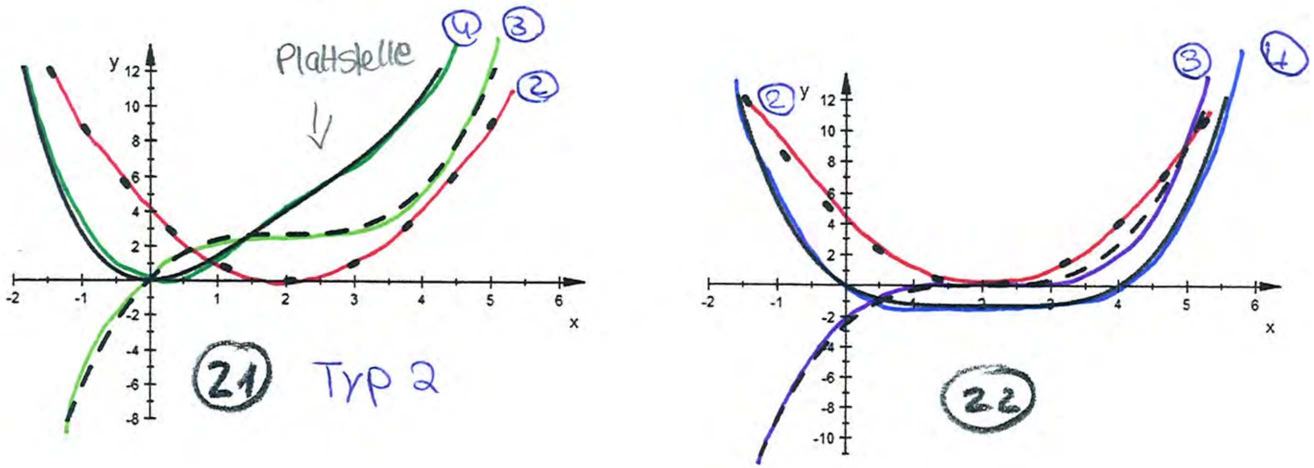
Wendepunkt WP = (4/1)

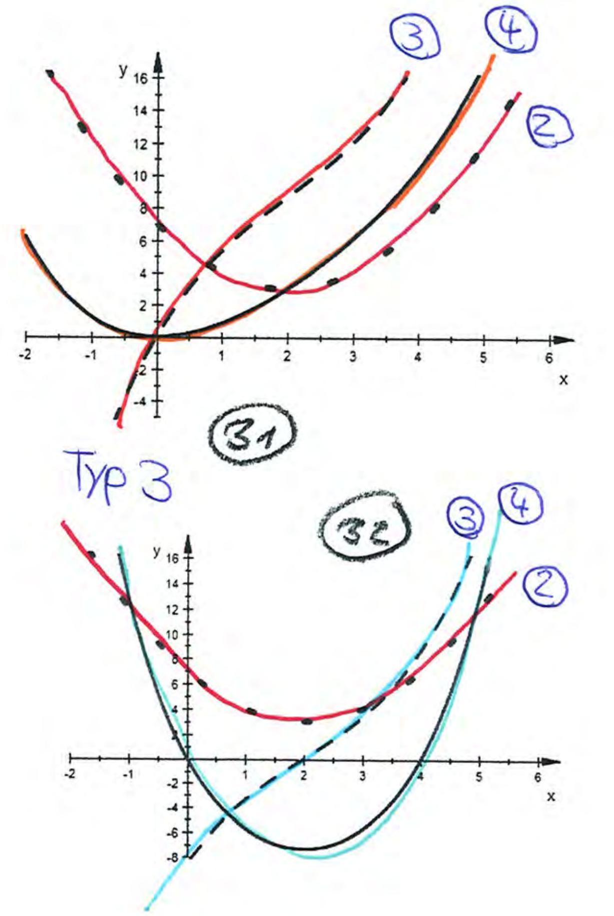


← Sp. zu (0/0)

wichtige Seite, sie begründet sämtliche Formrn der Graphen von Polynomen 4. Grades.







Zeichnungen für alle vorkommenden Typen von Polynomen 4. Grades.

2. Ableitung ist gepunktet, 1. Ableitung ist gestrichelt, f selbst ist durchgezogen.
Die Ableitungen der Polynome 4. Grades sind Polynome vom Grad 2.
Damit kommen i.w. nur die folgenden drei Typen infrage.
Die da der x-Achse gespiegelten Versionen werden nicht gesondert betrachtet.

http://haftendorn.uni-lueneburg.de Prof. Dr. Dörte Haftendorn, April 2007

Mathematik-Klausur Nr.1 Kurs 12 m (gk) Ha am 10.11.97 Name:

Aufgabe 1 a) Integrieren Sie :

$$I_1 = \int_0^4 x\,(x-4)\,dx \qquad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\,dx \text{ und } I_3 = \int (x-5)^4\,dx$$

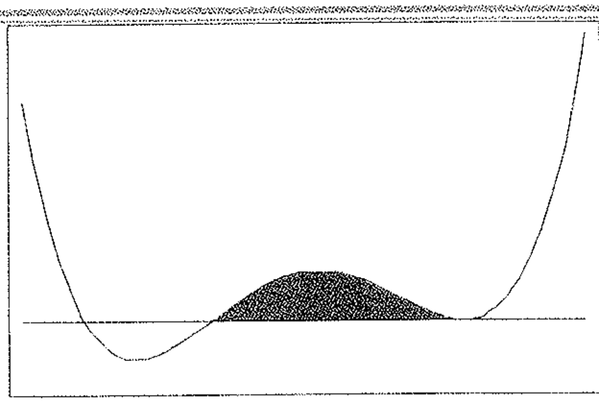
Markieren Sie für I_1 und I_2 eine Flächenbedeutung in einer einfachen Skizze.

b) Zeigen Sie, dass die Integrationsregel, die Infix glaubt gefunden zu haben, nämlich

$\int x\,f(x)dx = \int x\,dx \cdot \int f(x)\,dx$, mit Sicherheit falsch ist.

Aufgabe 2 Mathilde hat ein schönes Polynom gefunden, sie zeigt Mathix einen Graphen und die Funktionsgleichung:

$$f(x) = x^4 - 6x^3 + 32x \quad .$$



Es ist insofern **ganz** schön, als es sowohl ausschließlich ganzzahlige (sogar geradzahlige) Nullstellen, als auch ganzzahlige Wendestellen, als auch ganzzahlige Schnittstellen der Wendetangenten mit der Kurve hat. Es ist sogar noch eine der Extremstellen ganzzahlig. In dem Bild sind zwar die x-Achse, aber keine Maße eingetragen.

a) Bestimmen Sie für Mathix die Nullstellen, Wendepunkte und Wendetangenten. Zeichnen Sie alles in dieses Bild ein, zusammen mit einer y-Achse und einer etwa passenden Achsenbeschriftung.

b)Berechnen Sie die Fläche, die Mathilde grau markiert hat. Machen Sie eine grobe Probe mit einem geeigneten Rechteck.

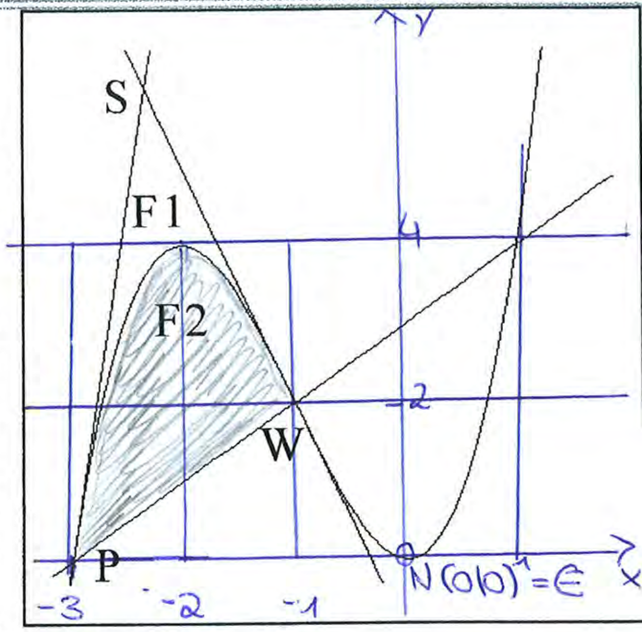
c) Mathix hat nun aber noch für Mathilde eine schöne Ergänzung: Zu berechnen ist die Fläche, die sich zwischen der Kurve und der Wendetangente durch den linken Wendepunkt bildet. Tun Sie das. Kommt Ihr Wer grob hin?

d) Mathilde verwechselt rechts und links, sie berechnet die Fläche, die sich zwischen der Kurve und de Wendetangente durch den rechten Wendepunkt bildet. Bei Zeitmangel bestimmen Sie wenigstens die Wendetangent und ihren linken Schnittpunkt mit dem Graphen vonf.
Wie kann es kommen, dass Mathix das nicht am Ergebnis merkt? Wundert Sie das?
Kennen Sie Polynome 4.Grades, bei denen das selbstverständlich ist?
Ahnen Sie einen Zusammenhang?
Formulieren Sie einen Satz, der vielleicht für alle Polynome 4. Grades gilt.
Haben sie eine Beweisidee?

Allgemeiner Hinweis: Gelingt Ihnen eine Rechnung oder die Aufstellung einer Gleichung nicht, s entnehmen Sie plausible Werte aus der Zeichnung. Führen Sie auf jeden Fall die Integrationen durch auch wenn Sie nur "erfundene" Geraden haben.

Gutes Gelingen

Mathematik-Klausur Nr.2 Kurs 12 m (gk) Ha am 13.12.95 Name:



Aufgabe 1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 + 3x^2$.

a) Berechnen Sie Nullstellen, Extrema und Wendepunkt.

b) Rechts sehen Sie schon die richtige Zeichnung. Ergänzen Sie die Achsen mit Beschriftung. Zeichnen Sie den "Affenkasten" ein.

c) P liegt in der Höhe des Minimums. Die Tangente in P und die Wendetangente schneiden sich in S, wie gezeichnet.
W, S und P bilden ein Dreieck, das durch den Graphen in zwei Flächen F1 und F2 geteilt wird. Gesucht ist das Flächenverhältnis F1:F2. Falls Sie dabei aus Ihrer guten Kenntnis des Affenkastens Nutzen
ziehen können, dürfen Sie das tun, wenn Sie die verwendete Eigenschaft nennen.
Führen Sie auf jeden Fall die benötigten Integrationen durch.

d) Sehen Sie einen Zusammenhang zu Aufgabe 4 ?

Aufgabe 2 Leiten Sie ohne weitere Zeichnung und Prüfung die folgenden Funktionen ab. Fassen Sie sinnvoll zusammen.

A) $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ B) $f(x) = e^{\sqrt{6x+3}}$

C) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 7}{4x - 1}$ und Asy. bestimmen und sinnvoll skizzie[ren]

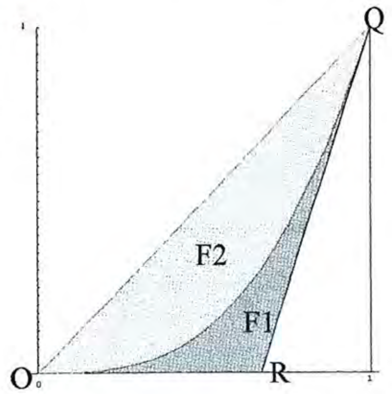
Aufgabe 3 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x \cdot \cos(x)$.

a) Skizzieren Sie die beiden Bausteinfunktionen und f in einem sinnvollen Bereich.
Wie wird f weiter außen verlaufen?
Liegt eine Symmetrieeigenschaft vor?
Wo schneidet f die Kosinusfunktion ? (Genau)
Wo haben f und die andere Bausteinfunktion gemeinsame Punkte? (Genau)
Was können Sie über die Extrema von f grob aussagen?

b) Leiten Sie f ab. Welche Steigung hat f in den von Ihnen gezeichneten Nullstellen?
Wie wird sich diese Steigung weiter außen entwickeln?

c) Mathusalem hat den Eindruck, alle Nullstellen von f seien auch Wendestellen. Weisen Sie ihm nach, daß er sich darin irrt.

Aufgabe 4 Alle Potenzfunktionen f_k *mit* $k>1$ und $f(x) = x^k$ verlaufen durch Q(1/1) . In der gezeichneten Art werden zwei Flächen F1 und F2 gebildet. In welchem - von k abhängigen - Verhältnis stehen die Flächen? Also F1 : F2= ?



Gutes Gelingen!!!

Datei ANA2GK12.K2A Datum 13.12.95 Update 28. Mai 2000 Dr. Dörte Haftendorn

A1) $f(x) = x^3 + 3x^2$ $\quad f'''(x) = 6$

$f'(x) = 3x^2 + 6x$

$f''(x) = 6x + 6$

Nullstellen

$f(x) = 0$

$x^3 + 3x^2 = 0$ $\quad$ ① $x_{N1|N2} = 0$

$x^2(x+3) = 0$ $\quad$ ② $x_{N3} + 3 = 0 \Leftrightarrow x_{N3} = -3$

N: $(0|0)$ $(0|0)$ $(-3|0)$

Extrema

$f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$3x^2 + 6x = 0$ $\quad$ ① $x_{E1} = 0$ $\quad$ $3x + 6 = 0 \quad | -3x$

$3x = 6 \quad | :3$

$x = 2$

$3x(x+2) = 0$ $\quad$ ② $x_{E2} + 2 = 0 \Leftrightarrow x_{E2} = -2$

$-2^3 + 3 \cdot (-2)^2 = 4$

E: $(0|0)$ $\quad$ $(-2|4)$

$x_{E1|E2}$ in $f''(x)$:

x_{E1}: $6 \cdot 0 + 6 = 6 > 0 \Rightarrow$ Minima

x_{E2}: $6 \cdot -2 + 6 = -6 < 0 \Rightarrow$ Maxima

Wendestellen

$f''(x) \neq 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

$6x + 6 = 0 \quad | -6$ $\quad$ $f(-1) = -1^3 + 3 \cdot (-1)^2 = -4$

$6x = -6 \quad | :6$ $\quad$ $1 + 3 \cdot 1$

$x_{W1} = -1$ $\quad$ W $(-1|2)$

$f'''(x) \neq 0$ w. A.

c) $\int_{-3}^{-1} f(x)\,dx$ $\quad$ $F(x) = \left[\frac{1}{4}x^4 + 3 \cdot \frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{4}x^4 + x^3\right]_{-3}^{-1}$

$\int_{-3}^{-1} = \frac{1}{4} \cdot -3^4 + (-3)^3 - \left[\frac{1}{4} \cdot -1^4 + (-1)^3\right]$

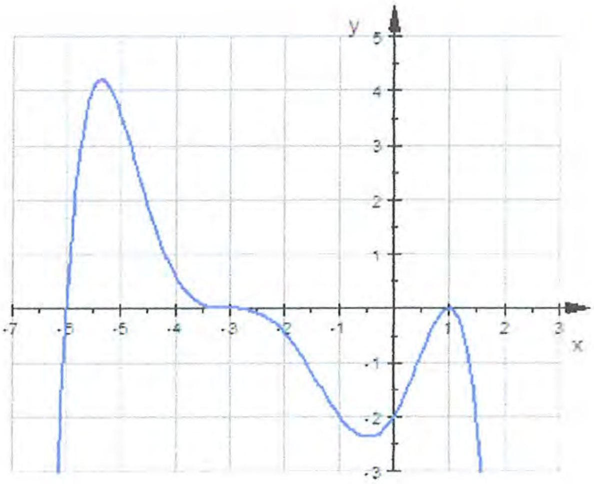
$= 20\frac{1}{4} - 27 \quad -\frac{1}{4} + 1 = +6$

Übung Analysis I

inzwischen z.T. in Mathe für alle dort ohne Rechnung.

Prof. Dr. Dörte Haftendorn 11. Juli 2006

Aufgabe Polynome



Sie sehen rechts ein Polynom mit seinen sämtlichen Nullstellen.

a) Stellen Sie erläutert eine zugehörige Gleichung minimalen Grades auf. Bestimmen Sie den Stauchfaktor genau.

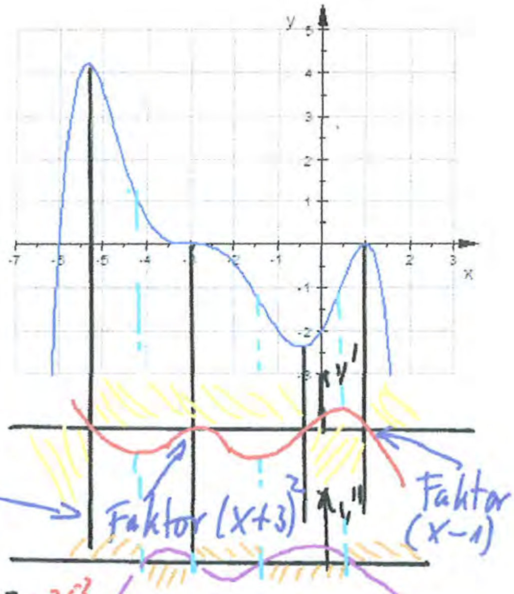
b) Zeichnen Sie den Graphen "nach Sicht" auf kariertem Papier ab und darunter mit "Felder-abstreichen" die graphische Ableitung. Zeichnen Sie darunter auch die zweite Ableitung. Markieren Sie die gegenseitigen Bezüge deutlich.

c) Die Ableitung hat folgende Darstellung: $f\,'(x) = -\frac{1}{81}(x+3)^2(x-1)(6x^2+35x+15)$
Beziehen Sie dies auf Ihre graphische Ableitung und berechnen Sie die fehlenden Extremstellen.

d) Mathix meint, aus der ausmultiplizieren Form
$f\,'(x) = -\frac{1}{81}\left(6x^5+65x^4+208x^3+126x^2-270x-135\right)$ hätte man die Klammerdarstellung aus c) auch selbst finden können. Führen Sie hierzu einen Schritt deutlich durch, deuten Sie das Weitere nur an.

$f(x) = -t\,(x+6)(x+3)^3(x-1)^2$

einfache Nst. Sattel bei -3 Berührung bei $+1$



$f(0) = -2 = -t\,6\cdot 3^3\cdot 1^2 \Rightarrow t = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$

Also $f(x) = -\frac{1}{81}(x+6)(x+3)^3(x-1)^2$

c) geg.: $f'(x) = -\frac{1}{81}(x+3)^2(x-1)(6x^2+35x+15)$

Faktoren* aus der Graphik

$f'(x)=0$ liefert alle Nullstellen zu $x=-3$ doppelt, $x=1$ einfach

kommen hinzu die Lösungen von $6x^2+35x+15=0$

$x^2+\frac{35}{6}x+\left(\frac{35}{12}\right)^2 = -\frac{15}{6}+\frac{35^2}{12^2}$

... $x = -5{,}36\ldots$ $x = -0{,}46\ldots$ passt.

d) Wegen * kann man das Horner-Schema für $x=-3$ dopp. und $x=+1$ ..... durchziehen

	6	65	208	126	−270	−135
−3		−18	−141	−201	+225	+135
	6	47	67	−75	−45	0

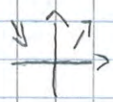
So weiter mit -3, $+1$

Es wird bleiben:

6 35 15 $\Rightarrow$ Faktor $(6x^2+35x+15)$.

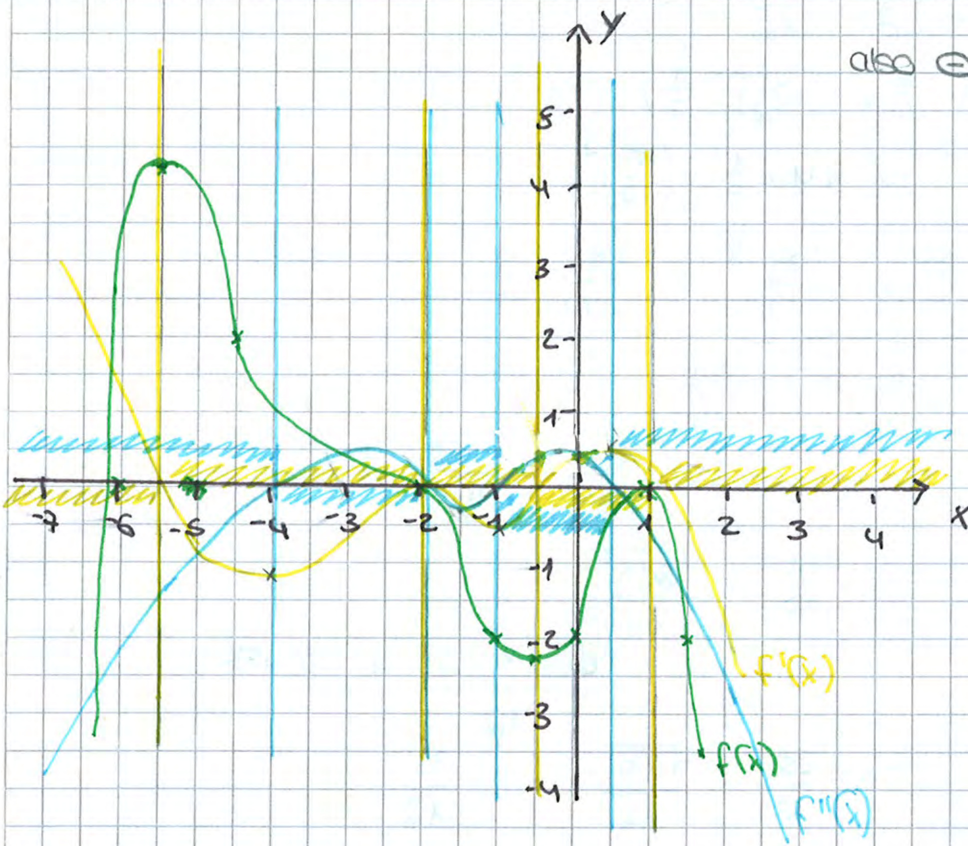
Aufgabe Polynome

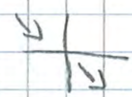
a) $f(x) = -(x-1)^2(x+3)^3(x+6)$

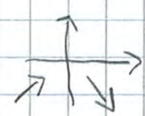
geraden Grad 

aber hier 

also ⊖



b) 1. Ableitung -> ungerader, negativer Grad 

2\. Ableitung -> gerader Grad 

Extrema $f(x) \mathrel{\hat{=}}$ NS $f'(x)$

Extrema $f'(x) \mathrel{\hat{=}}$ NS $f''(x) \mathrel{\hat{=}}$ WP $f(x)$

Zu a) Streckfaktor => x-NS!

$f(0) = -2$

$-a\cdot(x-1)^2\cdot(x+3)^3(x+6) = -2$

$-1 \quad -1 \quad -1$

$\cdot 1^2 \cdot 3^3 \cdot 6 = \frac{1}{81}$ => Streckfkt

$-160a = -2$

c) $x_{E_1} = -3 \quad x_{E_2} = -3 \quad x_{E_3} = +1$

$x_{E4|E5}: 6x^2 + 35x + 15 = 0 \quad | : 6$

$x^2 + 5\frac{5}{6}x + 2\frac{3}{6} = 0$

$x^2 + \frac{35}{6}x + 2\frac{1}{2} (\hat{=} \frac{5}{2}) = 0$

$\hookrightarrow : 2$ bzw. $\cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{35}{12}\right)^2$

$$\underbrace{x^2 + \frac{35}{6}x + \left(\frac{35}{12}\right)^2}_{} - \frac{1225}{144} + \frac{5}{2}$$

$$\left(x + \frac{35}{12}\right)^2 - \frac{865}{144} = 0$$

$$\left(x + \frac{35}{12}\right)^2 = \frac{865}{144} \quad | \sqrt{\ }$$

$x_{E4}: \quad x + \frac{35}{12} = \frac{\sqrt{865}}{12}$

$$x = \frac{\sqrt{865} - 35}{12} \approx -0{,}47$$

$x_{E5}: \quad -x - \frac{35}{12} = \frac{\sqrt{865}}{12} \quad | + \frac{35}{12}$

$$-x = \frac{\sqrt{865}}{12} + \frac{35}{12} \quad | \cdot (-1)$$

$$x = -\frac{\sqrt{865}}{12} - \frac{35}{12} = \frac{-\sqrt{865} - 35}{12} \approx -5{,}37$$

A) für Schüler ohne GTR oder CAS

Gegeben ist f mit $f(x) = \frac{1}{4}(-x^4 + 12x^3 - 54x^2 + 112x - 69)$

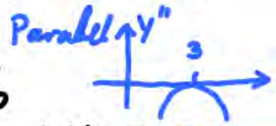
Geben Sie begründet den Gesamtverlauf von f, f' und f'' an.
Untersuchen Sie f '', schließen Sie daus auf f ' und dann auf f.
Zeichnen Sie wie üblich die Graphen von f,f' und f'' untereinanderund beziehen Sie die formgebenden Punkte aufeinander. Mathix sagt "Plattpunkt" zu einem der gefundenen Punkte. Was meint er damt? Definieren Sie "Plattpunkt" entsprechend.

