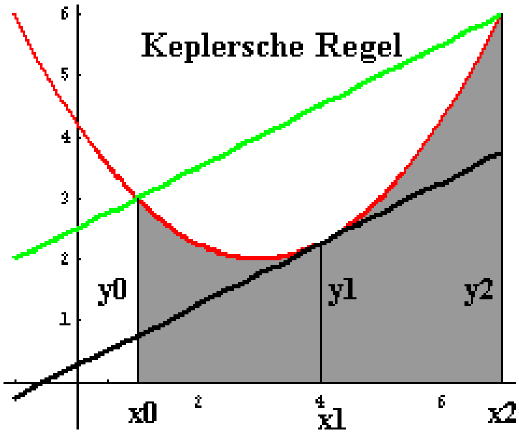
## Offene Aufgabe




Sie kennen von einer Parabel drei Stützpunkte $P_o(x_o,y_o)$, $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, wobei $x_1$ genau der Mittelwert von $x_o$ und $x_2$ ist. Können sie, ohne die Parabel selbst zu bestimmen, das Integral über die Parabel im Intervall $[x_0,x_2]$ bestimmen?
Gesucht ist ein Term mit den $x_i$ und $y_i$.

Was nützt ihnen Ihr Berechnungsterm,

| Konkrete Stützpunkte $P_o(1/3)$, $P_1(4/2\,1/4)$, $P_2(7/6)$ |
|---|

wenn
Sie von einer beliebigen Kurve drei Stützpunke kennen und das entsprechene Integral berechnen wollen?

---

Lösung: *Kern dieses Beweises ist die Drittelung, die jede Parabel im Sehnen-Tagenten-Kasten vornimmt.*

$$\text{TrapezGroß} = \frac{y0 + y2}{2}\,(x2 - x0)$$
$$\text{TrapezKlein} = y1\,(x2 - x0)$$
$$\text{Parallelogramm} = \text{TrapezGroß} - \text{TrapezKlein}$$
$$\text{Integral} = \text{TrapezKlein} + \frac{1}{3}\,\text{Parallelogramm}$$
$$= \frac{1}{2}(x2 - x0)(y0 + y2)$$
$$= (x2 - x0)\,y1$$
$$= \frac{1}{2}(x2 - x0)(y0 + y2) - (x2 - x0)\,y1$$
$$= (x2 - x0)\,y1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}(x2 - x0)(y0 + y2) - (x2 - x0)\,y1\right)$$
$$\text{Integral // Expand // Factor}$$
$$= -\frac{1}{6}(x0 - x2)(y0 + 4\,y1 + y2)$$

Johannes Kepler (Mathematiker, Astronom) fand schon Anfang des 17. Jahrhunderts die folgende Formel (heutige Schreibweise):

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx \frac{x_2 - x_0}{6}\,(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

oder

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)}$$

Sie berechnet bestimmte Integrale für Parabeln (u.a.) exakt, für andere Funktionen ist die Näherung umso besser, je mehr der Funktionsgraph im betrachteten Bereich von einem Parabelbogen angenähert werden kann.
Die Keplersche Regel wird oft auch **Keplersche Fassregel** genannt. Sie berechnet aber Flächen und nicht Volumina.

---

Durch mehrfache Anwendung der Keplerschen Regel mit einer geraden Anzahl n gleich breiter Streifen der Breite h erhält man die Simpson-Regel:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\,(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + 4y_{n-1} + y_n) \text{ mit } h = \frac{b-a}{n}$$