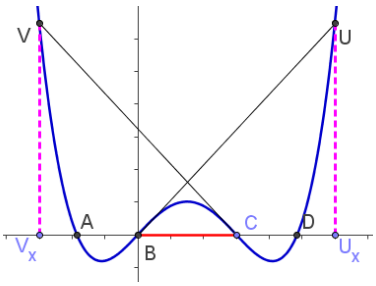
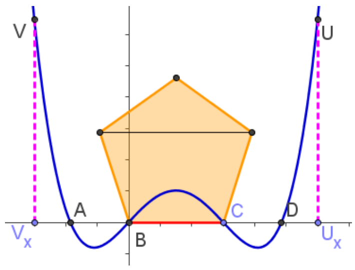
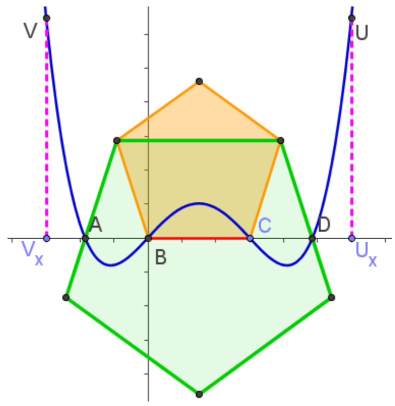
Polynome 4. Grades und der goldene Schnitt







Gegeben ist ein beliebiges Polynom 4. Grades, das zwei Wendepunkte hat. O.B.d.A. hat es die **Gleichung**

$$\boxed{\boldsymbol{f(x)=t(x^4-2w\,x^3+b\,x)}}$$

Beweis: $f''(x)=a\,x(x-w)$ O.B.d.A. liegt ein Wendepunkt in O, der andere an der Stelle w.

Also $f'(x)=a(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}w\,x^2+c)$, O.B.d.A. verlauf f durch O. $\Rightarrow f(x)=a(\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{6}w\,x^3+c\,x)$

Mit $t=a\cdot\frac{1}{12}$ // $b=12c$ folgt die Behauptung. q.e.d.

Satz: Die Wahl $b=w^3$ führt zu dem obigen symmetrischen Graphen.

$\boxed{g(x)=t(x^4-2wx^3+w^3x)}$ Damit entsteht f aus g durch Scherung mit (Addition von) der Geraden $y=\left(b-w^3\right)x$, Scherachse ist die y-Achse, Scherwinkel ist der Steigungswinkel dieser Geraden.

Beweis: Bei Symmetrie muss der WP C auf der x-Achse liegen: d.h.

$f(w)=0 \Leftrightarrow 0=w^4-2w\,w^3+b\,w=0 \quad \Rightarrow b=w^3$ q.e.d.

Satz: Die Wendetangenten schneiden g an den Stellen x=-w und x=2w.

Beweis: Wendetangente in O: $wt(x)=t\,w^3\,x$, Schnitt mit g

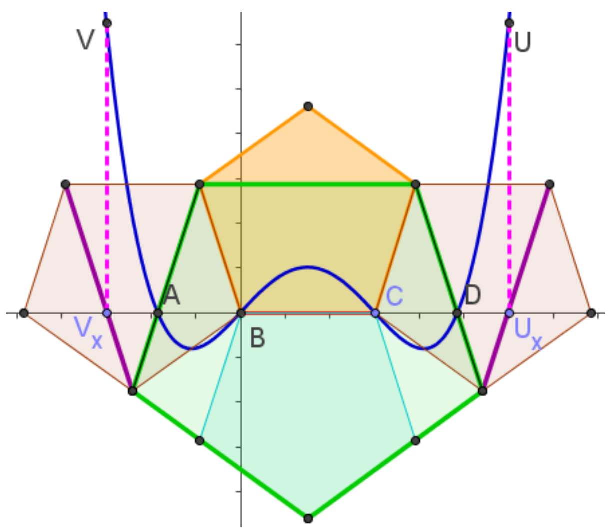
$t\,w^3\,x=t\,x^4-2t\,w\,x^3+t\,w^3\,x=0 \quad \Leftrightarrow x=0 \quad x=2w$, linke Schnittstelle wegen Symm. $x=-w$.

Satz: Die Nullstellen von g stehen im Goldenen Schnitt zueinander: B teilt CA im Goldenen Schnitt. C teilt BD im Goldenen Schnitt. D teilt C U_x im Goldenen Schnitt.