Plattstelle

Ha

$f(x) = \frac{1}{4}(-x^4+12x^3-54x^2+112x-69)$
$f'(x) = \frac{1}{4}(-4x^3+36x^2-108x+112)$
$f''(x) = \frac{1}{4}(-12x^2+72x-108)$

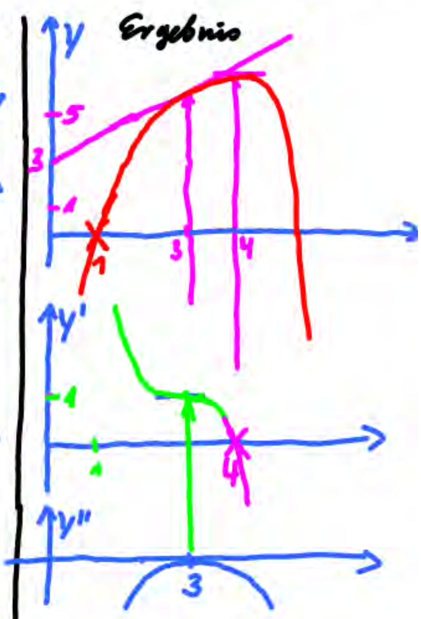
Dem Rechnen zugänglich ist nur f'': Wendestellen müssen $f''(x)=0$ lösen



$-12x^2+72x-108=0$
$x^2-6x+9=0$
$(x-3)^2=0$
$x=3$ doppelte Nullstelle Schluss daraus Blau

Kein VZW in f'' ⇒ keine Extremstelle in f' sondern Sattelstelle in f'

Ordinate $f'(3)=\frac{1}{4}(-4\cdot 27+36\cdot 9-108\cdot 3+$
$f'(3)=1$ Schluss daraus Grün



f' muss als Polynom 3. Grades nun rechts von x=3 genau eine Nullstelle haben. $f'(x)=0 \Longleftrightarrow -4x^3+36x^2-108x+112$
Teiler von 56 kommen infrage.
Hornerschema für x=4

	−4	36	−108	112
4		−16	80	−112
	−4	20	−28	$\boxed{0}$

Also $f'(4)=0$, weitere Nullstellen von f' kann es nicht geben, da f' wegen des Sattels monoton (fallend) ist.
Schluss daraus lila (mit ||)
Damit liegt für f' bei x=4 ein VZW vor, also ist x=4 Extremstelle von f.
Ordinaten $f(4)=\frac{27}{4}$ ||, $f(3)=6$ ||
f hat also in $(4|\frac{27}{4})$ ein Maximum, das ergibt sich aus dem Gesamtverlauf.

f hat in (3|6) einen "Plattpunkt" mit Steigung 1
Die Tangente dort kann nicht wieder überschritten werden.
Also muss es zw. −3 und 3 eine Nullstelle geben.
Also Teiler von 69 kommt x=1 infrage.
Probe: $f(1)=0$ ||
$69=3\cdot 23$ $f(23)<0$
also keine weitere ganzzahlige Nullstelle.
Schluss daraus rot.

Weitere Ableitungsregeln

10.08.09

$f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f = u \cdot v$ $\boxed{\text{Produktregel}}$

Zur Erinnerung

$$m_{sek}(x,h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\downarrow h \to 0$$

$$m_{tang}(x) = f'(x)$$

was differenzierbar ist, ist auch stetig.

Beweis $f = u \cdot v$:

$$\frac{u(x+h) \cdot v(x+h) \overbrace{- u(x) \cdot v(x+h) + u(x) \cdot v(x+h)}^{0} - u(x) \cdot v(x)}{h}$$

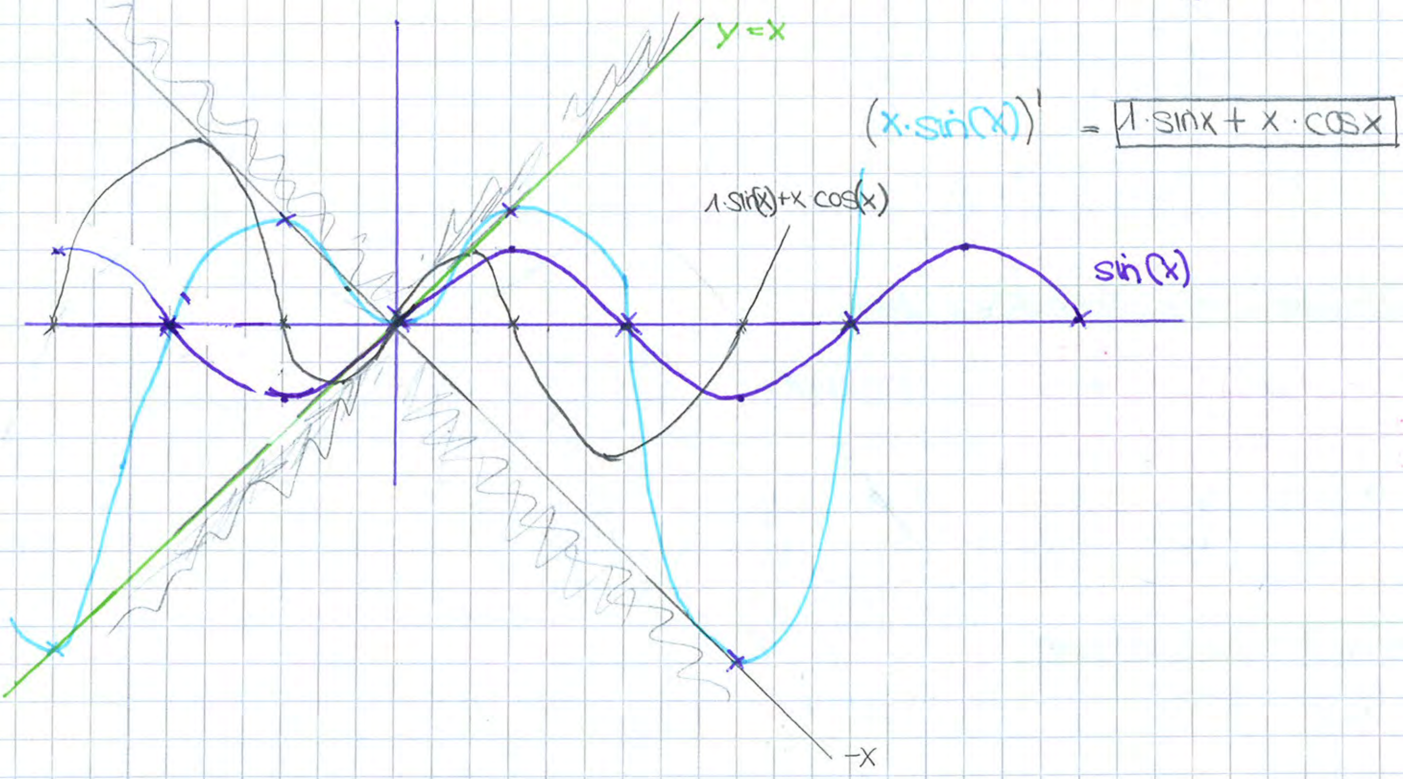
$$\Leftrightarrow \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \cdot v(x+h) + \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \cdot u(x)$$

$$\downarrow h \to 0 \qquad \downarrow h \to \qquad \downarrow h \to 0$$

$$\boxed{(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x)}$$

kurz: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$

~~Verkettung~~ Produkte: Wo einer Null ist, ist eine NS der ~~Verkettung~~
Wo einer 1 ist kommt der andere raus
Wo einer −1 ist kommt der Negative raus



Erinnerung Kettenregel

$$h(x) = f(g(x)) \Rightarrow \boxed{h'(x)} = \frac{dh(x)}{dx} = \frac{df(z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$= \frac{dy}{dx} \boxed{= \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}}$$

$$\left.\begin{array}{l} h(x) = \sin x^2 \\ f(z) = \sin z \\ z = g(x) = x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{dy}{dz} = \cos z \\ \frac{dz}{dx} = 2x \end{array}\right\} (\sin(x^2))' = \cos z \cdot 2x$$

$$= \cos x^2 \cdot 2x$$

$$= 2x \cdot \cos x^2$$

Umkehrfunktion

Umkehrfkt und Ursprungsfkt müssen sich zusammen aufheben.

f ist Umkehrfkt von g, wenn gilt $f(g(x)) = x$

Bsp:

1. $e^{\ln x} = x$ & $\ln(e^x) = x$
2. $\sqrt{x^2} = x$ & $\sqrt{x}^2 = x$
3. $\arcsin(\sin x) = x$

   $\sin(\arcsin x) = x$

   $\sin^{-1}(\sin x) = x$

   $\sin(\sin^{-1}(x)) = x$

Ableitung der Umkehrfunktion

$$\boxed{\underbrace{f(g(x))}_{z} = x}$$

Kettenregel: $\frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$

$$\frac{df(z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dg(x)}{dx} = \frac{1}{\frac{d(f z)}{dz}}$$

Anwendungsbeispiel:

1. $f(x) = e^x$ $\quad f'(x) = e^x$ $\quad f(z) = e^z$ $\quad \frac{df(z)}{dz} = e^x$

   $g(x) = \ln x$ $\quad g'(x) = \frac{1}{x}$

2. $f(x) = x^2$ $\quad f(z) = z^2$ $\quad f'(z) = 2z$

   $g(x) = \sqrt{x}$ $\quad g'(x) = \frac{1}{2z} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

nur 2009

Lernpaket Umkehrfunktion I

Ha 16.06

Def. $f: x \longrightarrow f(x)=y$ sei eine
„eineindeutige" Funktion

d.h. es gibt zu jedem Bild y
nur ein Urbild x
d.h. auch die Funktion

$g: y \longrightarrow x$ existiert für $D_g = W_f$

Def.bereich Wertebereich

g und f heißen $W_g = D_f$
Umkehrfunktionen voneinander
Meist schreibt man f und f^{-1}

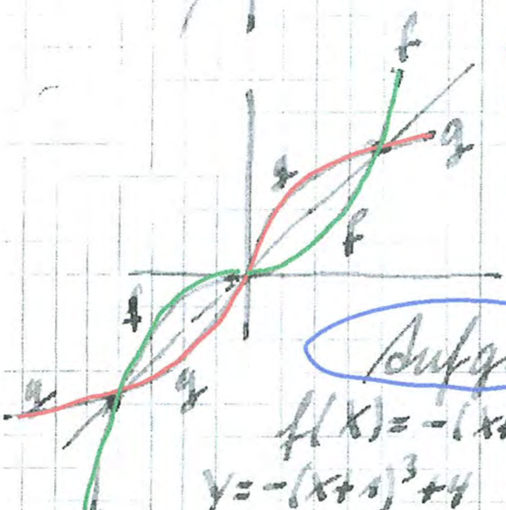
$y=f(x)=x^3 \Rightarrow \sqrt[3]{y}=x$

$g(y)=\sqrt[3]{y}$

Umtaufe damit auch bei g die unabhängige Variable nach rechts gezeichnet wird

$g(x)=\sqrt[3]{x}$

$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$



Graphen an y=x Spiegeln

Aufgabe Bestimme die Umkehrfkt.

$f(x)=-(x+1)^3+4$

$y=-(x+1)^3+4$

nach x auflösen

$y-4=-(x+1)^3$

$4-y=(x+1)^3$

$x+1=\sqrt[3]{4-y}$

$x=\sqrt[3]{4-y}-1$

→ Umtaufe ← ansehen im DMS

$y=\sqrt[3]{4-x}-1$

$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{4-x}-1$

ebenso $y=(x-1)^2+2=f(x)$ $D_f: x\le 1$

$\Rightarrow g(x)=y=-\sqrt{x-2}+1$ $D_g: x\ge 2$

weil $D_f=W_g$ sein muss.

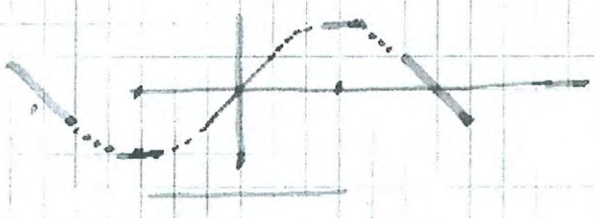
Lernpaket Umkehrfkt. II

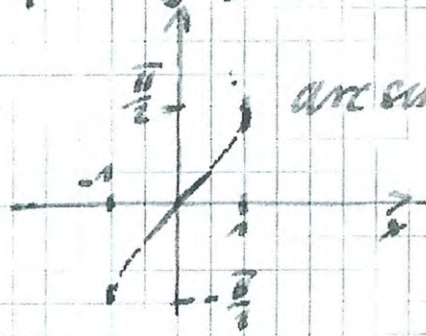
Ha 16.06

$y = f(x) = \sin x$ | $y = f^{-1}(x) = \arcsin x$

$D_f = \mathbb{R}$ | $D_{f^{-1}} = [-1, 1]$

$W_f = [-1, 1]$ | $W_{f^{-1}} = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ Hauptwerte





$\sin x = \frac{1}{2}$ | $x = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ Hauptwert

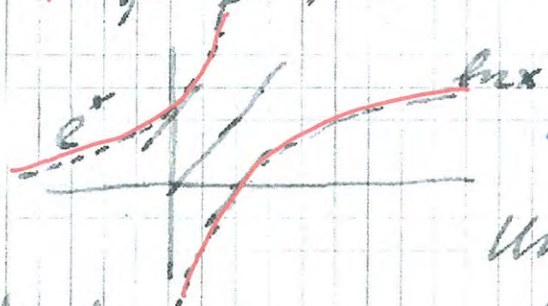
alle Lösungen

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \wedge x = -\frac{\pi}{6} + (2k+1)\pi$

$k \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $k \in \mathbb{Z}$

immer zeichnen ← Keine Formeln lernen!

$y = f(x) = e^x$ | $y = f^{-1}(x) = \ln x$



Definition

Aufgabe:

$y = f(x) = 3e^{7x+5}$

Umkehrfkt.

$\ln y = \ln(3e^{7x+5})$

$\ln y = \ln 3 + \ln e^{7x+5}$ hebt sich auf wegen Umkehrfkt / Log-Gesetz

$\ln y = \ln 3 + 7x + 5$

$7x + 5 = \ln y - \ln 3$

$7x = \ln y - \ln 3 - 5$

$x = \frac{1}{7}(\ldots)$

Merke

$$\boxed{\begin{array}{l} e^{\ln x} = x \\ \ln e^x = x \end{array}}$$

Umtausch

$y = \frac{1}{7}(\ln y - \ln 3 - 5) = f^{-1}(x)$

evt. weiter $y = \frac{1}{7} \ln \frac{y}{3} - \frac{5}{7}$

③ $f(g(x)) = \sin(\underbrace{\sin^{-1} x}_{z})$

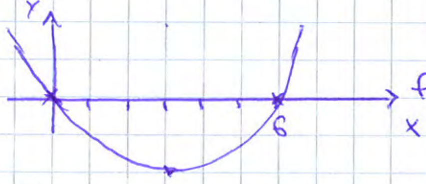
$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\cos z} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{1-\sin^2(\arcsin x)}$$

$$(\sin^{-1})' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Funktionenschar: **Wirkung vielfacher Nullstellen**

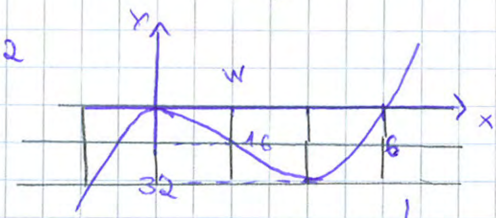
$f_k(x) = x^k \cdot (x-6)$

$k = 1$



$f_1(x) = (x-6)\cdot x$

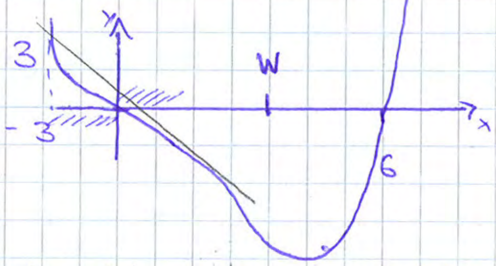
$k = 2$



$f_2(x) = (x-6)\cdot x^2$

„Affenkasten"

$k = 3$

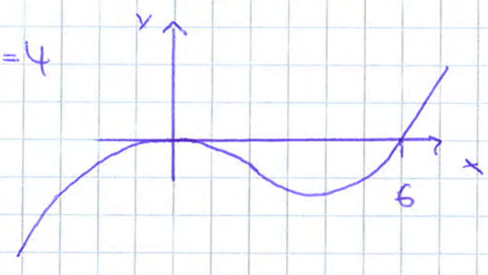


$f_3(x) = (x-6)\cdot x^3$

„Pantherkäfig"

Wendetangente schneidet bei -3 ⇒ abstände werden übertragen

$k = 4$



$f_4(x) = (x-6)\cdot x^4$

k gerade

k - fache Nullstellen

$f(x) = \frac{1}{25}(x-3)^4 \cdot x^7 + 1$

ungeschickt, besser unten!

- Graph
- alle Extrem- & Wendestellen

$f'(x) = \frac{11x^{10}}{25} - \frac{24x^9}{5} + \frac{486x^8}{25} - \frac{864x^7}{25} + \frac{567x^6}{25} = \frac{x^6 \cdot (x-3)^3 \cdot 11x-21}{25}$

$f''(x) = \frac{22x^9}{5} - \frac{216x^8}{5} + \frac{3888x^7}{25} - \frac{6048x^6}{25} + \frac{3402x^5}{25}$

$= \frac{2 \cdot x^5 \cdot (x-3)^2 \cdot (55x^2 - 210x + 189)}{25}$

① $f'(x) = 0$

Sattel	Max ($\hat{=}1{,}9$)	Min
$x_{1} = 0$	$x_{2} = \frac{21}{11}$	$x_{3} = 3$
$y_{1} = 1$	$y_{2} = 6{,}23$	$y_{3} = 1$

$f''(x_{1}) = 0$ ⇒ in f' $-0{,}1$ & $0{,}1$ einsetzen → ⊕ → ⊕ ⇒ Sattel

$f''(x_{2}) = -27{,}65$ ⇒ Max

$f''(x_{3}) = 0$ ⇒ f' $2{,}9$ & $3{,}1$ einsetzen ⊖ → ⊕ ⇒ Min

② $f''(x) = 0$

$x_{w1} = 0$	$x_{w2} = \frac{-3 \cdot (\sqrt{70} - 35)}{55}$	$x_{w3} = \frac{3 \cdot (\sqrt{70} + 35)}{55}$
$y_{w1} = 1$	$y_{w2} = 4{,}13$	$y_{w3} = -213{,}72$

Sattelpunkt

$x_{w4} = 3$ $y_{w4} = 1$ ⇒ Min.

$f'''(x) = \frac{198x^8}{5} - \frac{1.728x^7}{5} + \frac{27.216x^6}{25} - \frac{36.288x^5}{25} + \frac{3.402x^4}{5}$

$= \frac{18x^4 \cdot (x-3) \cdot (55x^3 - 315x^2 + 567x - 315)}{25}$

$f'''(x_{w1}) = 0$ ⊕ → ⊕

$f'''(x_{w2}) = -62{,}20$

$f'''(x_{w3}) = 28.159{,}8$

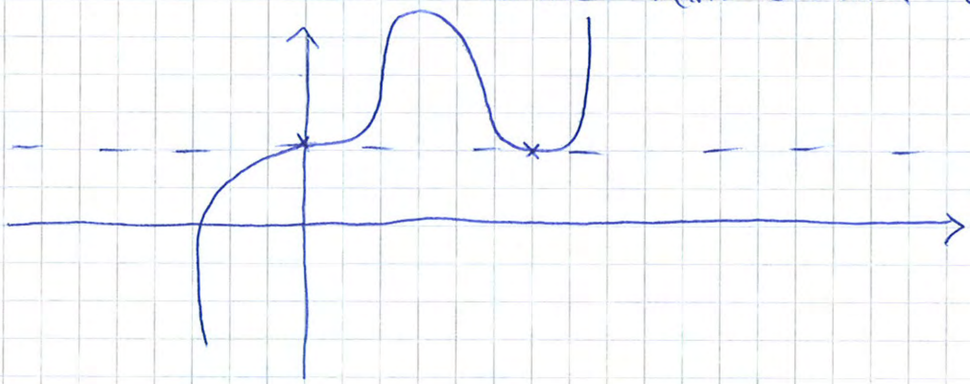
$f'''(x_{w4}) = 0$ kein WP ⇒ Min

③ Nullstellen

$$\boxed{\begin{aligned} x_{N1} &= -0{,}744 \\ y_{N1} &= 0 \end{aligned}}$$

$\Rightarrow$ klar ist: f hat einen breiten Sattel in $x = 0$

" " breites Minimum in $x = 3$

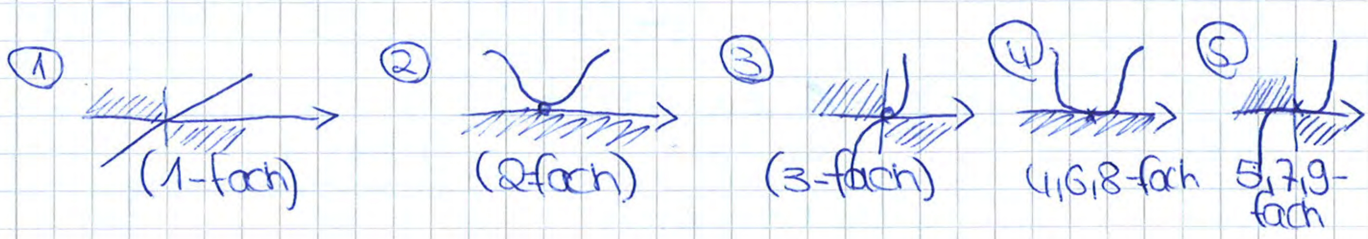


17.06.09 **Allgemeine Wirkung mehrfacher Nullstellen**

Betrachtung: $f(x) = (x-a)^k \cdot g(x)$ g diff'bar und nicht oszilierend

Wenn $g(a) \neq 0$ ist, dann heißt a k-fache NS von f.

5 Möglichkeiten



<u>k-ungerade:</u> f hat in a einen VZW

<u>Beweis:</u> $\varepsilon > 0$: $f(a-\varepsilon) = (a-\varepsilon-a)^k \cdot g(a-\varepsilon)$

$$= (-\varepsilon)^k \cdot \underbrace{g(a-\varepsilon)}_{>0}$$

o.B.d.A. ohne Beschränkung der Allgemeinheit, sei $g(a) > 0$

$$= \underbrace{-\varepsilon^k < 0}_{\boxed{\text{links von a} \ominus}}$$

$$f(a+\varepsilon) = (a+\varepsilon-a)^k \cdot g(a+\varepsilon)$$

$$= (\varepsilon)^k \cdot \underbrace{g(a+\varepsilon)}_{>0}$$

$$= \underbrace{\varepsilon^k > 0}_{\boxed{\oplus \text{ rechts von a}}}$$

<u>k gerade:</u> f hat in a keinen VZW

<u>Beweis:</u> $\varepsilon > 0$: $f(a \pm \varepsilon) = (\pm\varepsilon)^k \cdot \underbrace{g(a\pm\varepsilon)}_{>0}$

$$= \underbrace{+\varepsilon^k \wedge -\varepsilon^k}$$

sowohl links als rechts $\oplus$ da gerader Exponent.

Wir „diskutieren" $f(x) = (x-a)^k \cdot g(x)$, $g(a) \neq 0$

$$f'(x) = k \cdot (x-a)^{k-1} \cdot g(x) + (x-a)^k \cdot g'(x)$$

$$= (x-a)^{k-1} \cdot \left((kg(x) + (x-a) \cdot g'(x) \right)$$

$$f'(a) = 0 \cdot (\underbrace{k \cdot g(a)}_{\neq 0} + \underbrace{0 \cdot g'(a)}_{0 \text{ außer } g'(a) = \infty})$$

$\Rightarrow$ a ist $(k-1)$-fache Nullstelle von f'

~~f(a)~~ f hat in a eine Extremstelle $\Leftrightarrow$ f' hat in a VZW wenn $(k-1)$ ungerade.

($\rightarrow$ Ist k gerade kein VZW)

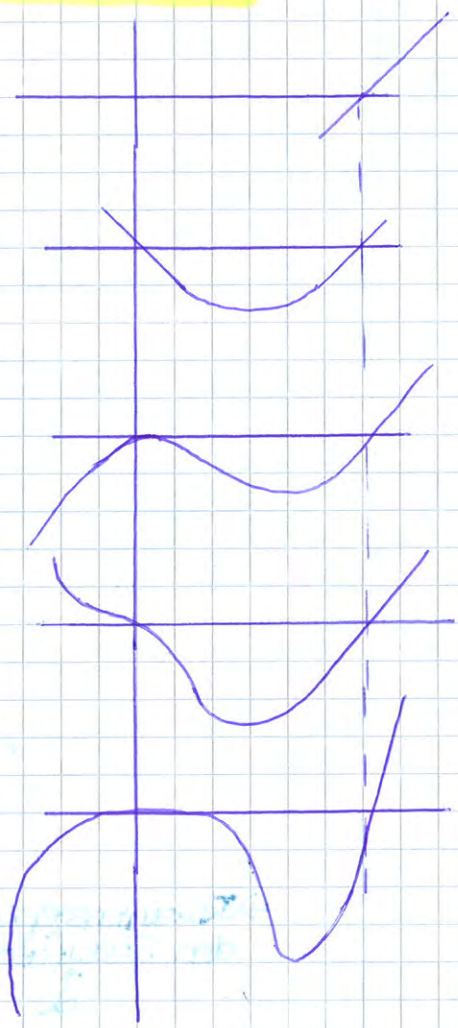
$k=1$: $f'(a) = 1 \cdot (k \cdot g(a)) \neq 0$

$\Rightarrow$ einfache NS $\Rightarrow$ schrägen Nulldurchgang (Tangente = 1)

k ungerade für $k \geq 3$ $\Rightarrow$ f' hat in a eine Geradfache NS $\Rightarrow$ f' hat keinen VZW $\Rightarrow$ f hat in a kein Extremum aber f' hat ein Extremum $\Rightarrow$ a ist Wendestelle von f (Sattel)

Fr. Ruwisch 2Std } Ausarbeitung
Übung 2Std }
Mathe + Computer 2 Std
Mathe + Geschichte 2 Std
Didaktik-Wochenendseminar Herr Hillers

$f(x) = x^k (x-6)$



Schulüblich zu Extremstelle:

B: x_e ist Extremstelle, wenn

$f'(x_e)=0 \wedge f''(x_e)\neq 0$, hinreichend aber nicht notwendig

A

$A \Rightarrow B$

B ist notwendig für A und A ist hinreichend für B

(wenn B nicht gilt gibt es auch kein A)

$\neg B \Rightarrow \neg A$ wenn nicht B gilt, kann auch A nicht ($\neg$) gelten.

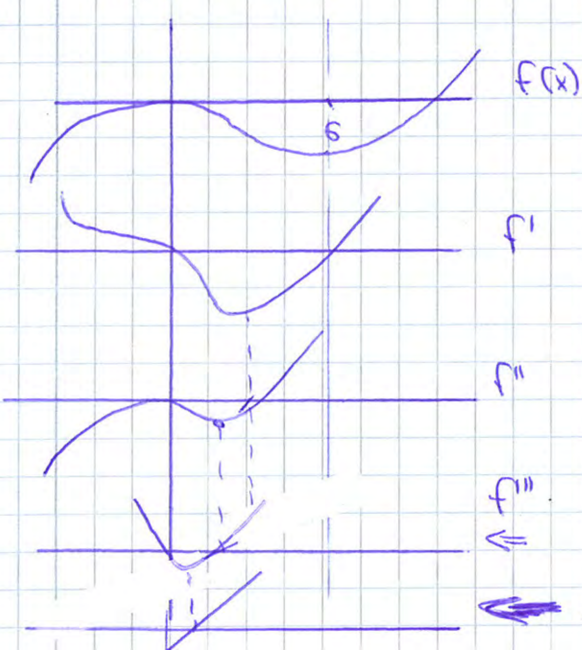
x_e Extr. $\underset{\text{notw.}}{}$ $\Rightarrow$ $\underset{\text{hinreich.}}{}$ $f'(x_e)=0$

↯ $f'(x_e)=0 \not\Rightarrow$ Ext.ste. f.A.

$f'(x_e)=0 \wedge f''(x_e)\neq 0 \Rightarrow$ Ex.st

" " $\Leftarrow$ " f.A. ↯

wenn die 1. nicht verschwindende Ableitung geraden Grad hat



$f'(x_e)=0 \wedge f^{(n)}(x_e)\neq 0$

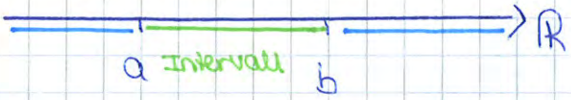
und n gerade $\Rightarrow x^e$ ist Extremst.

und n ungerade $\Rightarrow$ xe ist Wendestelle

$\Leftarrow$ 1. verschw. Ableitung $\overbrace{f''''}^{4=n=\text{gerade}} \Rightarrow$ Extremstelle

Grundlegendes zur Differentialrechnung

16.06.09



$\mathbb{R}$ reele Zahlen

- abgeschlossenes Intervall $\boxed{J = [a,b]}$
- offenes Intervall $\boxed{J =]a,b[}$
- Funktion $f: \text{Def.} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longrightarrow y = f(x)$$

Z

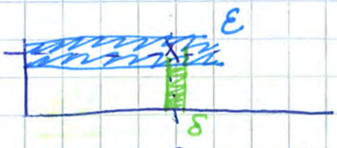
Z

- Unterschied Def.bereich vs. Wertebereich

(- Bei Folgen: $a: n \to a_n$ $(\text{Def}_a = \mathbb{N})$)

- a heißt Maximumstelle von f wenn gilt: in einer Umgebung von a $f(x) \leq f(a)$, $U_\varepsilon(a) =]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$

- f heißt stetig in a $U_\delta(a)$, wenn

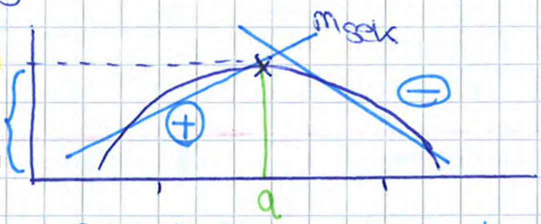


für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $U_\delta(a)$
wenn ihr Funktionswert von beiden Seiten an den Grenzwert herangeht

Satz: f sei differenzierbar in einem offenen Intervall J, $a \in J$
a ist Extremstelle von f $\Rightarrow$ $f'(a) = 0$ ist eine notwendige Bedingung für eine lokale Extremstelle

Beweis

Sekanten müssen durch das Extremum verlaufen



$m_{sek}(li) > 0$

$m_{sek}(re) < 0$

Sekanten der linken Seite positive Steigung

der rechten Seite negative Steigung

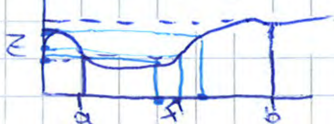
$\Rightarrow f'(a) = 0$

Die wichtigsten Sätze

① Der Zwischen-Wert-Satz

Eine stetige Funktion die versch. Werte annimmt, nimmt auch jeden Wert dazwischen an

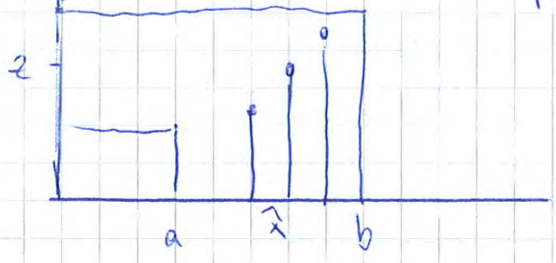
f : R --> R



d.h. $\exists \hat{x} : f(\hat{x}) = z$

Beweis

Ein abgeschlossenes Intervall hat ein Intervall als Bild. Darin ist das Intervall [f(a) , f(b)] enthalten. O..B.d.A sei. f(a)<f(b). z sei aus diesem Intervall. Es gibt in hinreichend kleiner Umgebung von z Folgen von Funktionswerten, die gegen z konvergieren. Damit ist auch z selbst Funkrionswert.

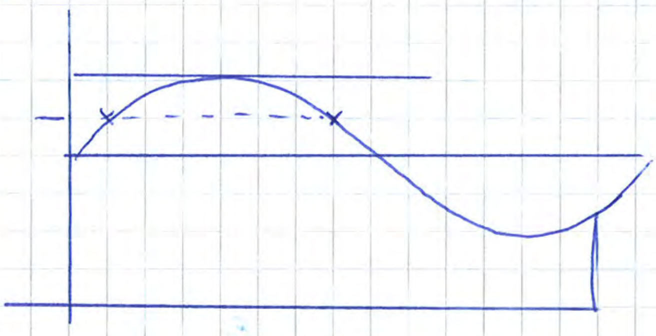


$$f(a_n) < z < f(b_n)$$
$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$
$$c = f(\hat{x}) = c$$
$$z \qquad \qquad z$$

Anmerkung: wäre f: Q --> Q, dann könnte man dieses Argument nicht verwenden, da nur in R alle Folgen gegen ein Element aus R konvergieren.

② Der Satz von Rolle (Ahrens, S. 303)

f sei differenzierbar in einem Intervall. Zwischen 2 Stellen mit gleichen Werten existiert eine Extremstelle.



(Zwischen 2 NS muss es ein Extremum geben)

⇒ deswegen brauch man keine 2. Ableitung ≠ 0 ✓ wenn man nur eine mgl. Extremstelle zw. zwei Nullstellen hat

③ Der Mittelwertsatz

Zwischen 2 versch. hohen Werten gibt es auf der x-Achse ein $\hat{x}$ mit f ' (x dach)= Steigung der Sekante

k-fache Nullstellen

Vorzeichenwechsel-Kriterium:

$$\boxed{\text{f sei stetig differenzierbar in J. f hat in x = a eine Extremstelle wenn f' wechselt in a das Vorzeichen. f hat in a eine Wendestelle wenn f' hat in a eine Extremstelle}}$$

Grammatik!!!

↳ Vorsicht: f darf nicht oszillierend in a sein. (hin und herschwingend)

Beweis: a Extremstelle ⇒ f '(a) = 0

① 

② 

links positive Tangente
rechts neg. Tangente

22.06.09

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{5}\left(x^3 + x^2 - 9x - 9\right)} = \frac{1}{5}\cdot(x-3)(x+1)(x+3)$$

Grad 3
Gesamtverlauf 3.Q --> 1.Q.
Also links Max, rechts min
siehe unten

3 Nullstellen: $x_{N1} = 3 \quad x_{N2} = -1 \quad x_{N3} = -3$

$f'(x) = \frac{1}{5}\cdot 3x^2 + 2x - 9$ $\quad \frac{9}{5}$

$f''(x) = \frac{2}{5}(3x+1)$

$f'''(x) = \frac{6}{5}$

CHMX-ser

nicht empfehlenswert, leider üblich

Extremstellen:

$f'(x) = 0$

$y_{E1} = \frac{-8\cdot(11\cdot\sqrt{7}+19)}{135} \approx -3{,}35 \qquad y_{E2} = \frac{8\cdot(4\cdot\sqrt{7}-19)}{135} \approx 1{,}009$

$x_{E1} = \frac{2\cdot\sqrt{7}+1}{3} \approx 1{,}431 \qquad x_{E2} = \frac{-(2\cdot\sqrt{7}-1)}{3} \approx -2{,}097$

$\frac{1}{\sqrt{3}}$-fach Extremum von der NS

$f''(x_E) \neq 0$:

x_{E2}: $-2{,}1166 \quad \left(-\frac{4\sqrt{7}}{5}\right) < 0 \Rightarrow$ Max

x_{E1}: $2{,}1166 \quad \left(\frac{4\cdot(\sqrt{7}+1)}{5}\right) > 0 \Rightarrow$ Min

unnötig s.o.

Wendestellen:

$f''(x_W) = 0 \Rightarrow x_{W1} = -\frac{1}{3} \qquad y_{W1} = -\frac{32}{27}$

$f'''(x) \neq 0$ w. A. da $f'''(x) = \frac{6}{5}$

unnötig s.o.

---

① Funktion zerlegen: $f(x) = \frac{1}{5}(x+1)(x^2-9)$

② Gesamtverlauf: da $+x^3$

dies ist besser

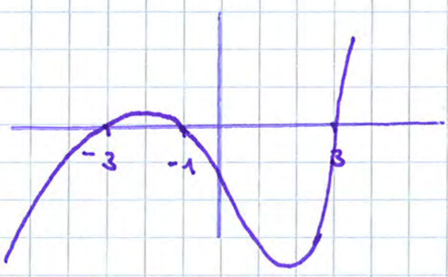
③ Nullstellen:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \lor x^2 - 9 = 0$

(!) oder (!)

$\Leftrightarrow x = -1 \lor x = 3 \lor x = -3$

Also:



Erwartung: $-3 < x_{E1} < -1$ Max

$-1 < x_{E2} \leq 3$ Min

$-1 < x_W < x_{E2}$ WP

Polynom 4. Grades wie Abb. 2.1. Übersicht

mit Plattstelle

2. Ableitung: $(x-2)^2$

Achtung

nicht nur Terme sondern f(x)=....

1. Ableitung: $\frac{1}{3}(x-2)^3 + 1$

Hauptfkt.: $\cancel{\frac{1}{12}(x+2)^4}$ $\frac{1}{12}x^4 - \frac{2x^3}{3} + 2x^2 - \frac{5x}{3}$

ja

Gesamtverlauf:

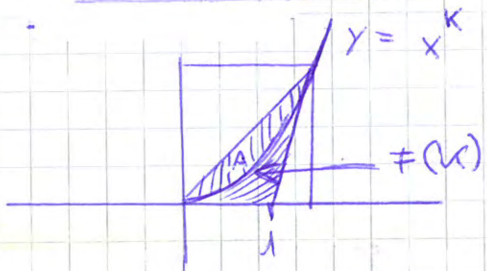
weg $+x^4$

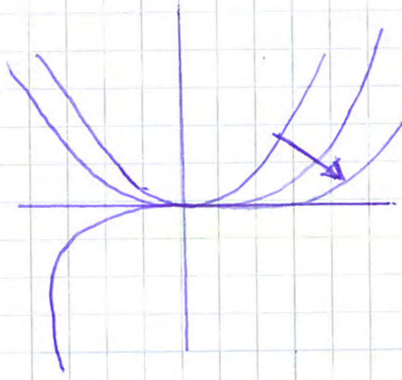
Nullstellen: $x_{N1} = 0$ und eine x_{N2} nach Sicht $1 < x_{N2} < 1{,}5$

Satz von Rolle $\Rightarrow$ es existiert mind 1 Extremstelle x_e mit $0 < x_e < x_{N2}$

Siehe auch Poly4 mit Plattstelle beir "Kurvendiskussion"

Potenzfunktion





drückt sich immer weiter in die Ecke

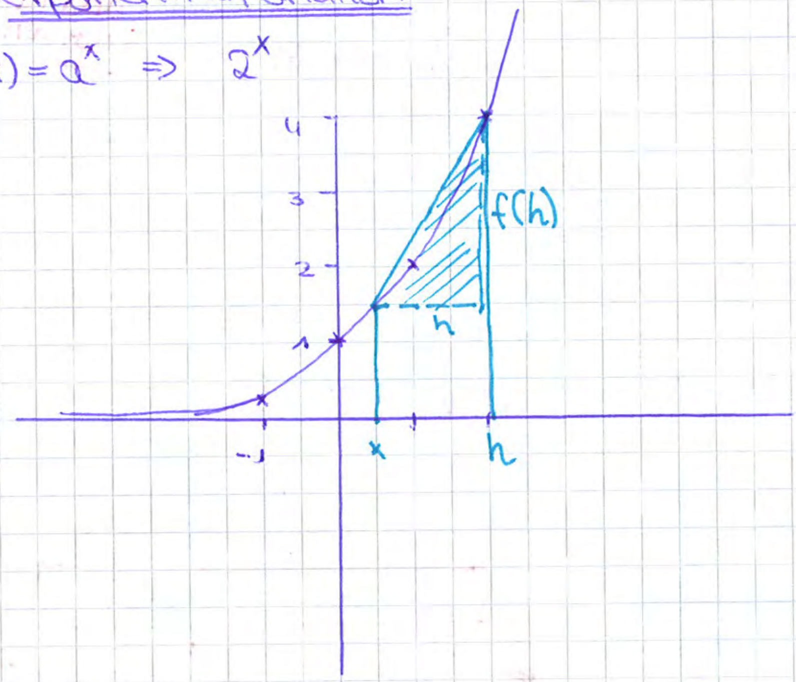
steht im Internet

$A : F = k : 1$

ausf. Seite unten

Exponentialfunktion

$f(x) = a^x \Rightarrow 2^x$



je größer die Basis a desto steiler.

mit einem Stauchfaktor kann die eigene Ableitung erzeugt werden

Beweis: $m_{sek} = \dfrac{a^{x+h} - a^x}{h}$

$= \dfrac{a^x \cdot a^h - a^x}{h}$

$= a^x \dfrac{(a^h - 1)}{h}$ Stauchfaktor

⇒ Tangentensteigung bei 0 erzeugt den Staufaktor ⇒ der die Ableitung

= Funktion verlaufen lässt

↓

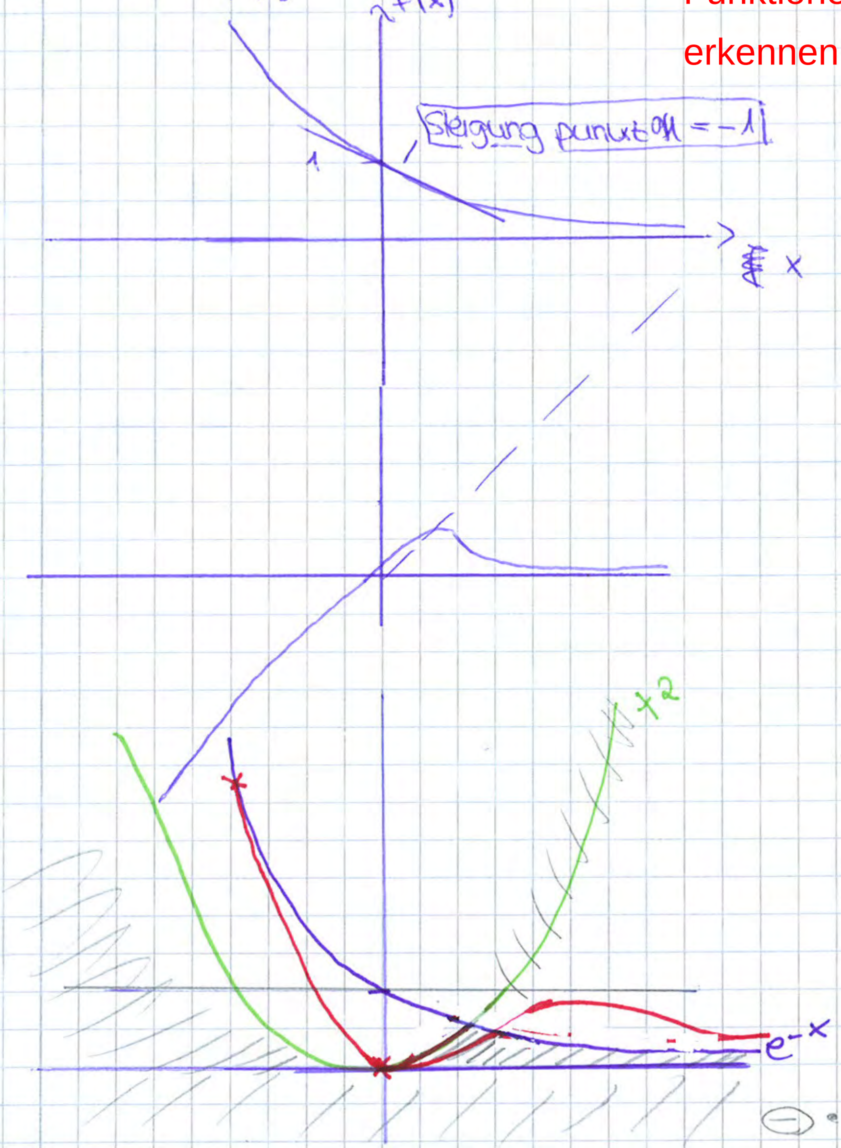
$a^x \cdot m_{tang}$ im Pkt(0|1)

$f(x) = x^k \cdot e^{-x}$

- Induktion mit Teilen
- Geometrische Folge Spinne
- Rekursion
- Ableiten (Produktregel)
- Exponentialfunktionen (Flächentrennung Sommer 2002)
- Extremwertaufgabe (Frosch-Aufgabe

Afg: $f(x) = x^{\alpha} \cdot e^{-x}$

Funktionen aus Bausteinen
erkennen und Schlüsse daraus ziehen.



in Produkten:
e-Fkt. ist stärker als jede
Potenz von x

dazwischen

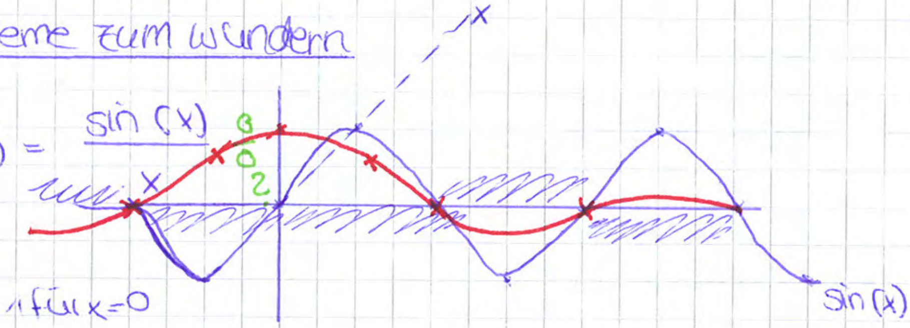
⊖ · ⊖ gibts nicht!

⇒ 2 WP bei Sattel 3 WP

⇒ 2 Extrema wenn $x^{k \to \text{gerade}}$

Probleme zum wundern

$f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$



$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \quad \text{„}\frac{0}{0}\text{"} \underset{l'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

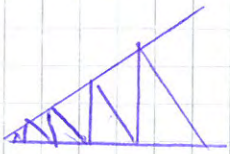
$\Rightarrow$ Behauptung f, g diff.bar $f(a) = 0$ und $g(a) = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Als Vorschau!!!!

Beweis siehe Zettel

Bsp: Spinne

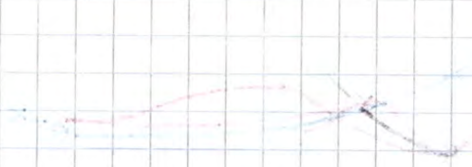


$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{\sin x} \leftarrow \infty \left[\frac{1}{0} \Rightarrow \infty \text{ f.A.} \right]$$

$$\frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} \qquad \frac{2\,\cancel{\sin(x)} \cdot \cos(x)}{\cancel{\sin x}} = 2\cos x$$

Üben:

$\dfrac{x^2}{1 - \cos x}$	$\dfrac{1 - \cos x}{x}$	$x \cdot \ln x$



Titel: Datum: 29.06.09

www.mathe-verstehen.de ⇒ Beispiel 7) runterladen

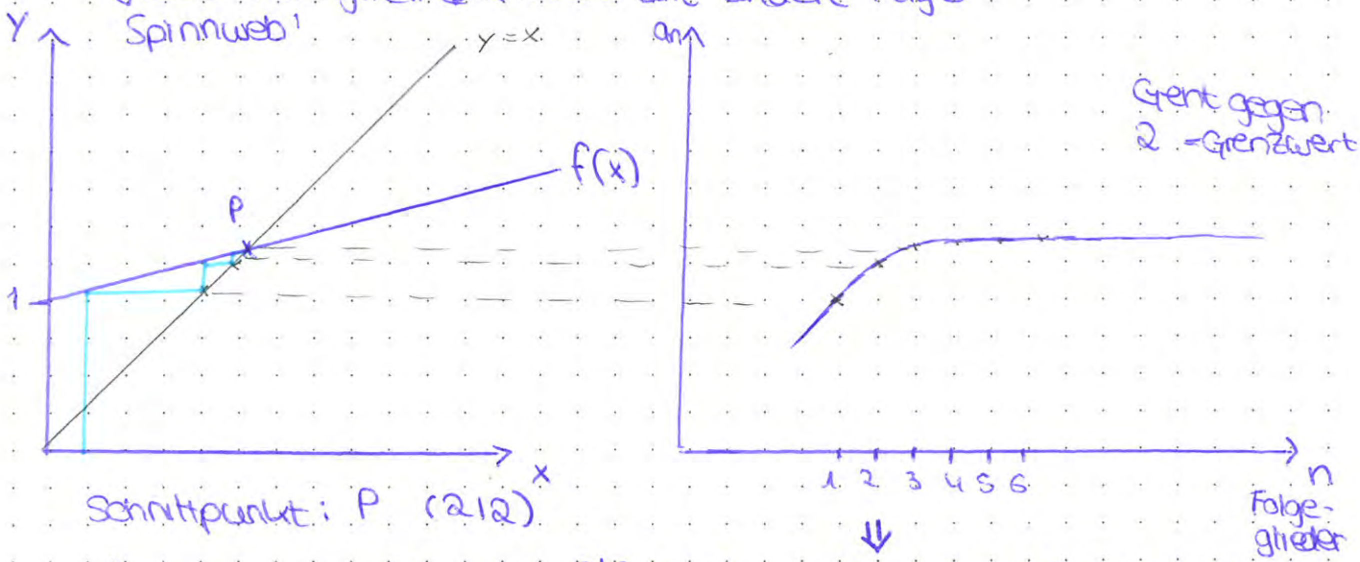
Rekursive Folgen

$a_n = f(a_{n-1})$

$a_n = \frac{1}{2} a_{n-1} + 1$ Trägerfkt: $\frac{1}{2}x + 1$

Jedes Startglied definiert eine andere Folge

Spinnweb'



Schnittpunkt: P (2|2)

$f(x) = x$ Steigung: $f'(x) = \sigma$

Schnittpunkt einsetzen

⇓ Darstellung der expliziten Folge

$x > |1|$ ⇒ abstoßend

$x < |1|$ ⇒ anziehend

$x = |1|$ ⇒ undef.

Einzugsbereich ⇒ Bereich in dem man startet und zum Fixpunkt gelangt.