Beweis:
Hornerschema

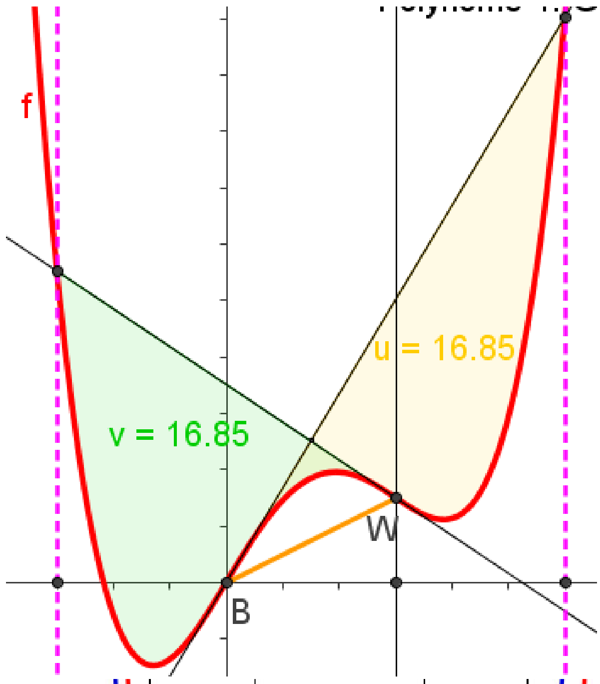
$$\begin{array}{lcccc} & 1 & -2w & 0 & w^3 \\ w & & w & -w^2 & -w^3 \\ \hline & 1 & -w & -w^2 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow x^4-w\,x \quad -w^2=0$$



$$x=-\frac{\sqrt{5}-1}{2}w \quad \vee \quad x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}w$$

Durch die Fünkfecke werden die Goldenen Schnitt-verhältnisse visualisiert

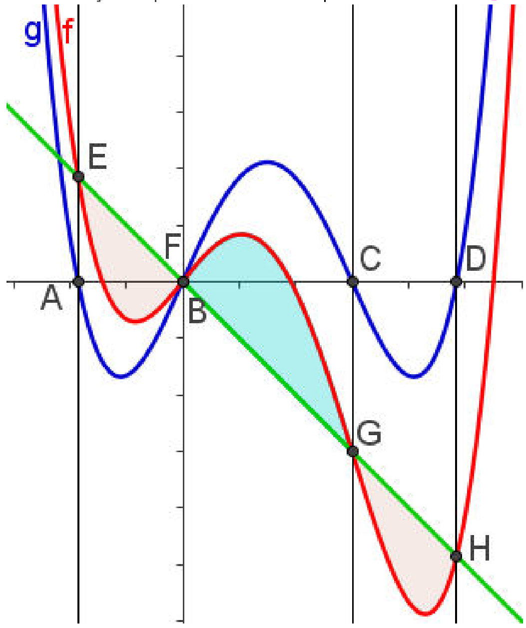


Das gleichmäßige Raster der vier Senkrechten habe ich **"Pantherkäfig"** genannt. Es geht hier um **alle Polynome 4. Grades,** die überhaupt Wendepunkte haben.

Satz: Die Flächen zwischen Wendetangente und Kurve sind links und rechts gleich groß.

Beweis: Es handelt sich bei f um eine gescherte symmetrische Funktion g. Scherungen sind flächentreu. Da sie durch die Addition eines linearen Terms vermittelt werden, sind sie Wendepunkt erhalten. q.e.d

Satz: Die Gerade durch die Wendepunkte schneidet f so, dass Goldene Schnittverhältnisse entstehen:
F teilt EG im Goldnen Schnitt,
G teilt FH im Goldnen Schnitt.
Die Fünfecke visualisieren dies.



Beweis: Bei der Scherung bleiben Teilverhältnisse erhalten. Damit übeträgt sich dies aus dem geraden Fall. q.e.d

Satz: Die Gerade durch die Wendepunkte erzeugt mit f drei geschlossene Flächen stücke. Das mittlere ist so groß wie die äußeren zusammen und es ist ein Achtel von der oben durch eine Wendetangente gebildtete Fläche.

Beweis: Leicht zu berechen.