Wessler 2002

Quadrat

$S_n = n^2$ ⇒ explizit ⇒ $S_n = \sum_{i=1}^{n} (2i-1)$

$S_n = S_{n-1} + a_n$ rekursive Form der S_n

$a_n = a_{n-1} + 2$ ⇒ Begründ auf Zeichnung

$a_n = 2 \cdot n - 1$ ⇒ explizite Form

	a_n Mutterfolge	Summenfolge S_n
n	kä dazu	kä ges
1	-	1
2	3	4
3	5	9
4	7	16

Titel: Datum: 30.06.09

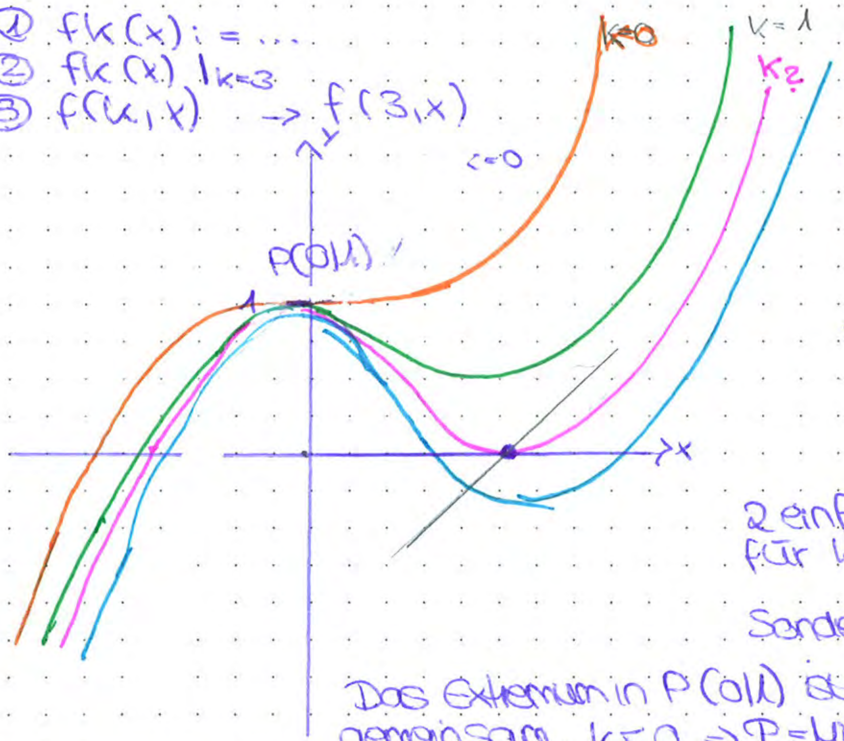
Kurvenscharen

$f_k(x) = x^3 - kx^2 + 1$

Gesamtverlauf

Für TI:

① $fk(x) := \ldots$
② $fk(x) |_{k=3}$
③ $f(k,x) \rightarrow f(3,x)$



$= x(3x-2k)$

$f_k'(x) = 3x^2 - 2kx$

$f_k''(x) = \cancel{6x} - 2k$

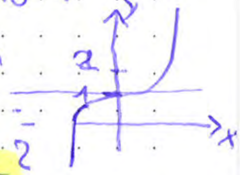
⇒ gesicherte Extremstellen:

$x_1 = 0 \quad \vee \quad x_2 = \frac{2k}{3}$

$y_1 = 1 \quad \vee \quad y_2 = 1 - \frac{4k^3}{27}$

2 einfache Nullstellen bei $f_k'(x) = 0$ für $k \neq 0$.

Sonderfall: $k = 0$: $f_0(x) = x^3 + 1$



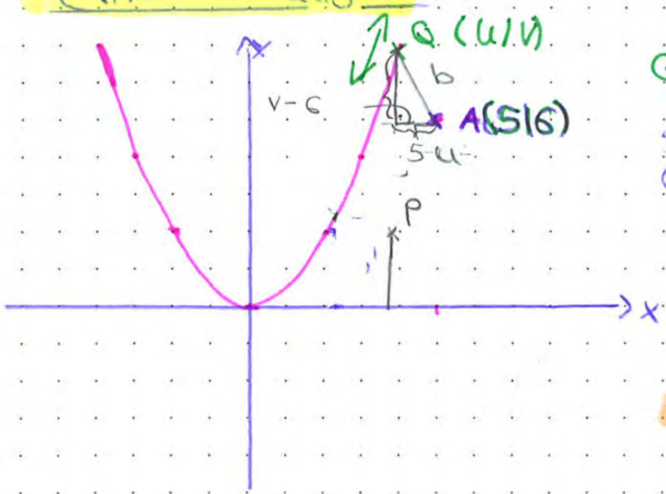
Das Extremum in P(0|1) ist für alle Kurven gemeinsam. $k < 0 \Rightarrow P = \text{Min.}$ | $k > 0 \Rightarrow \text{Max.}$

b) rosa: Für welches k wird die x-Achse genau berührt?

Der notwendige Wendepunkt liegt dazwischen. Aus dem Affenkasten folgt $\Rightarrow x_w = \frac{2k}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1k}{3}$

Ansatz: $y_{E2} = 0$ setzen $\Rightarrow \frac{3 \cdot 2^{\frac{1}{3}}}{2} \approx 1{,}889\ldots$ in Klausur: keine Dezimal

Extremwertaufgabe



Q wandert - wann ist b am kleinsten.

Strecke b auf x-Achse abtragen unter Q. Endpunkt ist P.

Extremale Abstände von A zur Parabel

$A(5|6) \quad f(x) = y = x^2$

$Q(u,v) \rightarrow v = u^2 \Rightarrow$ NB

Zielgröße: Länge der Strecke b

wir wissen A u. Q: $b^2 = (v-6)^2 (5-u)^2$

Zielgröße: $b = \sqrt{(v-6)^2 - (5-u)^2}$

NB einsetzen $b = \sqrt{(u^2-6)^2 - (5-u)^2} \Rightarrow$ Zielfunktion wir betrachten $g(u) = b^2(u) = (\dots)^2 + (\dots)^2$ = Extremstellen sind die selben?

$g'(u) = 0 \Rightarrow$ Extremstelle

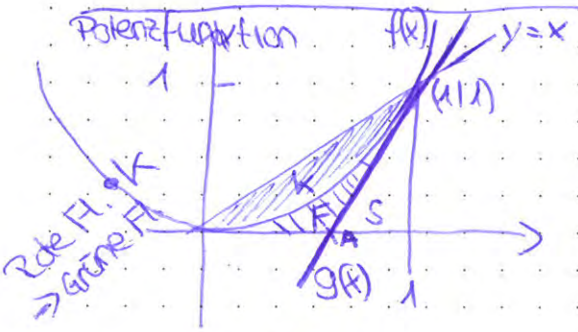
$\Rightarrow$ quadrierung geht nur wenn f(x) komplett über 0 liegen

Vorsicht, Quadrieren kann zusätzliche Extrema bringen!

hier ist bei A eine Berührung da 1. bei A durchgeht

je Nullstelle $\Rightarrow$ erzeugt ein Extremum

Hierzu folgt die Aufgabestellung unten.



$x^{2,4} \Rightarrow$ wurzel $\Rightarrow$ darf nicht aus negativen Zahlen gezogen werden $\Rightarrow$ deshalb nur der „linke" Arm bei ganzzahligen Potenzen

$x^{\frac{42}{10}} = \sqrt[10]{x^{42}}$

$= \left(\sqrt[10]{x}\right)^{42}$

F passt F mal in k

F = 2, passt 2 mal in k

$f_k(x) = x^k$

Ziel: Flächenberechnung $= k$

1. Schritt: Tangente bestimmen

① $f_k'(x) = k \cdot x^{k-1}$ ($\Leftarrow$ Ableitung)

$f_k'(1) = k \cdot \underbrace{1^{k-1}}_{1} = k$

② Geradengleichung:

$g(x) = k \cdot (x-1) + 1$

$= kx - k + 1$

$(x-1)+1$

③ $g(x) = 0 \qquad k(x-1)+1 = 0 \quad |-1 \quad |:k$

$x - 1 = -\frac{1}{k} \quad |+1$

$\boxed{x = 1 - \frac{1}{k} \Rightarrow A}$

alternativ:

$m = k = \frac{\text{hoch}}{\text{breit}} = \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{k} = b \Rightarrow x_A = 1-k = 1 - \frac{1}{k}$

$J = \int_0^b x^k \, dx = \left[\frac{1}{k+1} \cdot x^{k+1}\right]_0^1 = \frac{1}{k+1} - 0 = \frac{1}{k+1}$

Ges. $= \frac{1}{2} - J = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-2}{2(k+1)} = \frac{k-1}{2(k+1)}$

$F = J - \text{Ges.} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{2k} = \frac{2k-k-1}{(k+1) \cdot 2k} = \frac{k-1}{(k+1) \cdot 2k}$

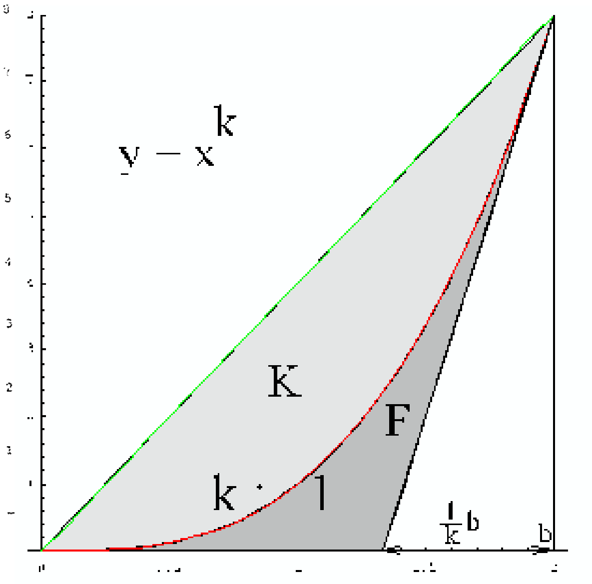
Klausur-Aufgabenquelle aus meinem Affenkastenheft, hier Rechnung oben

V. Potenzfunktionen

Es können hier Aussagen über Potenzfunktionen vom Grad k mit k>1 gemacht werden. Folgerungen ergeben sich über solche Polynome, die aus diesen Potenzfunktionen durch Addition eines linearen Terms entstehen. Für 0<k<1 gelten die gespiegelten Verhältnisse. Bei k<0 entstehen bekanntlich ganz andere Graphen, die eine direkte Übertragung nicht erlauben.

V.A. Reine Potenzfunktion vom Grad k , k>1

f(x)=x^3, b=2, Flächenverhältnis hell:dunkel=3:1

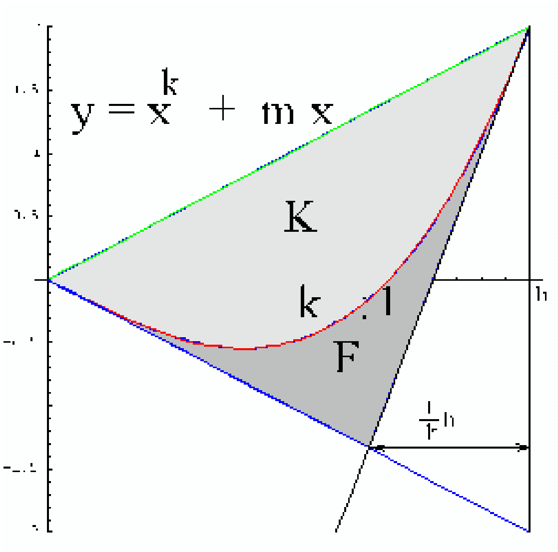


Funktionen f mit $f(x) = x^k$ und k>1 bilden mit der x-Achse und der Geraden $x=b$ eine Fläche der Größe $\frac{b^{k+1}}{k+1}$. Die Tangente im Punkt P schneidet die x-Achse an der Stelle $\frac{k-1}{k}\,b$, d.h. der Abstand dieser Nullstelle von b verhält sich zu b wie k : 1.

Diese Tangente bildet mit der Tangente im Ursprung das Flächenstück F (dunkelgrau). Das konvexe Parabelsegment habe den Inhalt K (hellgrau). Aus elementaren Integrationen ergibt sich:

$$\boxed{\text{K und F stehen im Verhältnis } \mathbf{k : 1}}$$

$f(x)=\frac{1}{2}x^3-1x$, K:F=3:1



V.B. Gescherte Potenzfunktion vom Grad k , k>1

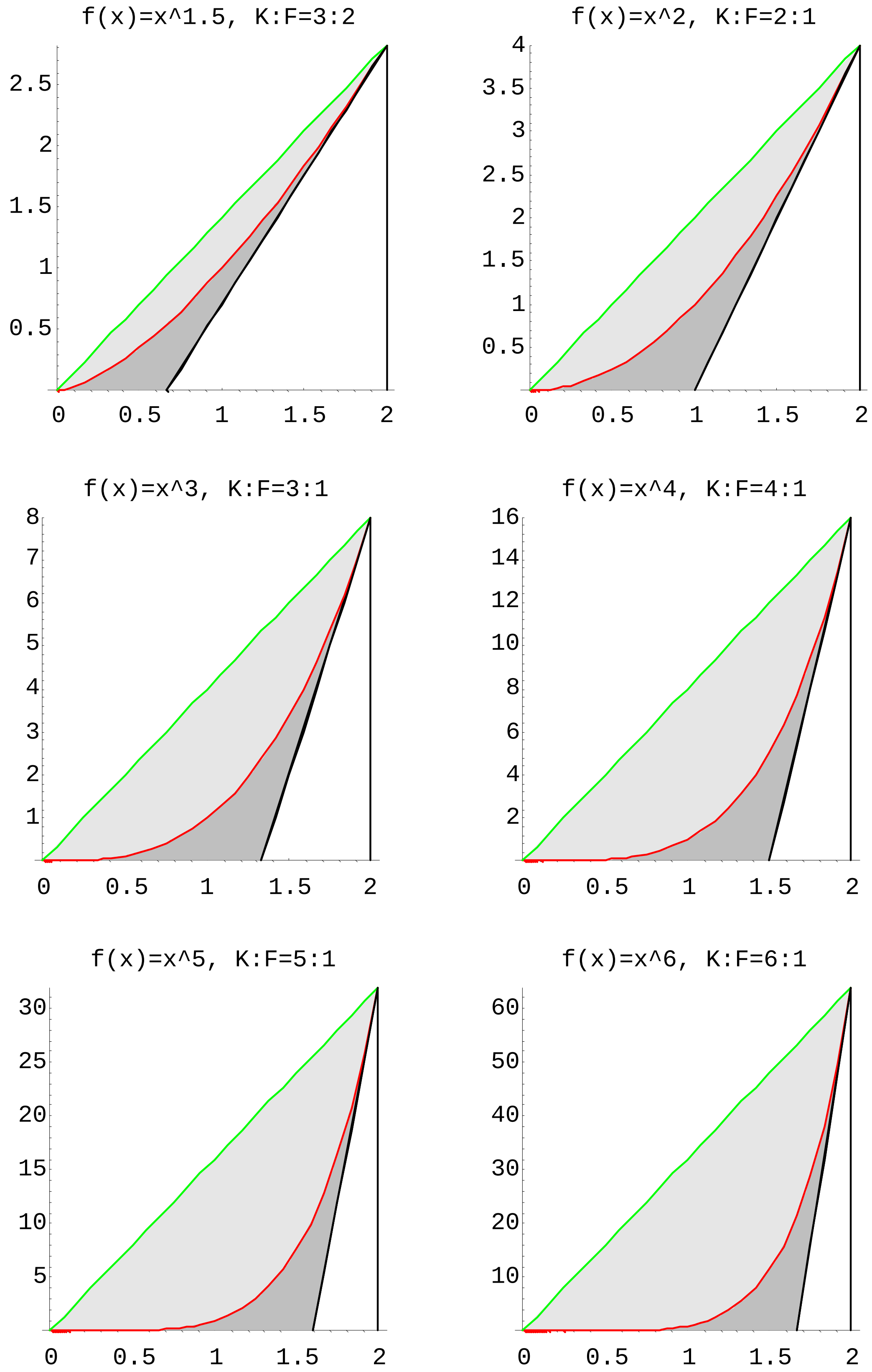
Dieselben Flächengrößen und dieselben Längenverhältnisse gelten auch für gescherte Potenzfunktionen. Hier wurde durch Addition der Geraden $y = m\,x$ mit der y-Achse als Scherachse um den Scherwinkel α mit $\tan\alpha = m$ geschert.

Für ganzzahlige k haben die Polynome f mit $f(x) = x^k + m\,x$ bei ungeradem k im Ursprung einen Wendepunkt, bei geradem k eine Plattstelle[3]. Die eine Tangente muss durch diesen besonderen Punkt gehen, die andere Tangente ist beliebig. Dann gilt das angegebene Flächenverhältnis k : 1 .

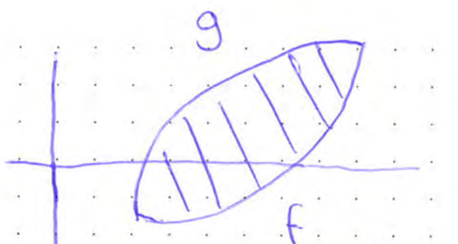
Auf Wendetangenten anderer Polynome läßt sich das Ergebnis nicht übertragen, wie am Ende von IV. gezeigt wurde. Für nicht-ganzzahlige k ist f nur für nichtnegative x definiert und eine Fortsetzung nach links ist nicht möglich. Dennoch gelten auch in diesen Fällen die angegebenen Flächenverhältnisse.

3 Das ist eine Nullstelle der 2. Ableitung, bei der die 2.Ableitung nicht das Vorzeichen wechselt.

Übersicht über die "Zeltflächen"-Verhältnisse bei den Potenzfunktionen.



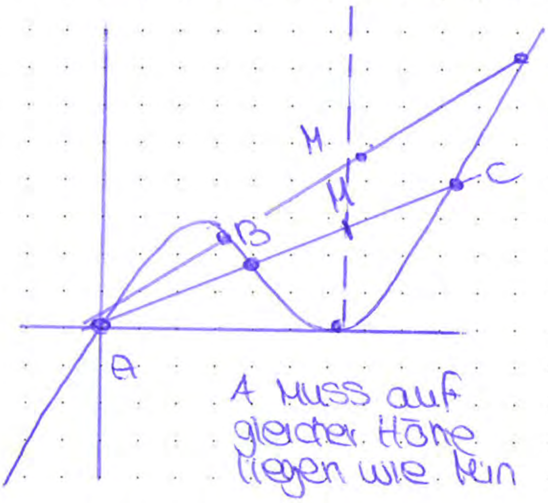
Titel: Datum:



-10 -10

$$\int (g(x) - f(x))\, dx$$

Formel für Integration von Differenzflächen



A muss auf gleicher Höhe liegen wie Min

Vorschlag zum Üben!

Mitte wandert auf der gestr. Parallelen zur y-Achse d. Min. wenn Sehne steiler wird.

Beweis!

Rekursion: allg. Zentr. Streckung: $S = a_0 \cdot \frac{1}{1-q}$

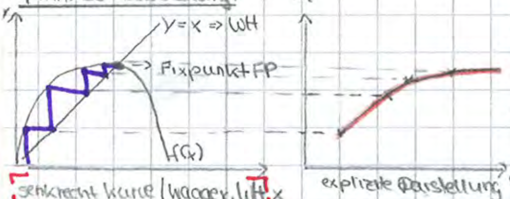
explizit: Anfangsglied → jedes Glied
rekursiv: vorangegangenes Glied → nächste
konvergent: Folgen mit Grenzwert
divergent: Folgen ohne — " —
Reihe: Addition d. Folgenglieder
Nullfolge: nähern sich Null an $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

arithmetische Folgen: ~~rekursiv~~ $a_n = a_{n-1} + d$ | $a_{n+1} - a_n$
~~explizit~~: $a_1 + (n-1) \cdot d$
~~Summe~~: $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

geom. Folgen: ~~rekursiv~~: $a_n = a_{n-1} \cdot q$
~~explizit~~: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
~~Summe~~: $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

Trägerfkt: a_n durch x ersetzen

Spinnweb-Darstellung:



senkrecht Kurve / waager. WH — explizite Darstellung

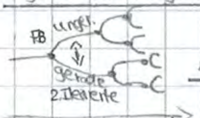
Grenzwert: Es liegen endlich viele Werte außerhalb & innerhalb von ε, das ε muss beliebig klein werden können und trotzdem dürfen nur endlich viele y-Werte außerhalb von ε liegen. Wenn die Werte einmal in ε sind, bleiben sie dort. Gehen sie wieder raus → kein Grenzwert (links-/rechtsseitig: linker & rechter GW müssen stimmen)

Berechnung: $a_n = \frac{4x^2 - 1}{x^2 + 1}$ $| : x^2$ ⇔ $\frac{4 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}$ ⇔ $\lim_{x\to\infty} \frac{4-0}{1-0} = 4$

Untersuchung FP
1. $f(x) = x$ 2. 1. Abl. v. $f(x)$
2. Bsp: $S = x$ $f'(S) = \ldots S$ → für x ersetzen
↳ Ergebnis: < 1 anziehend ⇒ FP entspricht GW d. Folge
> 1 abstoßend ⇒ FP entspricht nicht GW Folge
$= 1$ undef

Iteration: für x nochmal $f(x)$ einsetzen: $f(x) = 3x^2$
2. Iterierte: es wird nur jeder 2. Wert berechnet $f(f(x)) = 3 \cdot (3x^2)^2 = 3 \cdot 9x^4 = 36x^4$

Feigenbaum-Diagramm / Bifurkation:



Bei r = 4 springt Folge unter x-Achse, 2 Möglichkeiten:
1. festes x bei Scheitel $rx(1-x)$ → NS bekannt Spannweite durch 2 teilen ⇒ x_E
y-Wert − US = f(x), r = 4

2. Fester Scheitel: wenn x-Wert d. NS < y-Wert Steitel $-a(x-2)^2 + 4$ ⇒ sagt mir NS ⇒ NS einsetzen, die muss bei 4 sein, weil wenn der x-Wert < y-Wert d. Scheitels → Folge unter x-Achse

Insel in d. Ruhe: die Iterierte tritt mit ihren Min 3x die WH → bei Rhythmus. Hört bei r = 4 auf, weil Folge-Glied unter x-Achse auf Graphen trifft → Rest geht nach unten weg.

Vollständige Induktion: Behauptung: $6 | 7^n - 1$ ∀n
IV: $n = 1$: $7^1 - 1 = 6$, $6|6$ i.O.
IA: bis n gilt: $6 | 7^n - 1$, also ∃k∈ℕ: $6 \cdot k = 7^n - 1$ ⇔ $6k + 1 = 7^n$
IS: für n+1 gilt: $6 | 7^{n+1} - 1$, also ∃r∈ℕ: $6 \cdot r = 7^{n+1} - 1$
Schritt: $n \to n+1$: $7^{n+1} - 1 = 7^n \cdot 7^1 - 1 = (6k+1) \cdot 7 - 1$
$= 6k \cdot 7 + 7 - 1 = 6k \cdot 7 + 6 = 6(7k+1)$, r∈ℕ

Verschiedene Summen
1. Quadratzahlen: $\frac{1}{6} n \cdot (n+1)(2n+1)$
2. natürl. Zahlen: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} n(n+1)$
3. Potenzd. Kubikzahlen: $\sum_{i=1}^{n} i^3 \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right)^2 = a_n$
4. Rechteckfolge Theon: $\left(\frac{a_{n-1} + 2}{a_{n-1} + 1}\right)$

Stetigkeit: wenn jeder Wert einer Fkt als Grenzwert erreicht wird

Verkettung v. Fkt: Summe: eins auf andere
Produkt: wo einer 0 ist ist die NS d. Ergebnisses
wo —"— 1 ist kommt der andere raus
wo —"— −1 ist —"— negative —"—

Potenzfunktion

Fläche unter $f(x) = x^k$

$\int_0^b f(x)\,dx = \int_0^b x^k \cdot dx$
$= \left[\frac{x^{k+1}}{k+1} + C\right]_0^b$
$= \frac{b^{k+1}}{k+1} + C - \left(\frac{0^{k+1}}{k+1} + C\right)$
$= \frac{b^{k+1}}{k+1} + C - C = \boxed{\frac{b^{k+1}}{k+1}}$

Differentialrechnung

stetige Fortsetzung:

bei gebrochen rat. Fkt. darf der Nenner nicht 0 sein, sofern sich der Term vereinfachen lässt, klammern wir aus & kürzen ⇒ ACHTUNG: Durch kürzen ist neue Fkt entstanden

Der Grenzwert der Sekantensteigungsfkt. ≙ Steigung d. Tangente:

$m_{sek} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ⇒ $f'(x) = m_{tang}$, $h \to 0$

Sekantensteigung → GW ⇐ Differenzenquotient → Differentialquotient $\frac{d}{dx}$

Der GW der Sekantensteigung = Steigung Tang.

Kettenregel: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Produktregel: $f(x) = u(x) \cdot v(x)$
$\frac{u(x+h) \cdot v(x+h) - u(x) \cdot v(x+h) + u(x) \cdot v(x+h) - u(x) \cdot v(x)}{h}$
⇔ $\frac{u(x+h) - (u(x))}{h} v(x+h) + \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \cdot u(x)$
⇔ $u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x)$

Ableitung Umkehrfkt: $f(g(x))$ ⇒ $\frac{df(z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$, z
Bsp: $f(x) = x^2$ $f(z) = 2z$
$g(x) = \sqrt{x}$ $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{z}}$

Gebrochenrationale Funktion

1. Hornerschema: $x^4 + 7x^3 + 15x^2 + 7x - 6$

Ganzzahlige NS stecken wenn im x-losen Glied, also: 1, 2, 3, 6, −1, −2, −3, −6

	1	7	15	7	−6
−3	0	−3	−12	−9	+6
	1	4	3	−2	0

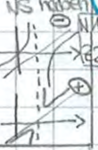
$x^3 + 4x^2 + 3x - 2$ ⇒ neuer Term $\cdot (x+3) \triangleq$ NS

(1) Polstelle: senkr. Asymptote = Def.lücke
Nullstellen d. Nenners sind d. Lücken
(2) Nullstellen: NS des Zählers
(3) Asymptote: Polynomdivision
⇒ asy(x) und Rest g(x) ⇒ kein Rest, irgendwo ein Fehler
weil $asy(x) + g(x) = f(x)$ genau wie:
$asy'(x) + g'(x) = f'(x)$

Bedingung für Polstelle: $P_N(x_N) = 0$ u. $P_Z(x_N) \neq 0$

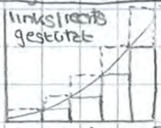
zu (3): wenn der senkrecht gemessene Abstand zur Funktion den Grenzwert 0 hat
Hebare Def.Lücken: wenn Zähler + Nenner gem. NS haben

Grad Zähler = Grad Nenner ⇒ waager. Asy
—"— < —"— ⇒ x-Achse Asy
—"— > —"— ⇒ y-Achse asy
wenn der Nenner ungeraden Grad ⇒ VZW
Grad Asy: Zählergrad − Nennergrad
Potenzen: $\frac{1}{(x-a)^s}$ $\begin{cases} s \text{ gerade kein VZW} \\ s \text{ ungerade} \Rightarrow \text{VZW} \end{cases}$



Integralrechnung

$O_S | \dot{\,} | - U_S \sqcap$ $f(x) = x^2$



Die Obersummen sind um das gestrichelte Stück gr. als Untersu.
Die OS hat GW $\frac{1}{3}$ ⇒ Integral auch $\frac{1}{3}$ weil GW von O_S und U_S gleich.

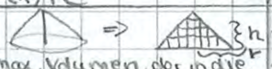
Hauptsatz der Differential- & Integralrechnung

$F_a(x) = \int_a^x f(t) \cdot dt$ $F'_a(x) = f(x)$, $F_a(x) = F_x$

$f(x) \cdot h < F(x+h) - F(x) < f(x+h) \cdot h$ $| : h$
$f(x) < \frac{F(x+h) - F(x)}{h} < f(x+h)$ ⇒ $h \to 0$
$f(x) < F'(x) < f(x)$

Ist f stetig, existiert F(x) mit $F'(x) = f(x)$. F heißt Stammfkt von f(x). Sie unterscheidet sich durch eine Konstante: $F(x) + C$

Extremwertaufgaben

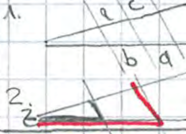


Gesucht: Zylinder mit max. Volumen, der in die Kuppel passt

Zielgröße: $V = G \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$
NB: $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$ ⇔ $h = \frac{R-r}{R} \cdot H$
Zielfunktion: $\pi \cdot r^2 \cdot \frac{R-r}{R} \cdot H$ ⇒ ableiten
⇒ Extremum

Strahlensatz

a zu b verhält sich wie c zu d



$\frac{\text{gr. Parallele}}{\text{kl. —"—}} = \frac{\text{gr. Abstand z}}{\text{kl. —"— z}}$

Fläche S: $\frac{b}{k} \cdot b \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{b^2}{2k}}$

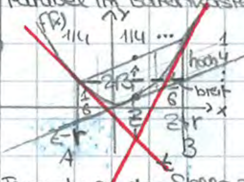
Fläche F: $\boxed{\frac{b^{k+1}}{k+1} - \frac{b^2}{2k}}$

Fläche K: Gr. △ − Fläche f(x)
$\boxed{\frac{b^2}{2} - \frac{b^{k+1}}{k+1}}$

Beispiel f. k = 5 u. b = 1:
F: $\frac{1^6}{6} - \frac{1^2}{2 \cdot 5} = \frac{1}{15}$ | K: $\frac{1^2}{2} - \frac{1^2}{6} = \frac{1}{3}$ } K : F = 5 : 1
⇒ Flächen werden k : 1 geteilt!

Polynome 3. + 4. Grades / Parabeln

Parabel im Parabelkasten



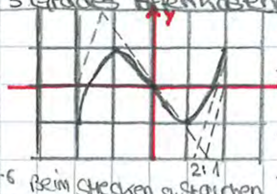
Steigung AB:
$m = \frac{\text{hoch}}{\text{breit}} = \frac{4zr}{2r} = 2z$
hoch: $(z+r)^2 - (z-r)^2$
$= 2zr + 2zr = 4zr$

Tangente an der Stelle z: $g(x) = y = f'(z)(x-z) \cdot f(z)$

Beweis: $f(x) = \frac{1}{4} x^2$
$f'(x) = \frac{1}{2} x$
$g(x) = \underbrace{\frac{1}{2} z}_{f'} \cdot \underbrace{(x-z)}_{x-z} \underbrace{\left(\frac{1}{4} z^2\right)}_{f(z)}$
$t(x) = \frac{z+r}{2}(x - (z+r)) + \frac{1}{4}(z+r)^2$
$g \cap t$: ⇒ $x = z + \frac{r}{2}$ q.e.d.

Tangentengleichung allg.: $f'(z) \cdot (x-z)$

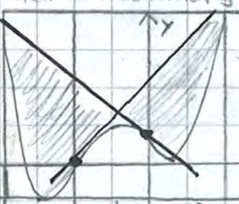
3. Grades Affenkasten



- WP + EP = 1 Zelle
- NS = $\sqrt{3}$ d. EP
- Wendetang. = „Dach"
  ↳ schneidet Eckkästchen 2:1
- EP liegen 1 Rasterbreite v. WP entfernt
- EP voneinander = 2x Rasterbreite
- ursprungssymmetrisch

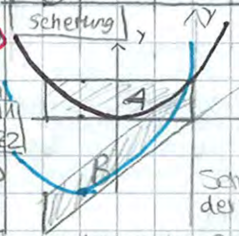
Beim Strecken o. Stauchen bleiben Teil- und Flächenverhältnisse gleich

4. Grad-Phantomkäfig



- genau 2 WP
- Flächen links und rechts zwischen Wendetangenten gleich groß
- Abstand von WP zu WP → 1 Rasterbreite

Scherung



Pattstelle: Steigung 1, die Tangente dort kann Tangente nicht wieder überschnitten werden

Scherachse: Schnittpunkt der Tangente mit x-Achse

- Addition einer Geraden
- Flächen- & Teilverhältnisse
- A & B Flächengleich

Grundlegendes zur Differentialrechnung

- a heißt Maximumstelle von f wenn in einer Umgebung von a gilt: $f(x) \leq f(a)$, I_f, a
]a−ε, a+ε[$m_{sek}(li) > 0$ | $m_{sek}(re) < 0$
- f sei differenzierbar in einem offenen Intervall]a∈[. a ist Extremstelle v. f ⇒ $f'(a) = 0$ ⇒ notwendige Bedingung

Zwischenwertsatz:
Eine stetige Funktion die verschiedene Werte annimmt, nimmt auch jeden zwischen an

Der Satz von Rolle:
f sei differenzierbar in einem Intervall zwischen 2 Stellen mit gleichen Werten (NS ⇒ y, eher 2 x-Werte) existiert eine Extremstelle

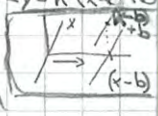
Mittelwertsatz:
Zwischen 2 verschiedenen hohen Werten gibt es ein $\bar{x}$ auf der x-Achse

x_e ist Extremstelle, wenn $\underbrace{f'(x_e) = 0}_{B} \wedge \underbrace{f''(x_e) \neq 0}_{A}$

B ist notwendig für A, und A hinreichend für B
wenn B nicht gilt, gilt A auch nicht: ¬B ⇒ ¬A
$f'(x_e) = 0 \wedge f''(x_e) \neq 0$ ⇒ Ex. stelle
Ex. stelle ⇒ $f'(x_e) = 0$ hinreichend ODER

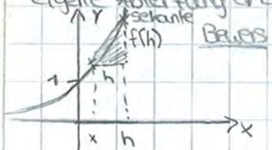
F passt F mal in K; bei $x^{2,4}$ kein „linker" Arm ⇒ Wurzel ⇒ darf nicht aus negativen Zahlen gezogen werden ⇒ deshalb nur Linker-Arm der ganzzahligen Potenzen

1. Schritt: Tangente bestimmen ⇒ Ableitung
$f'(x) = k \cdot x^{k-1}$ ⇒ Schnittpunkt einsetzen (b | b)
2. Schritt: Geradengleichung: $g(x) = y = k \cdot (x-b) + b$
3. Schritt: $g(x) = 0$ ⇒ ergibt
$\frac{k-1}{k} \cdot b$
⇒ Flächen bestimmen



Exponentialfkt $f(x) = a^x \Rightarrow 2^x \Rightarrow$ je größer Basis a desto steiler

$\Rightarrow$ Mit einem Stauchfaktor kann die eigene Ableitung erzeugt werden



Beweis: $m_{Sek} = \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \frac{a^x \cdot a^h - a^x}{h}$

$= a^x \cdot \boxed{\frac{(a^h - 1)}{h}}$ Stauchfaktor GW = 1 ?

$h \to 0 \downarrow$

$a^x \cdot m_{tang}$ im Pkt (0|1)

$\Rightarrow$ e-Fkt

Tangentensteigung bei 0 erzeugt den Stauchfaktor $\Rightarrow$ der die Ableitung gleich der Fkt. laufen lässt.

- im Produkt ist e-Fkt immer stärker als jede Potenz v. x

Grenzwert nach L'Hospital

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \lim_{a \to a} \frac{f(a+h) - f(a)}{g(a+h) - g(a)}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{\frac{f(a+h) - f(a)}{h}}{\frac{g(a+h) - g(a)}{h}} = \lim_{x \to a} \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Sonderfall: $x \cdot \ln x$

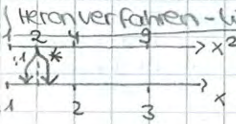
$$\lim_{x \to 0} (x \cdot \ln(x)) = \lim_{x \to 0} \underbrace{\left(\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}\right)}_{\text{Kehrwert benutzen, damit wir einen Bruch bekommen}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \to 0}(x) = 0$$

DIN-Format Reihe Seitenverh. $\sqrt{2} : 1$

$a_n = b_{n-1}$ $\quad b_n = \frac{1}{2} a_{n-1}$

$a = \sqrt{2} \cdot b \Rightarrow a_1 = b_0$ & $b_1 = \frac{1}{2} a_0$

Heronverfahren - Wurzel

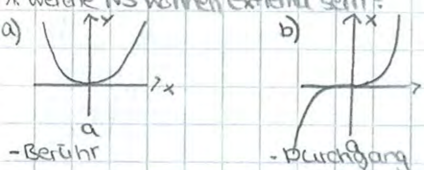


*) geteilt durch den Näherungswert
links ↓: zu klein geteilt $\to$ zu gr. Ergebnis
rechts ↓: zu groß geteilt $\to$ zu kl. Ergebnis

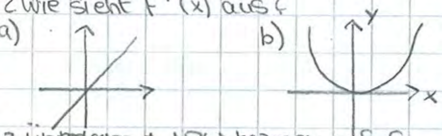
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) = a_{n+1}$$

k-Fache-Nullstellen x^k

1. Welche NS können Extrema sein?



2 Wie sieht $f'(x)$ aus?



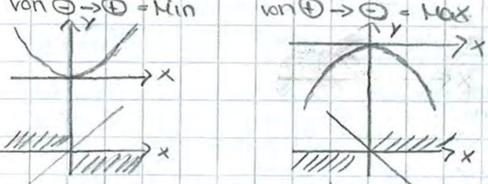
3. Überlegen d. VZW bezogen auf f

f' VZW $\Rightarrow$ f hat in a ein Extremum

kein VZW $\Rightarrow$ f hat in a einen Durchgang

Wenn f(a) = Max|Min $\to$ Richtung d. VZW testen

von ⊖ $\to$ ⊕ = Min $\quad$ von ⊕ $\to$ ⊖ = Max



a ist k-1 fache NS von f'

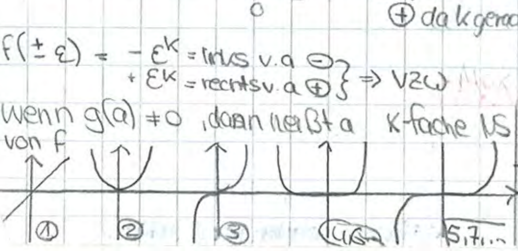
k = ungerade $\Rightarrow$ f hat VZW

k = gerade $\Rightarrow$ f hat keinen VZW

$f(a \pm \varepsilon) = (\pm\varepsilon)^k \cdot \underbrace{g(a \pm \varepsilon)}_{0} = +\varepsilon^k \quad -\varepsilon^k$ ⊕ da k gerade

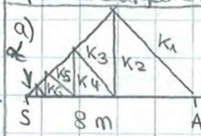
$f(\pm \varepsilon) = \left.\begin{array}{l} -\varepsilon^k = \text{links v. a ⊖} \\ +\varepsilon^k = \text{rechts v. a ⊕} \end{array}\right\} \Rightarrow$ VZW

Wenn $g(a) \neq 0$, dann heißt a k-fache NS von f



Spinnenaufgabe - k_1 ist Kathete von ASB ◁
- ASB $\Rightarrow$ gleichschenklig / rechtwinklig

a)



$\Rightarrow 2(k_1)^2 = 8^2 \quad |:2$

$(k_1)^2 = \frac{8^2}{2} \quad |\sqrt{\ }$

$k_1 = \frac{4}{\sqrt{2}}$ $\quad$ q.e.d.

$\sqrt{2} \mathrel{\hat{=}} 2 \cdot \sin 45°$

b) rekursiv: $k_n = k_{n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

explizit: $k_n = k_1 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$

$q = \frac{k_{n+1}}{k_n} = \frac{4}{4 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Lösungsidee: sin: Gegenk./Hypo. ... $\sqrt{2}$: Gegenk. = Hypo. sin 45°

$k_1 = 4 \cdot \sqrt{2}$
$k_2 = 4$
$k_3 = 2 \cdot \sqrt{2}$
$k_4 = 2$
$k_5 = \sqrt{2}$
$k_6 = 1$
$k_7 = \sqrt{2}/2$
$k_8 = 0{,}5$
$k_9 = \sqrt{2}/4$

Wegstrecke = Summenformel

(1): $s_n = k_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ für $n = 14$ $= 19{,}16$ m

(2) $\sum_{n=1}^{14} \left(4 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}\right)$

Grenzwert: 14 gegen ∞ tauschen $\Rightarrow$ 19,3137 m

Geschwindigkeit:

$\frac{1.931{,}37 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} = 386{,}87$ sek : 60 = 6,4379 Min.

Wie viel gerade Stücke bis 1mm vor S?

$7{,}9999 \text{ m} = k_2 + k_4 + \ldots$

$k_2 - k_{14} = 7{,}9375$ m $\quad$ Rest: 0,0624 m

$k_n = k_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $\quad$ weil von $k_4 \to k_2$: $q = \frac{1}{2}$

$7{,}9999 = 4 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1}$ $\Rightarrow$ nach n lösen

$\Rightarrow n = 16{,}2877$

$\Rightarrow$ nach 17 geraden Stücken

Frosch

a) $9 \text{ cm} \to -\frac{1}{3}$, $9 \cdot \frac{2}{3}$ was er schrumpft

$9 \cdot \frac{1}{3}$ seine neue Größe

$a_8 = 9 \cdot q^7 \quad q = \frac{1}{3} \Rightarrow 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7 = 0{,}004115$

Größe nach 7 Sprüngen

b) Radius $r = 4 \to d = 8$

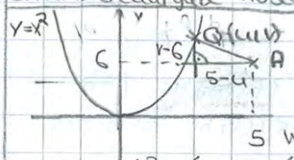
U_{Kreis}: $\pi \cdot d \quad \frac{U}{2} = \pi \cdot \frac{d}{2} \quad q = \frac{3}{4}$

$b_n = \frac{\pi}{2} \cdot d \cdot q^{n-1}$

$b_1 = \frac{\pi}{2} \cdot 16 \cdot q^0 = 25{,}13$

$s_7 = 25{,}13 \cdot \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^7 - 1}{\frac{3}{4} - 1} = 87{,}10$ Weg

Extremwertaufgabe - Abstand Wann ist b am kleinsten



Zielgr.: Strecke b

$Q(u|v) \to v = u^2 \Rightarrow$ NB

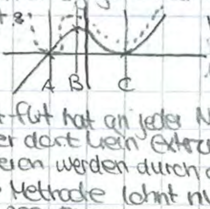
wir wissen A & Q:

$b^2 = (v-6)^2 + (5-u)^2$

Zielgröße: $b = \sqrt{(u^2-6)^2 - (5-u)^2} \Rightarrow$ Zielfkt

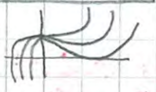
$g(u) = b^2(u) = (u^2-6)^2 - (5-u)^2 \Rightarrow$ Extremstellen sind die selben

diese Quadrierung geht nur wenn f(x) komplett über 0 liegt:



Die Quadrat-Fkt hat an jeder NS ein Min, auch wenn vorher dort kein Extremum war $\Rightarrow$ Min. im neg. Bereich werden durch das Quadrieren zu Max. $\Rightarrow$ Methode lohnt nur wenn Zielfkt. im pos. Bereich

Kurvenschar Für welches k wird x-Achse genau berührt? $x_{E_1}(0|1)$



$x_{E_2}\left(\frac{2k}{3} \middle| 1 - \frac{4k^3}{27}\right)$

$y_{E_2} = 0$ setzen $\Rightarrow k = 1{,}8\ldots$

gleicher Nennergrad: $\frac{3n^3}{2n^3} \Rightarrow \to \frac{3}{2}$

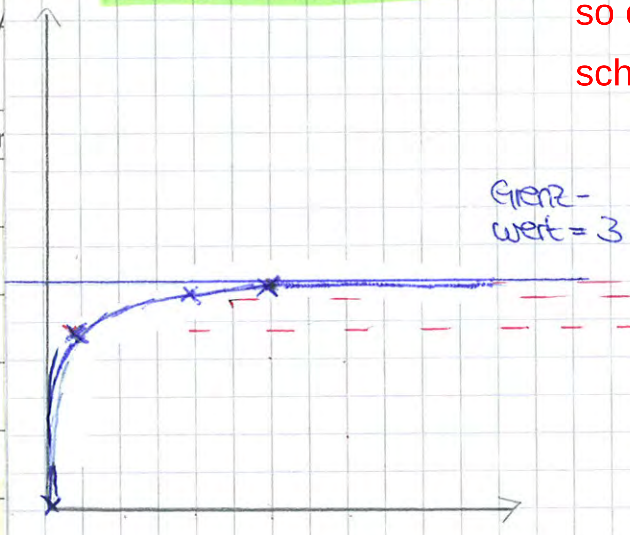
größerer Nennergrad: $\frac{3n^3}{2n^2} \to 0$

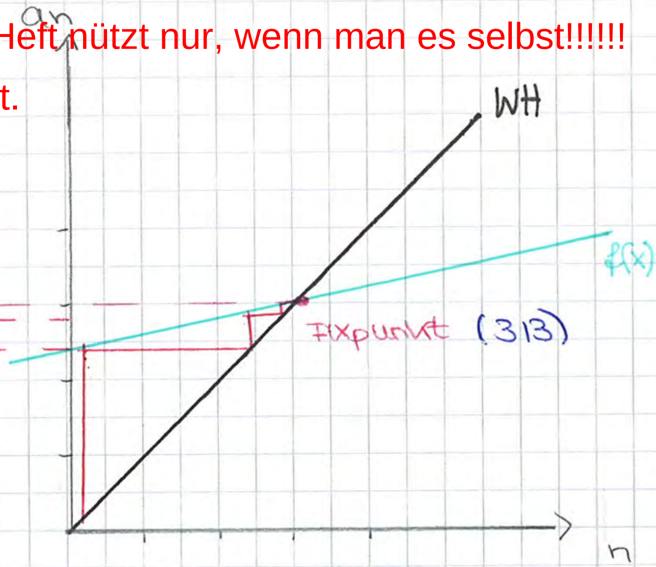
kleinerer Nennergrad: $\frac{3n^2}{2n^3} \to \infty$

Lernheft zur Klausurvorbereitung

so ein Heft nützt nur, wenn man es selbst!!!!!! schreibt.

Folgen und Reihen





f (x) = Trägerfunktion

Darstellung als explizite Folge

x

anziehend = konvergent

abstoßend = divergent

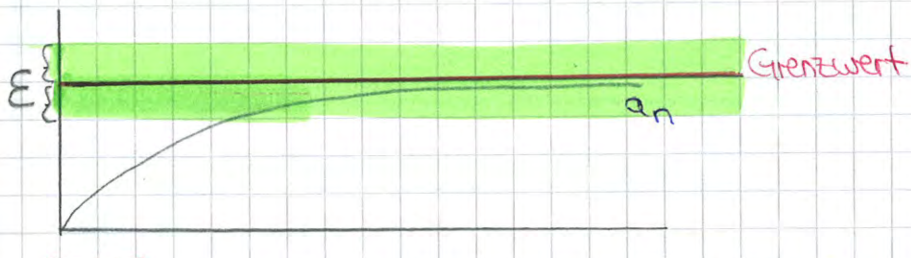
aus der rekursiven Formel wird die Trägerfkt. gebildet

x Fixpunkt und Grenzwert:

1. wenn unser Fixpunkt anziehend ist, entspricht er dem Grenzwert der expliziten Folge
2. Ist er abstoßend, entspricht er NICHT dem Grenzwert

x

Grenzwert - was ist das?



$\boxed{\varepsilon :}$ Es liegen endlich viele Werte außerhalb und unendlich viele Werte innerhalb der ε-Umgebung.
Das ε muss beliebig klein werden können, und trotzdem dürfen nur endlich viele y-Werte außerhalb von ε liegen.
Wenn die Werte einmal in ε sind, bleiben sie dort, gehen sie wieder raus -> kein Grenzwert

links- ∧ rechtsseitiger Grenzwert

Bei der links- und rechtsseitigen Annäherung müssen Links- und rechtsseitiger Grenzwert übereinstimmen, damit die Folge an dieser Stelle einen Grenzwert hat.

Wie berechne ich den Grenzwert?

$a_n = \frac{4x^2-1}{x^2+1} \quad | : x^2 \qquad \lim_{x \to \infty} = \frac{4-0}{1+0} = \frac{4}{1} = \underline{\underline{4}}$

$= \frac{x^2 - \frac{1}{x^2}}{1+1/x^2}$

Folgen und Reihen

Bildungsvorschriften

explizit: mit Hilfe des Anfangsgliedes kann jedes beliebige Glied bestimmt werden

rekursiv: mit Hilfe des vorangegangenen Gliedes wird das jeweils nächste bestimmt

recuere = zurückkehren

Grenzwerte : Annäherung an einen bestimmten Wert

Konvergent : Folgen, die einen Grenzwert besitzen

divergent : Folgen, die keinen Grenzwert besitzen

Nullfolgen: Folgen, die sich immer weiter 0 annähern

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

Reihe: Addition aller Folgenglieder

Arithmetische Folgen und Reihen

rekursiv: $a_n = a_{n-1} + d$; $d = a_{n+1} - a_n$

explizit: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

Summe: $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

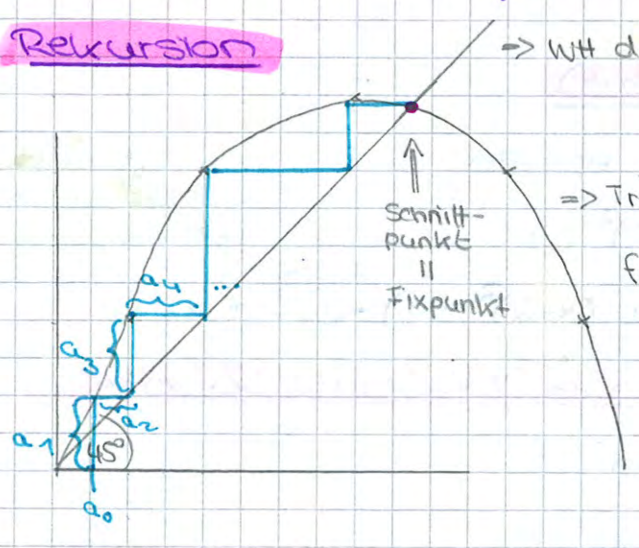
Geometrische Folgen und Reihen

rekursiv: $a_n = a_{n-1} \cdot q$; $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

explizit: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Summe: $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

Rekursion



=> WH d. 1. Quadranten $y = x$

=> Trägerfkt der Folge $\frac{1}{3} a_n \cdot (8 - a_n)$

$f(x) = \frac{1}{3} x \cdot (8 - x)$

SPINNWEB-DARSTELLUNG

Start bei a_0 → senkrecht zur Kurve
→ waagerecht zur WH

- kommt meine Folge im Fixpunkt an: anziehender FP
- wenn nicht: abstoßender FP

Rechnerisch

① $f(x) = x$ gleichsetzen von Gleichung & Wft

Streckfaktor ⇐ $\boxed{r \cdot x(1-x)} = x$ | : x Beispiel **Logistische Parabel**

$r(1-x) = 1$ | : r

$1-x = \frac{1}{r}$ | + x | $-\frac{1}{r}$

$$\boxed{1-\frac{1}{r} = x}$$

② $f(x) = rx - rx^2$

$f'(x) = r - 2rx$ Ableitung der Trägerfunktion

$\Leftrightarrow r - 2 \cdot r \cdot (1-\frac{1}{r})$ für $x = 1-\frac{1}{r}$ = Fixpunkt einsetzen

$\Leftrightarrow r - 2r - \frac{2\cancel{r}}{\cancel{r}}$

$\Leftrightarrow \boxed{|2-r|}$

Wenn

① $|2-r| < 1$ => anziehender FP

② $|2-r| > 1$ => abstoßender FP

③ $|2-r| = 1$ => nicht definiert

Wenn die Tangente am Fixpunkt eine größere Steigung hat (>1) als die Wft => abstoßend. Wenn sie eine kleinere Steigung hat (<1) => anziehend

Iteration (bzw. Iterierte)

Für x nochmals f(x) einsetzen

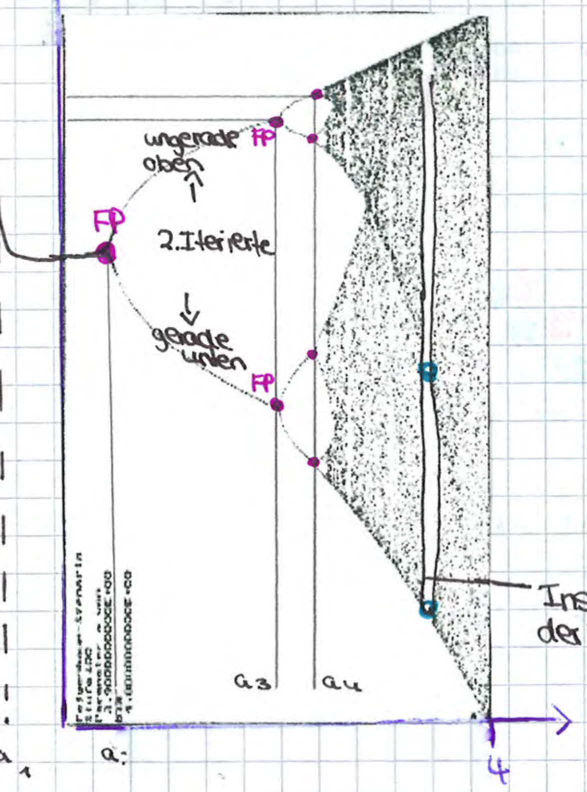
Bsp: $f(x) = -a(x-2)^2 + 4$

Es wird nur jeder 2 Wert der Ausgangsfolge berechnet

2. Iterierte: $f(f(x)) = -a[(-a \cdot (x-2)^2 + 4) - 2]^2 + 4$

Feigenbaumdiagramm oder Bifurkationskaskade

- Bifurkation = Wasserfall
- auch Attraktor-Diagramm



<u>Inseln der Ruhe</u>: hier 3 Fäden

Die Iterierte trifft mit ihren Minima 3x die WH ⇒ ab dort 3er Rhythmus. er hört bei $r=4$ auf weil das Folge-Glied unter der x-Achse auf den Graphen der Trägerfunktion trifft -> Restl. Glieder gehen jetzt nach unten links weg

-> es enthält nur anziehende Fixpunkte

$a_3 \to a_4$ ist $\frac{1}{4}$ des Abstandes von $a_1 \to a_2$

Vollständige Induktion - Beweisverfahren

Beispiel: $3 \mid n^3 - n$

① Behauptung: $\forall n: \; 3 \mid n^3 - n$

② Verankerung: $n = 1 \quad re = 1^3 - 1 = 0 \; ; \; 3 \cdot 0 = 0$

$3 \mid 0$ o.k.

③ Annahme: bis n gilt: $3 \mid n^3 - n$, also $\exists k \in \mathbb{Z}: 3 \cdot k = n^3 - n$

④ Ziel: für $n+1$ gilt: $3 \mid (n+1)^3 - (n+1)$

also $\exists r \in \mathbb{Z}: 3 \cdot r = (n+1)^3 - (n+1)$

Schritt: $n \rightsquigarrow n+1$

$$re = (n+1)^3 - n+1 = n^3 + 3n^2 + 3n + \cancel{1} - n - \cancel{1}$$

$$= \underbrace{n^3 - n}_{3\cdot k} + 3\cdot(n^2+n) \underset{IA}{=} 3\cdot k + 3\cdot(n^2+n)$$

$$= 3 \cdot \underbrace{(k + n^2 + n)}_{\in \mathbb{Z}} \qquad \text{q.e.d.}$$

Die Klammer ist das r aus dem Ziel

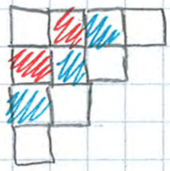
Verschiedene Summen

x ① Der Quadrat-Zahlen:

$$a_n = \frac{1}{6}\cdot n\cdot (n+1)(2n+1)$$

x ② der Natürlichen Zahlen:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} n (n+1)$$

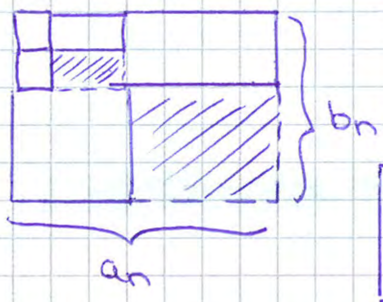


1 -> 1
2 -> 3
3 -> 6
4 -> 10 ...

x ③ Summe der 3. Potenzen der Kubikzahlen

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2 = a_n$$

x ④ Rechtfolge von Theon



$$a_n = a_{n-1} + b_{n-1} \cdot 2$$

$$b_n = a_{n-1} + b_{n-1}$$

$$\boxed{\Rightarrow q_n = \frac{q_{n-1}+2}{q_{n-1}+1}}$$

Grenzwert einer Funktion

1. Folgendefinition

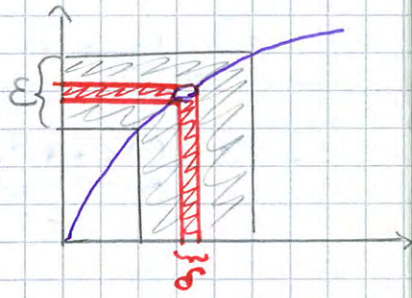
c heißt Grenzwert von f für x = a, wenn für alle Folgen $\langle x_n \rangle$ und $x_n \to a$ gilt, dass

$$f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} c \quad \text{bzw}$$

$$\lim_{n\to\infty} (f(x)) = c$$

2. Für Umgebungen

c heißt Grenzwert einer Funktion, wenn für alle $\varepsilon > 0$ eine δ-Umgebung für a existiert, sodass alle x aus der δ-Umgebung die Werte in der ε-Umgebung des vermuteten Grenzwertes c liegen

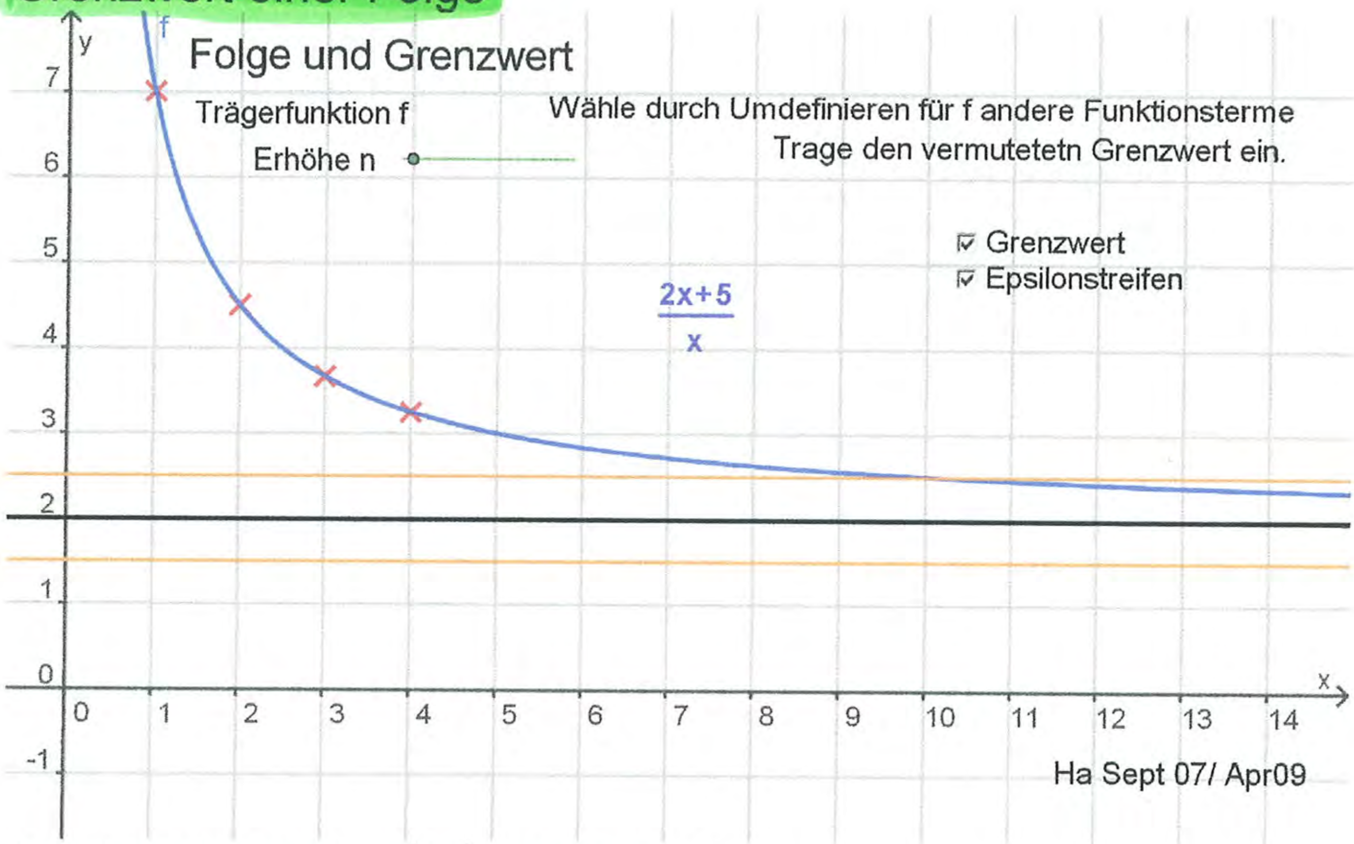


$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 :$$

$$\forall x \in U_\delta(a) \to f(x) \in U_\delta(c)$$

15.4.09

Grenzwert einer Folge



Gegeben ist eine Folge $\langle a_n \rangle$ und eine Zahl g,

im Beispiel $\langle a_n \rangle$ mit $a_n = \dfrac{2n+5}{n} = 2 + \dfrac{5}{n}$ und $g = 2$

gesamt nur 1 a_n

> Definition: g heißt **Grenzwert der Folge** $\langle a_n \rangle$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index N gibt, so dass alle Folgenglieder mit größerem Index von g einen Abstand haben, der kleiner ist als $\varepsilon > 0$.
> Formale Schreibweise dieses Textes:
> $$\lim_{n\to\infty} a_n = g \iff \left(\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ N:\quad \forall\ \ n \geq N \Rightarrow |a_n - g| < \varepsilon\ \right)$$

Oben ist N=11, in der zugehörigen GeoGebra-Datei kann man ε variieren. Zu reellen Folgen lässt sich meist eine reelle **Trägerfunktion** angeben, die denselben Berechnungsterm hat, und zwar statt mit n geschrieben mit x.

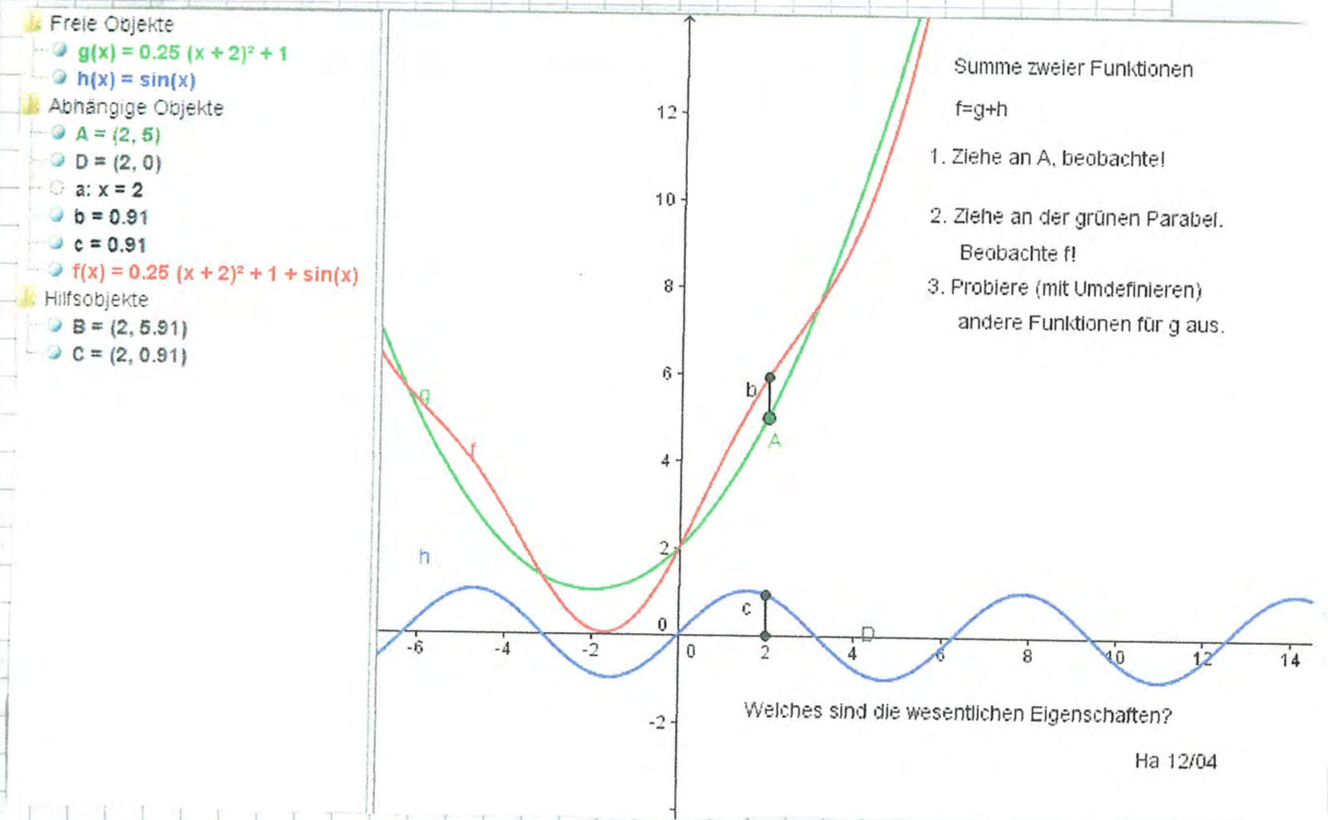
Oben ist $a_n = f(n) = \dfrac{2n+5}{n}$ und $f(x) = \dfrac{2x+5}{x}$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+5}{n} \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+5}{x} = 2$$

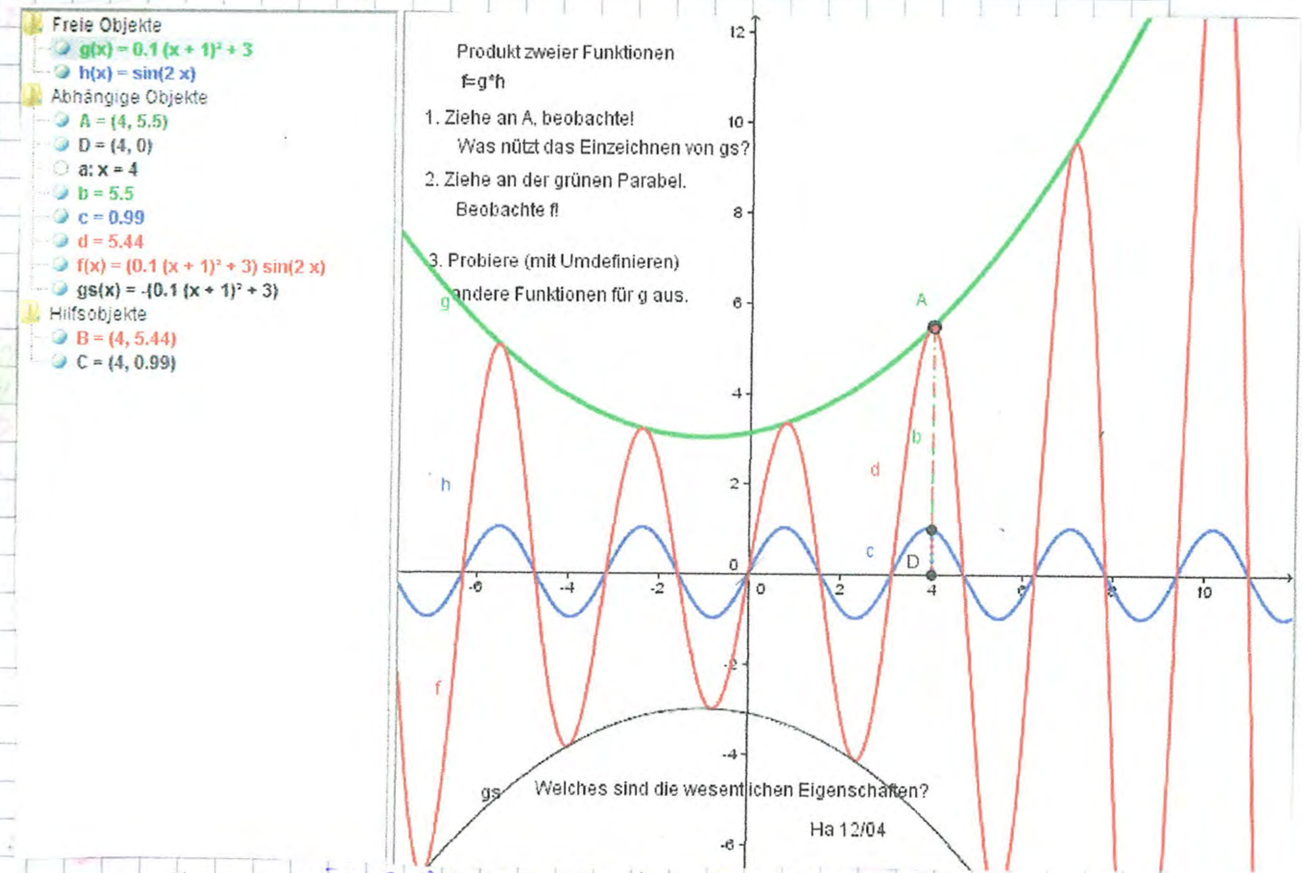
Man sagt auch: f hat die waagerechte Asymptote $y = 2$.

Stetigkeit: Wenn jeder Wert einer Funktion als Grenz- wert erreicht wird. ×

Summe zweier Funktionen



Produkt zweier Funktionen

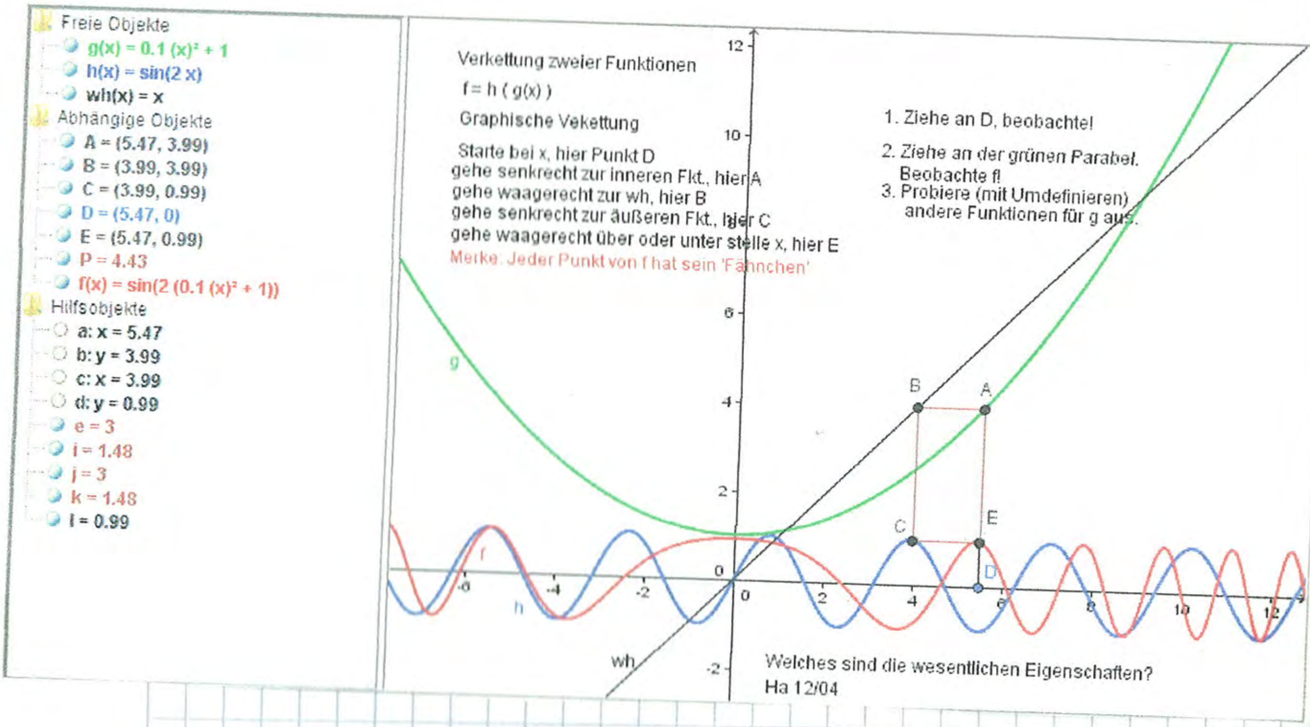


× - wo einer 0 ist, ist die NS des Ergebnisses
- wo einer 1 ist, kommt der andere raus
- wo einer -1 ist kommt der Negative raus

Produkt zweier Funktionen ⇒ Verkettung

Haftendorn - 2.12.04

haftendorn.uni-lueneburg.de/mathe-lehramt



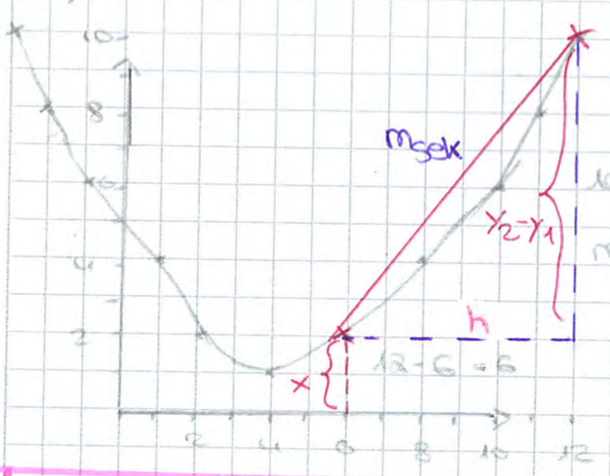
Differentialrechnung

stetige Fortsetzung: bei gebrochen-rationalen Fkt. darf der Nenner nicht null sein. Sofern sich der Term vereinfachen lässt, klammern wir aus und kürzen.
Achtung: Durch das Kürzen ist eine NEUE Funktion entstanden

Bsp: $\frac{h^2+2h}{2h} \Leftrightarrow \frac{\cancel{h}(h+2)}{\cancel{h}\cdot 2} \xrightarrow{h\to 0} \frac{h+2}{2} = \frac{1}{2}h+1$

Ein neuer Term ist entstanden

$f(x) = x^2$



Der Grenzwert der Sekantensteigung-funktion entspricht der Steigung der Tangente

$$m_{sek}(x,h) = \boxed{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}} \xRightarrow{h\to 0} \boxed{f'(x)} = m_{tang}$$

Sekantensteigung = Differenzenquotient   Differentialquotient → Grenzwert

(oder auch $\frac{d}{dx}$)

bei n - Exponent: $f(x) = x^k$

$\Rightarrow \dfrac{(x+h)^k - x^k}{h} = \dfrac{(x^k + x^{k-1} \cdot h + x^{k-2} \cdot h^2 + \dots) - x^k}{h}$ → fällt weg

$= k \cdot x^{k-1}$

Faktor - Formel : $a \cdot f(x) = a \cdot f'(x)$

$$m = \frac{a \cdot f(x+h) - f(x)}{h} = a \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{\downarrow h \to 0}$$

$a \cdot f'(x)$ q.e.d.

Summenregel $g(x) + f(x) = g'(x) + f'(x)$

$$m_s = \frac{g(x+h) - g(x) + f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \frac{g(x+h) + f(x+h) - (g(x) + f(x))}{h}$$

$$= \underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{\downarrow h \to 0} + \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{\downarrow h \to 0}$$

$g'(x) + f'(x)$ q.e.d.

Ableitung vom Sinus

$$m_{sek} = \frac{\sin(\overset{①}{x+h}) - \sin(x)}{h}$$

① $\sin(x+h)$:
$= \sin(x) \cdot \cos(h) + \cos(x) \cdot \sin(h)$
$\Rightarrow$ Additionstheorem

$$= \frac{\sin(x) \cdot \cos(h) + \sin(h) \cdot \cos(x) - \sin(x)}{h}$$

$$= \sin(x) \underbrace{\frac{\cos(h) - 1}{h}}_{\downarrow h \to 0 \;\; 0} + \cos(x) \cdot \underbrace{\frac{\sin(h)}{h}}_{\downarrow h \to 0 \;\; 1}$$

$(\sin(x))' = \cos(x)$ q.e.d.

Kettenregel:

$$y = f(x) = g(u(x))$$

$$f(x) = \sin x^2 \longrightarrow \sin v = u, \quad x^2 = v$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$u' = \cos v$ ⇒ äußere Fkt.

$2x = v'$ ⇒ innere Fkt.

$$(\sin(x^2))' = \cos x^2 \cdot 2x$$

q.e.d.

Hornerschema

Zerlegen eines Polynoms 4. Grades:

$$f(x) = x^4 + 7x^3 + 15x^2 + 7x - 6$$

- Wenn ich ganzzahlige Nullstellen suche, stecken si[e] als Faktor im x-losen Glied.

Hier: -6 → 8 Möglichkeiten $1, 2, 3, 6, -1, -2, \ldots$

①

	1	7	15	7	-6
$\boxed{-3}$	0	-3	-12	-9	+6
	1	4	3	-2	0

x_1: -3 ist eine Nullstelle

$$\Rightarrow f(x) = (x^3 + 4x^2 + 3x - 2) \cdot (x+3)$$

②

	1	4	3	-2
$\boxed{-2}$	0	-2	-4	+2
	1	2	-1	0

x_2: -2 ist eine Nullstelle

$$\Rightarrow f(x) = (x^2 + 2x - 1)(x+3)(x+2)$$

Jetzt $x^2 + 2x - 1$ durch quadr. Ergänzung: $x_3 \wedge x_4$:

$$x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\underbrace{x^2 + 2x + 1} - 1 - 1 = 0$$

$$(x+1)^2 - 2 = 0 \quad | +2 \; | \sqrt{}$$

$$|x+1| = \sqrt{2}$$

$x_3 = x + 1 = \sqrt{2}$

$x_3 = \sqrt{2} - 1$

$x_4 = -x - 1 = \sqrt{2}$

$x_4 = -\sqrt{2} - 1$

Gebrochenrationale Funktionen

Polynomdivision

$$f(x) = \frac{(x+3)(x-1)}{x-2} = \frac{x^2+2x-3}{x-2} \begin{matrix} \Leftarrow p(Z) \\ \Leftarrow p(N) \end{matrix}$$

(1) Polstelle: bei $+2$ => Senkrechte Asymptote = Definitionslücke

sie sind immer Lücken, aber nicht jede Lücke ist = Polstelle

NS des Nenners sind die Lücken

(2) Nullstellen: -3 und $+1$

(3) Asymptote:

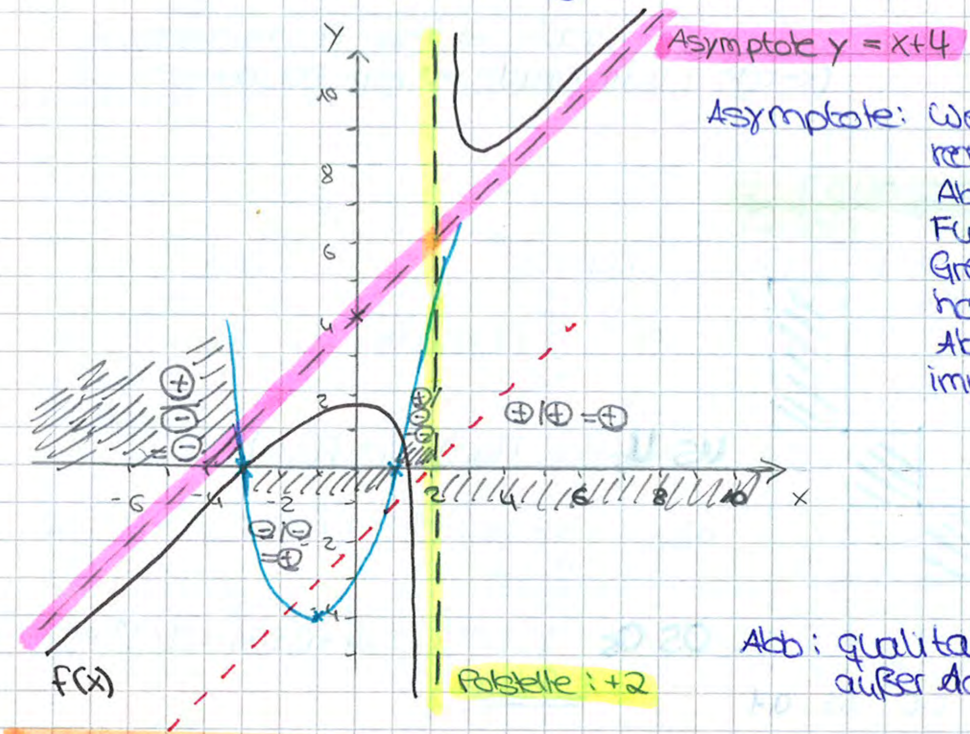
$$(x^2+2x-3) : (x-2) = \underbrace{x+4}_{asy(x)} + \underbrace{\frac{5}{(x-2)}}_{\text{Rest: } g(x)}$$

$$\begin{array}{l} -(x^2-2x) \\ \hline 0 \quad 4x-3 \\ \quad -(4x-8) \\ \hline \qquad +5 \end{array}$$

wenn kein Rest entsteht, stimmt was nicht weil $f(x) = asy(x)$ wär falsch

× Hebbare Definitionslücken: wenn Zähler u Nenner gemeinsame NS haben

-> Geradengleichung Asymptote: $y = x+4$



Asymptote: Wenn der senkrecht gemessene Abstand zur Funktion den Grenzwert 0 hat -> (der Abstand wird immer kleiner)

× Bedingung für senkrechte Asymptote

$P_N(x) = 0$ &

$P_Z(x) \neq 0$

(NS von P_N in P_Z einsetzen)

Abb: qualitativ (y-Werte außer Acht lassen)

× Allgemein: $f(x) = \frac{(x-a)^r \cdot (x-1)}{(x-b)^s}$ a, b, r, s = Parameter

Grad Zähler = Grad Nenner -> waagerechte As.

Grad Zähler > Grad Nenner -> x-Achse Asympt.

Grad Zähler < Grad Nenner -> y-Achse Asympt.

× $$\boxed{\begin{array}{l} asy(x) + g(x) = f(x) \\ asy'(x) + g'(x) = f'(x) \end{array}}$$

zeichnerisch asy und g verketten => f(x)

wenn der Nenner einen ungeraden Grad hat -> Vorzeichenwechsel

Gebrochenrationale Funktionen

→ Wo der Zähler 0 ist, hat f Nullstellen, wenn der Nenner dort beschränkt und ungleich 0 ist.

→ Wo der Nenner 0 ist, hat f Polstellen, wenn der Zähler dort ungleich 0 ist.

→ Wo der Nenner 1 ist, schneidet f den Zählergraph.

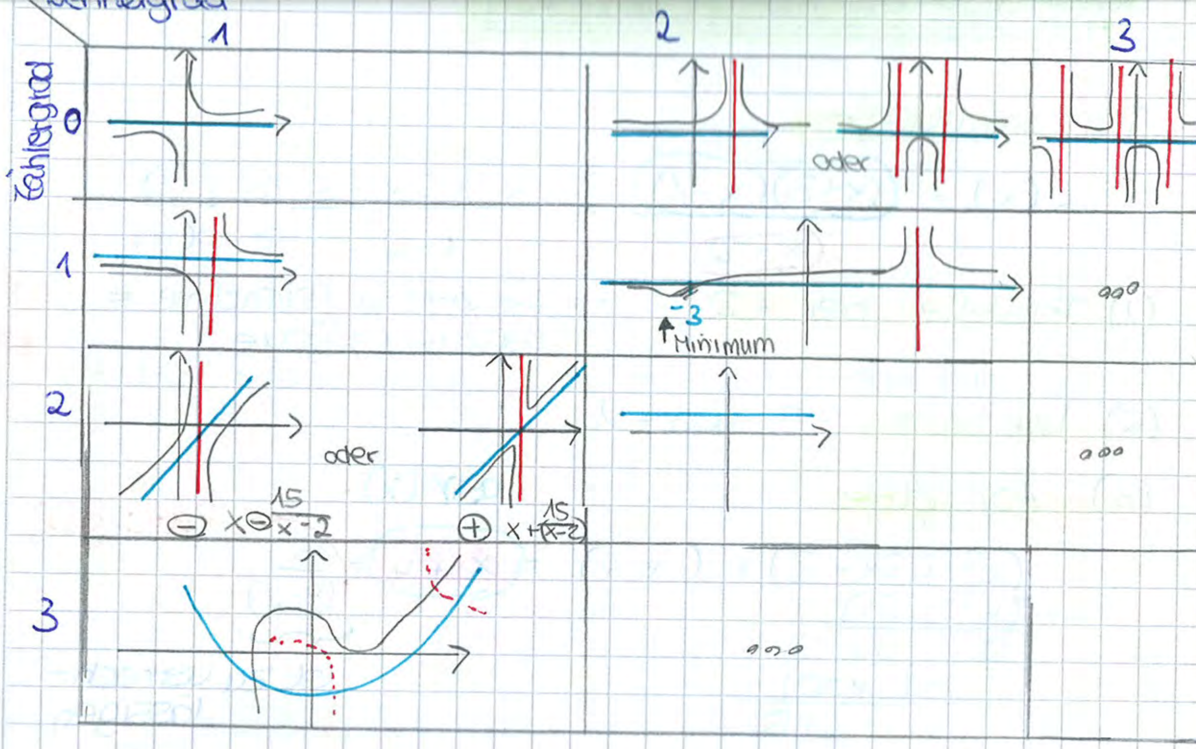
→ Wo der Zähler 1 ist, hat f den Kehrwert des Nennerwertes, wenn der Nenner dort ungleich 0 ist.

→ Haben Zähler- und Nenner gleichen Grad, gibt es eine waagerechte Asymptote.

→ Ist der Nennergrad größer als der Zählergrad, ist die x-Achse Asymptote.

→ Ist der Zählergrad größer als der Nennergrad, gibt es eine Polynom-Asymptote, deren Grad die Differenz aus Zähler- und Nennergrad ist.

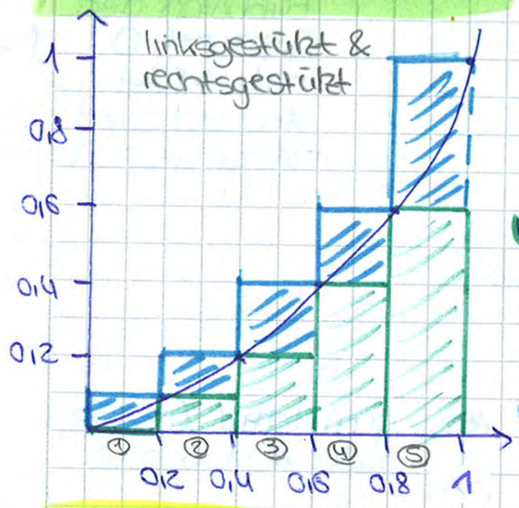
Asymptote
Polstelle



× Grad der Asymptote: Zählergrad − Nennergrad

× Polstellen: $\frac{1}{(x-a)^s}$ $\begin{cases} s \text{ gerade} \rightarrow \text{ohne Zeichenwechsel} \\ s \text{ ungerade} \rightarrow \text{mit Zeichenwechsel} \end{cases}$

Integralrechnung



$f(x) = x^2$

$A: \int_0^1 f(x) \cdot dx$

Stele: $n = 5$
$\rightarrow n$ = Abstand
$\frac{1}{5} = 0{,}2$ also: $\frac{1}{n}$

$US = U_s = 0{,}2 \cdot f(0{,}2) + 0{,}2 \cdot f(0{,}4) + \ldots$

oder $= 0{,}2 \cdot 0{,}2^2 + 0{,}2 \cdot 0{,}4^2 + 0{,}2 \cdot 0{,}6^2 + 0{,}2 \cdot 0{,}8^2$
$= \underline{\underline{0{,}24}}$

$OS = O_s = 0{,}2 \cdot 0{,}2^2 + 0{,}2 \cdot 0{,}4^2 + 0{,}2 \cdot 0{,}6^2 + 0{,}2 \cdot 0{,}8^2 + 0{,}2 \cdot 1^2$
$= \underline{\underline{0{,}44}}$

Allgemein:

$$O_s = U_s = \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{2}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{3}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{n-1}{n}\right) + \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{n}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \cdot \frac{n^2}{n^2}$$

$$= \frac{1}{n^3} \cdot \underbrace{(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + (n-1)^2}_{\text{Summe der Quadratzahlen}}$$

$$\sum i^2 = \frac{1}{6} n \cdot (n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} (n-1) \cdot n (2(n-1)+1) \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{3}$$

Die Obersummen Os sind um das blaue Stück größer als die Untersummen Us.
Die Os hat auch den Grenzwert $\frac{1}{3}$ → somit ist der Wert des Integrals auch $\frac{1}{3}$, weil die Grenzwerte von Us und Os übereinstimmen.

Teppichabrollfunktion

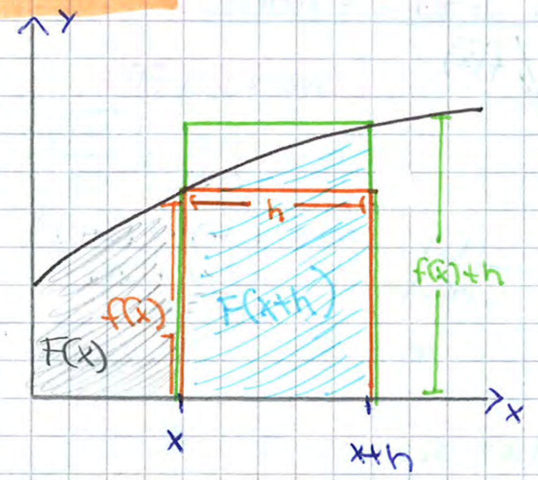
Das ist die Aufleitung von f(x), also F(x). Optik wird bestimmt durch den Startpunkt des Integrals. Je weiter in x-Richtung gestartet wird, um so mehr verschiebt sich F(x) nach unten

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$F_a(x) = \int_a^x f(t) \cdot dt$$

$$F_a'(x) = f(x) \; ; \; F_a(x) = F_b(x) + c$$

Beweis:



$f(x) \cdot h < F(x+h) - F(x) < f(x+h) \cdot h$

Teilen durch h:

$$f(x) < \underbrace{\frac{F(x+h) - F(x)}{h}}_{h \to 0:} < f(x+h)$$

$$f(x) < F'(x) < f(x)$$

„Brezeltordner" f(x) nimmt F'(x) mittig und F'(x) muss f(x) folgen

Ist f(x) stetig, dann existiert F(x) mit F'(x) = f(x).

F heißt Stammfunktion von f(x). Die Stammfunktion unterscheidet sich nur dann durch eine Konstante C:

$\boxed{F(x) + C}$

Berechnung eines bestimmten Integrals:

$\int_0^1 f(x) \cdot dx \qquad f(x) = x^2 \quad \rightarrow F(x) = \frac{1}{3}x^3$

$\boxed{\text{Obersumme} - \text{Untersumme:}}$

$$\frac{1}{3}(1)^3 - \frac{1}{3}(0)^3 = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

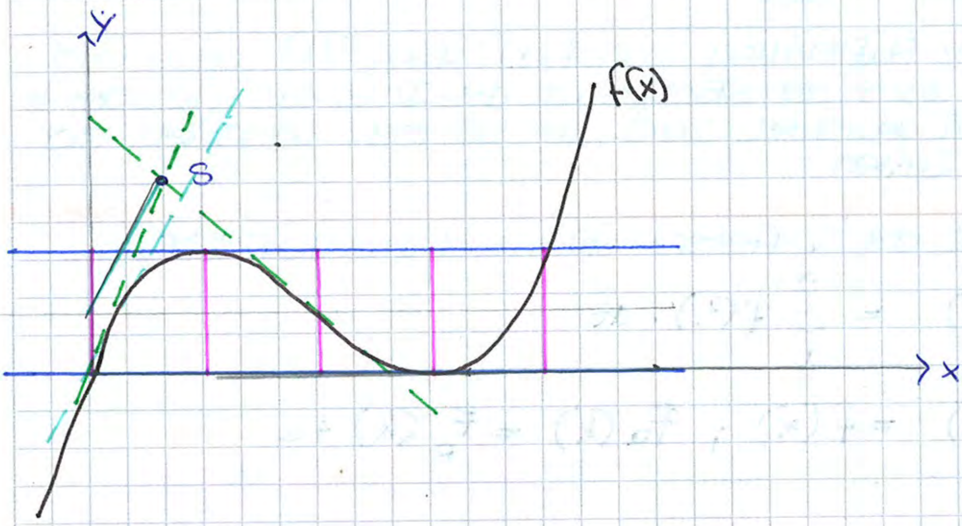
Polynome 3. und 4. Grades

und 2. Grades

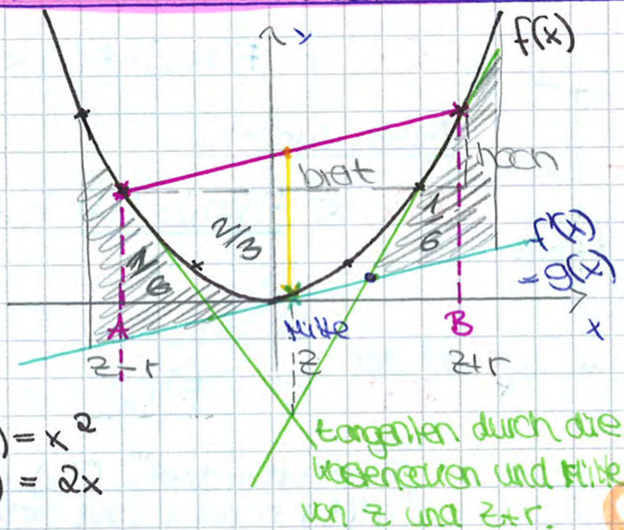
Wichtig!:

Beim Strecken und Stauchen bleiben Teil- und Flächenverhältnisse gleich.

Polynome im Affenkasten (3. Grades):



Polynome im Bärenkasten: 2. Grad = Parabel



Steigung AB:

$$m = \frac{\text{hoch}}{\text{breit}} = \frac{4zr}{2r} = 2z$$

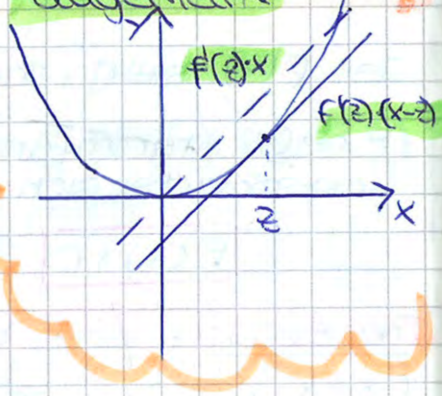
hoch: $(z+r)^2 - (z-r)^2$
$= 2zr + 2zr$
$= 4zr$

$f(x) = x^2$
$f'(x) = 2x$

Tangente an der Stelle z:

$$g(x) = y = f'(z) \cdot (x-z) \cdot f(z)$$

Tangentengleichung allgemein:



Beweis:

$f(x) = \frac{1}{4}x^2$; $f'(x) = \frac{1}{2}x$

hier speziell:

$$g(x) = \overbrace{\frac{1}{2}\cdot z}^{f'(x)} \cdot \overbrace{(x-z)}^{x-z} + \overbrace{\frac{1}{4}z^2}^{f(x)}$$

$$t(x) = \frac{z+r}{2}(x-(z+r)) + \frac{1}{4}(z+r)^2$$

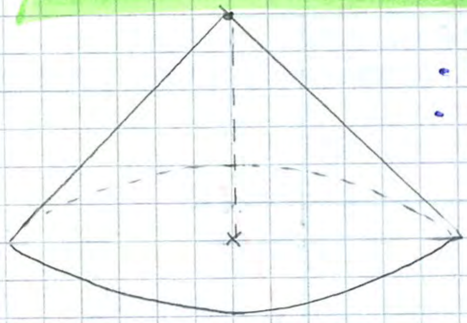
$g(x) \cap t(x)$: $\frac{1}{2}z\cdot(x-z)+\frac{1}{4}z^2 = \frac{z+r}{2}\cdot(x-z-r)+\frac{1}{4}(z+r)^2$

$= \frac{1}{2}zx - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{4}z^2 = \frac{zx+xr}{2} - \frac{z^2+rz}{2} - \frac{zr+r^2}{2} + \frac{1}{4}(z+r)^2$

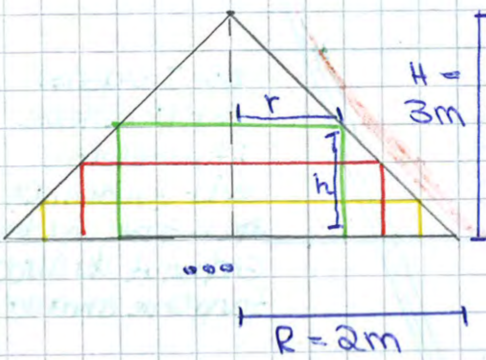
=> nach viel Rechnerei: nach x auflösen

$x = z + \frac{r}{2}$ q.e.d.

Extremwertaufgaben



- Kuppel 4 m breit, 3m hoch
- gesucht: ein Zylinder mit Max. Volumen der in die Kuppel passt



Zielgröße: $V = G\cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$

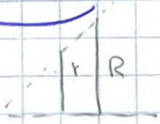
Nebenbedingung:

$$\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{R-r}{R}\cdot H$$

Zielfunktion:

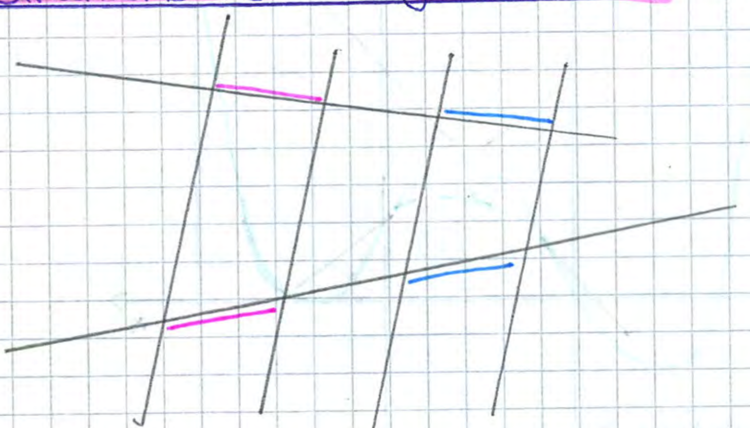
$$\pi \cdot r^2 \cdot \frac{R-r}{R}\cdot H$$



Lösungsweg: STRAHLENSÄTZE

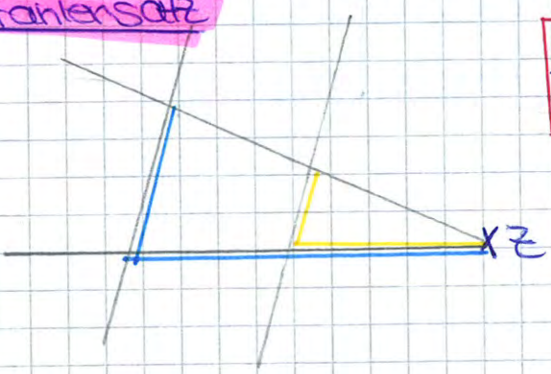
1. Strahlensatz = Projektionssatz

(„Petersilienschneider")



Die gleichfarbigen Abschnitte zwischen den Parallelen verhalten sich zueinander gleich.

2. Strahlensatz

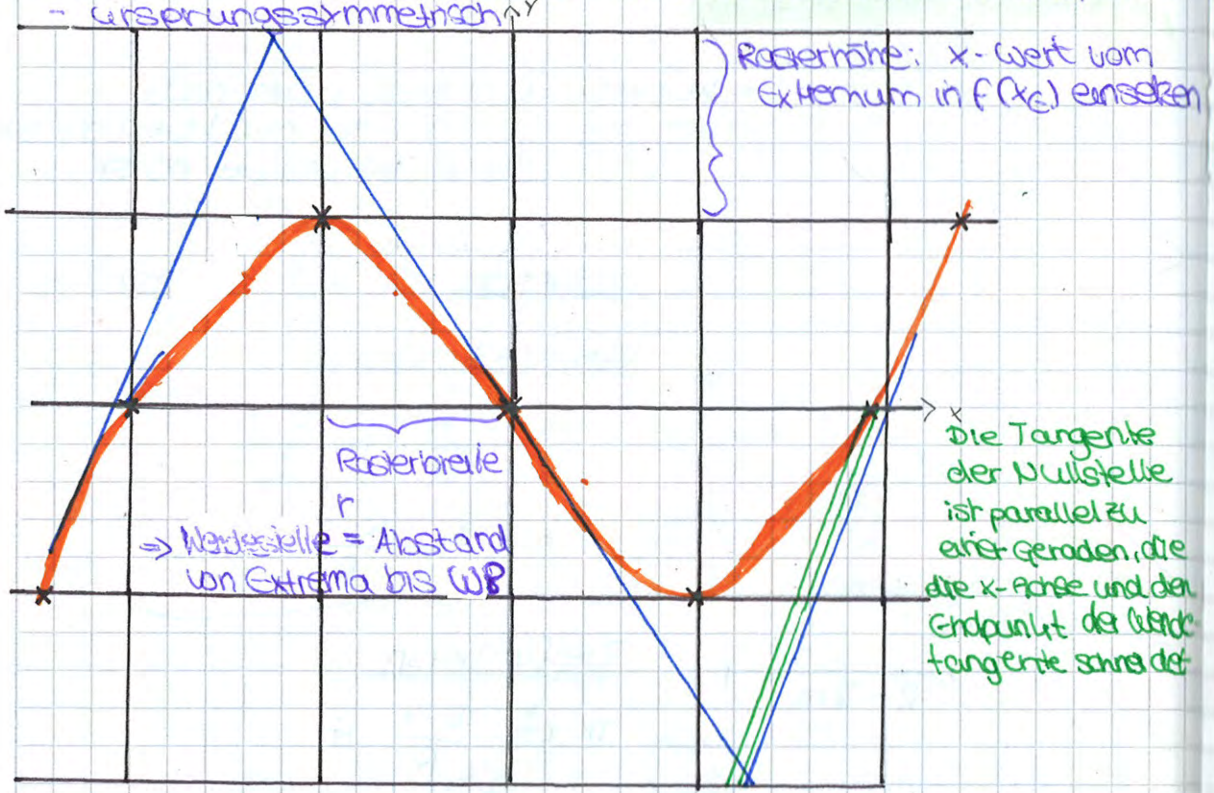


$$\boxed{\frac{\text{große Par.}}{\text{kl. Paral.}} = \frac{\text{gr. Abstand Z}}{\text{kl. Abstand Z}}}$$

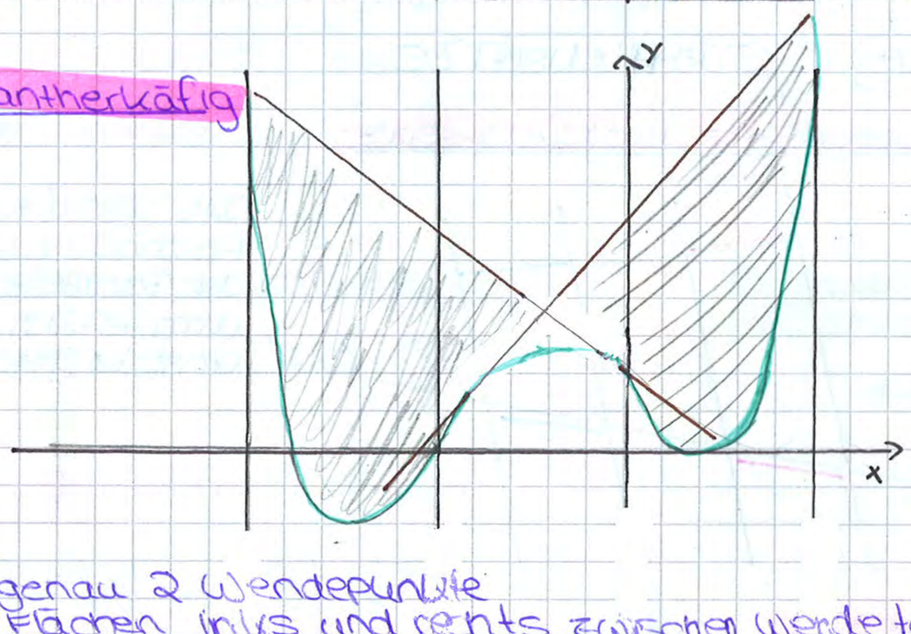
Bärenkästen - Affenkästen - Pantherkäfig

x Affenkasten:

- Wendepunkt und Extrempunkt bilden eine Kastenzelle
- Nullstellen berechnen sich aus $\sqrt{3}$ der Extremstelle
- Wendetangente = Dach
- sie scheidet den Rand des Eckkästchen 1:2
- Extrema liegen 1 Rasterbreite vom Wendepunkt entfernt
- Voneinander sind die Extrema 2 Rasterbreiten entfernt
- ursprungssymmetrisch

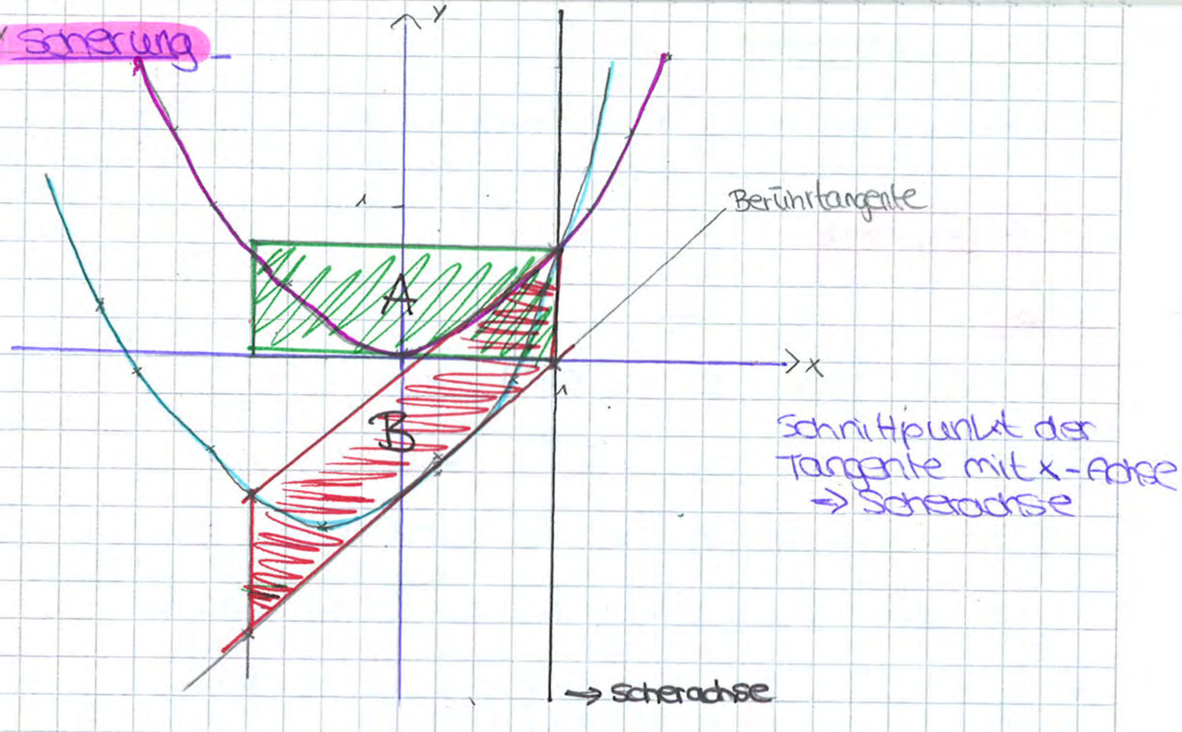


x Pantherkäfig



- genau 2 Wendepunkte
- Flächen links und rechts zwischen Wendetangenten sind gleich groß
- Abstand von W zu W 1 Rasterbreite

Scherung



- bedeutet Addition einer Geraden
- Flächen- und Teilverhältnistreu
- A & B Flächengleich

Weitere Ableitungsregeln

Produktregel: $f(x) = u(x) \cdot v(x)$

Zur Erinnerung:

$$m_{sek}(x,h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\downarrow h \to 0$$

$$m_{tang}(x) = f'(x)$$

Beweis: $f = u \cdot v$: $\dfrac{u(x+h)\cdot v(x+h) \overbrace{- u(x)\cdot v(x+h) + u(x)\cdot v(x+h)}^{0} - u(x)\cdot v(x)}{h}$

$$\Leftrightarrow \frac{u(x+h) - (u(x))}{h} \cdot v(x+h) + \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \cdot u(x)$$

$$\downarrow h \to 0$$

$$(u(x)\cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x)$$

Umkehrfunktionen

- Umkehrfunktion und Ursprungsfunktion müssen sich zusammen aufgeben. f ist Umkehrfunktion von g wenn gilt:

$$f(g(x)) = x$$

Bsp:

① $e^{\ln x} = x$ & $\ln(e^x) = x$

② $\sqrt{x}^2 = x$ & $\sqrt{x^2} = x$

③ $\arcsin(\sin x) = x$ & $\sin(\arcsin x) = x$

$\sin^{-1}(\sin x) = x$ & $\sin(\sin^{-1}(x)) = x$

- Spiegelung der Ursprungsversion an der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten
- x und y vertausch und nach y auflösen

Ableitung der Umkehrfunktion

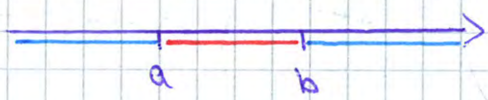
$$f(\underbrace{g(x)}_{z}) = x$$

Kettenregel: $\frac{df(z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 1$

Bsp: $f(x) = x^2$ $f(z) = z^2$ $f' = 2z$

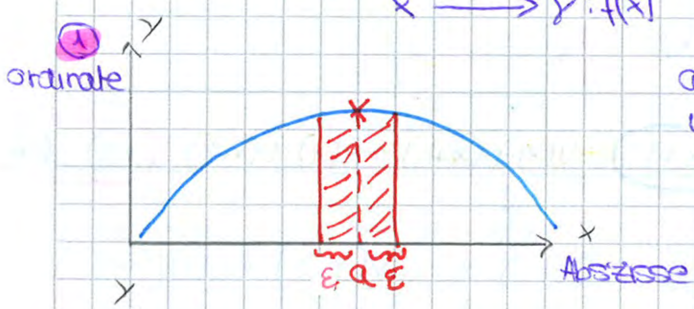
$g(x) = \sqrt{x}$ $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{z}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Grundlegendes zur Differentialrechnung:



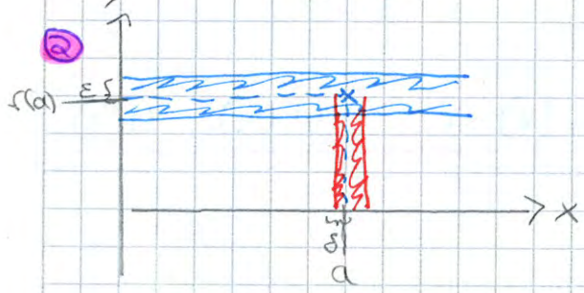
- abgeschlossenes Intervall: $J = [a, b]$
- offenes Intervall: $J =]a, b[$
- Funktion $f: Def \longrightarrow \mathbb{R}$
  $x \longrightarrow y: f(x)$

①



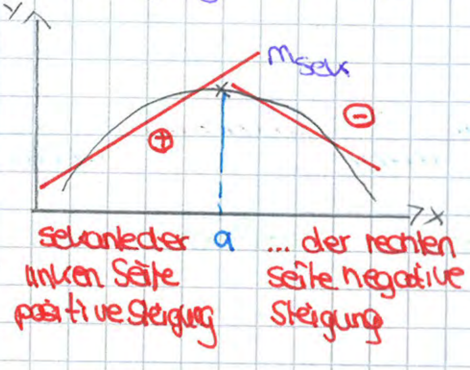
a heißt Maximumstelle von f, wenn gilt in einer Umgebung von a' $f(x) \leq f(a)$, $U_\varepsilon(a) =]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$

②



f heißt stetig in a $U_\delta(a)$, wenn f... alle $\varepsilon > 0$ es ein $U_\delta(a)$ gibt, wenn ihr Funktionswert von beiden Seiten an den Grenzwert herangeht.

③ f sei differenzierbar in einem offenen Intervall $\exists a \in J$
a ist Extremstelle von f $\Rightarrow f'(a) = 0$ $\Rightarrow$ ist eine notwendige Bedingung für eine lokale Extremstelle

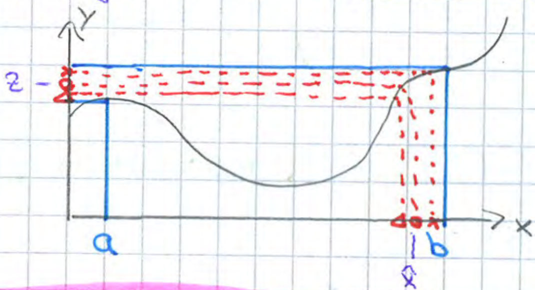


$$\left.\begin{array}{l} m_{sek}(li) > 0 \\ m_{sek}(re) < 0 \end{array}\right\} f'(a) = 0$$

Die wichtigsten Sätze

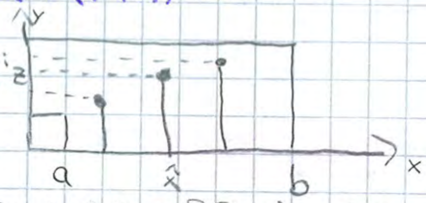
Der Zwischenwert-Satz

Eine stetige Funktion, die verschiedene Werte annimmt, nimmt auch jeden Wert dazwischen an:



d.h. $\exists \hat{x} : (f(\hat{x})) = z$

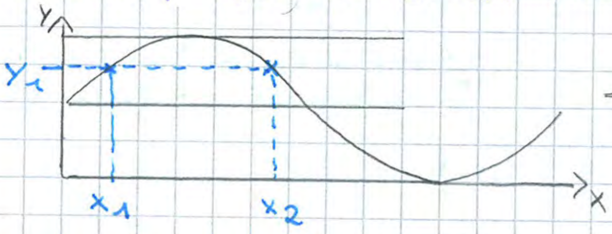
Beweis:



$f(a_n) < z < f(b_n) \Rightarrow c = f(\hat{x}) = c$

Der Satz von Rolle

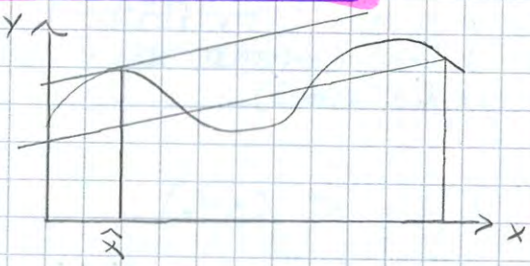
f sei differenzierbar in einem Intervall. Zwischen zwei Stellen mit gleichen Werten existiert eine Extremstelle (einem y-Wert werden 2 x-Werte zugeordnet)



$\Rightarrow$ deswegen braucht man keine 2. Ableitung $\neq 0$

Allg: Zwischen zwei NS muss es ein Extremum geben.

Der Mittelwertsatz:



Zwischen 2 versch. hohen Werten gibt es ein $\hat{x}$ auf der x-Achse.

x-fache Nullstellen

Vorzeichenwechsel-Kriterium:

f sei stetig differenzierbar in J. f hat in $x = a$ eine Extremstelle wenn f' in a das Vorzeichen wechselt.
f hat in a eine Wendestelle wenn f' in a eine Extremstelle hat.

Betrachtung: $f(x) = (x-a)^k \cdot g(x)$

$\Rightarrow$ wenn $g(a) \neq 0$ ist, dann heißt a k-fache NS von f

5 Möglichkeiten

1-Fach 2-fach 3fach 4,6,8-Fach 5,7,9-Fach

x $\Rightarrow$ **k-ungerade:** f hat einen VZW

Beweis: $\varepsilon > 0$: $f(a-\varepsilon) = (a-\varepsilon-a)^k \cdot g(a-\varepsilon)$

$= (-\varepsilon)^k \cdot \underbrace{g(a-\varepsilon)}_{>0}$

$= -\varepsilon^k < 0$ $\Rightarrow$ links von a $\ominus$

$f(a+\varepsilon) = (a+\varepsilon-a)^k \cdot g(a+\varepsilon)$

$= (\varepsilon)^k \cdot \underbrace{g(a+\varepsilon)}_{>0}$

$= (\varepsilon)^k > 0$ rechts von a $\oplus$

x $\Rightarrow$ **k-gerade:** f hat keinen VZW.

Beweis: $\varepsilon > 0$: $f(a \pm \varepsilon) = (\pm\varepsilon)^k \cdot \underbrace{g(a \pm \varepsilon)}_{>0}$

$= \underbrace{+\varepsilon^k \text{ oder } -\varepsilon^k}_{>0}$

sowohl links als auch rechts $\oplus$ da gerader Exponent

a ist $(k-1)$-fache Nullstelle von f'

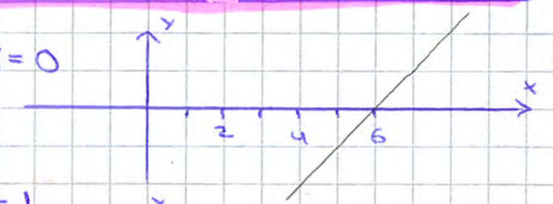
↳ f hat in a eine Extremstelle, wenn f' einen VZW hat und $(k-1)$ = ungerade ($\Rightarrow$ k gerade $\rightarrow$ kein VZW)

k ungerade für $k \geq 3 \Rightarrow$ f' hat in a eine geradfache NS $\rightarrow$ f' hat keinen VZW $\Rightarrow$ f hat in a kein Extremum aber f' hat ein Extremum $\Rightarrow$ a = Wendestelle von f (Sattel)

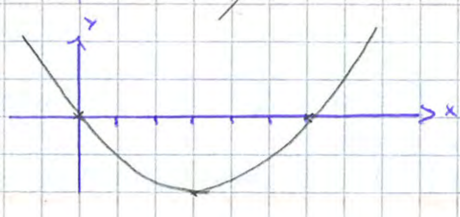
¬ ≙ nicht
∧ = und
∨ = oder

Schulübliches zu Extremstellen $f(x) = x^k \, (x-6)$

k = 0



k = 1



$\overbrace{x_e \text{ ist Extremstelle, wenn } f'(x) = 0 \wedge f''(x_e) \neq 0}^{B}$

$\underbrace{f''(x_e) \neq 0}_{\text{hinreichend aber nicht notwendig}}$

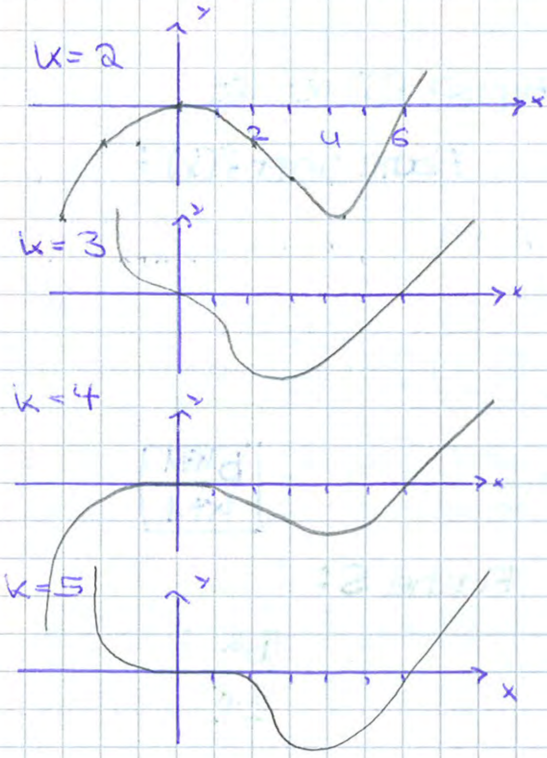
A

$A \Rightarrow B$

B ist notwendig für A und A ist hinreichend für B

$\Rightarrow$ wenn B nicht gilt gibts kein A

$\neg B \Rightarrow \neg A$



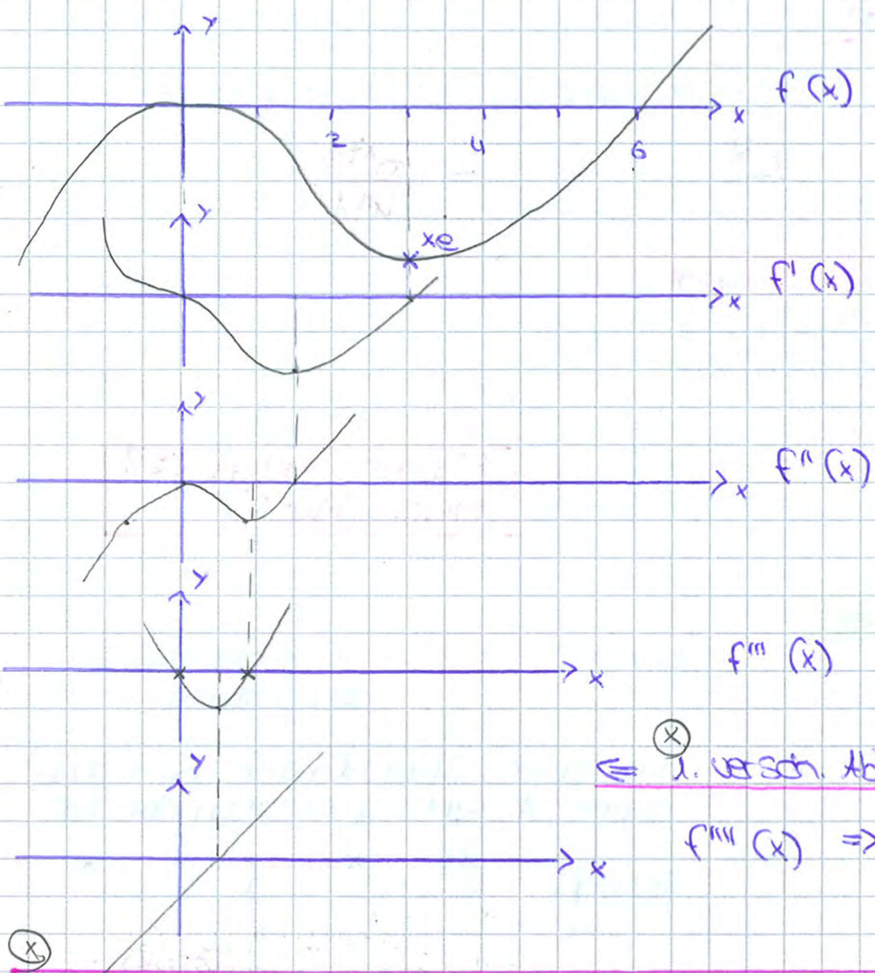
$\underbrace{x_e \text{ Extr.}}_{\text{notwendig}} \Rightarrow \underbrace{f'(x_e) = 0}_{\text{hinreichend}}$

$\overbrace{f'(x_e) = 0 \wedge f''(x_e) \neq 0} \Rightarrow \overbrace{\text{Ex.St.}}$

✓

NICHT:
- $f'(x_e) = 0 \Rightarrow$ Ex.Stelle
- Ex.Stelle $\Rightarrow f'(x) = 0 \wedge f''(x_e) \neq 0$

Wir betrachten $k = 4$

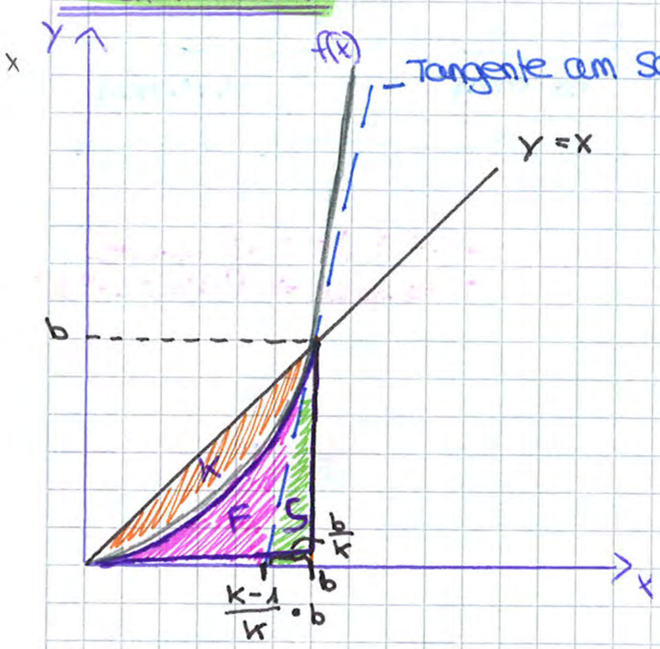


⊗ $\Leftarrow$ 1. versch. Ableitung

$f''''(x) \Rightarrow 4 =$ gerade $\Rightarrow x_e$ Extremstelle

⊗ Wenn die 1. nicht verschwindene Ableitung geraden Grad ist x_e Extremstelle bei ungeradem Grad = Wendestelle

Potenzfunktion



Tangente am Schnittpunkt f(x) mit WH

Fläche unter f(x):

$$\int_0^b f(x)\cdot dx = \int_0^b x^k\cdot dx = \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}+c\right]_0^b$$

$$= \frac{b^{k-1}}{k+1}+c-\left(\frac{0^{(k+1)}}{k+1}+c\right)$$

$$= \frac{b^{k+1}}{k+1}+c-c = \boxed{\frac{b^{k+1}}{k+1}} \quad (F+S)$$

Fläche S: $\frac{b}{k}\cdot b\cdot\frac{1}{2} = \boxed{\frac{b^2}{2k}}$

Fläche F: Fläche unter f(x) − S:

$$\boxed{\frac{b^{k+1}}{k+1}-\frac{b^2}{2k}}$$

Fläche K: Große Dreieck (K+F+S) − Fläche unter f(x):

$$\frac{b^2}{2} - \frac{b^{k+1}}{k+1}$$

Beispiel für k = 5 und b = 1

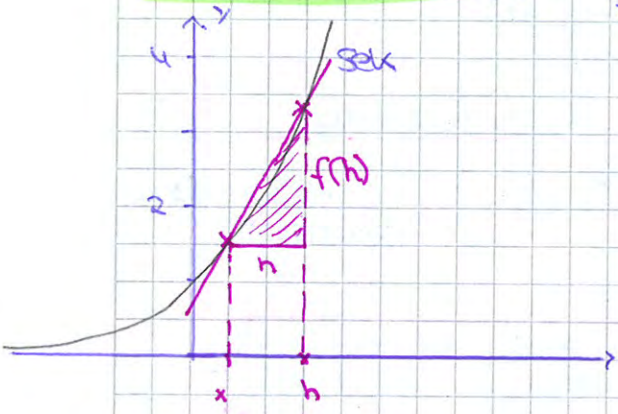
$$F: \frac{1^6}{6}-\frac{1^2}{2\,5} = \frac{1}{6}-\frac{1}{10} = \frac{1}{15}$$

$$K: \frac{1^2}{2}-\frac{1^6}{6} = \frac{1}{2}-\frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$K : F = \frac{1}{3} : \frac{1}{15} = 5 : 1$

Flächen werden k : 1 geteilt (hier 5)

Exponentialfunktion



$f(x) = a^x \Rightarrow 2^x$ je größer Basis a desto steiler

Mit einem Stauchfaktor kann die eigene Ableitung erzeugt werden

Beweis: $m_{sek} = \frac{a^{x+h}-a^x}{h} = \frac{a^x\cdot a^h - a^x}{h}$

$$= a^x\frac{(a^h-1)}{h}$$ Stauch-faktor

⇒ Tangentensteigung bei 0 erzeugt den Stauchfaktor = der die Ableitung gleich der Fkt. laufen lässt

$a^x \cdot m_{tang}$ (im Pkt (0|1))

⇒ Sonderform: e-Funktion

Aufgabe: $f(x) = x^k \cdot e^{-x}$

$k = 0$

$k = 2$

in Produkten ist e-Fkt. immer stärker als jede Potenz von x

$\Rightarrow$ hier 2 Extremum, 2 WP $\Rightarrow$ k = gerade
$\Rightarrow$ bei $k = 3$ $\Rightarrow$ 3 WP (Sattel) $\Rightarrow$ k = ungerade

$\left.\begin{array}{l} \ominus \cdot \ominus = \oplus \\ \ominus \cdot \oplus = \ominus \end{array}\right\}$ gibts nicht

x **Grenzwert nach l'Hospital**

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Beweis: $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(a+h) - f(a)}{g(a+h) - g(a)}$

$$= \lim_{x \to a} \frac{\frac{f(a+h) - f(a)}{h}}{\frac{g(a+h) - g(a)}{h}} = \lim \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Sonderfall: $x \cdot \ln x$

$$\lim_{x \to 0} (x \cdot \ln(x)) = \lim_{x \to 0} \underbrace{\left(\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \right)}_{\text{Kehrwert}} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \right) = -\lim(x) = 0$$

Kehrwert benutzen, damit wir einen Bruch bekommen.