1. Staatsprüfung für das Lehramt an Berufsbildenden Schulen
Prof. Dr. Dörte Haftendorn **März 2004**

Aufgabe 1 Analysis

Es geht um f_k mit $f_k(x) = k(k - x)\, e^x$ bei $0 \le k$

a) Entwickeln Sie die Graphen von f_k aus Bausteinen. Schließen hieraus möglichst viele Eigenschaften der Scharkurven und die Veränderung der Schar für größer werdende k.

b) In Bild 1 sind Eigenschaften dargestellt, die Sie untersuchen sollen. Dabei spielen die Nullstellentangente, Wendestelle und Extremstelle eine Rolle. Ein Vergleich der links unbegrenzten Fläche unter f_k mit der Dreiecksfläche ist verlangt.
Hinweis: Für die Integration können Sie ein Tafelwerk oder eine Idee aus c) zu Hilfe nehmen.

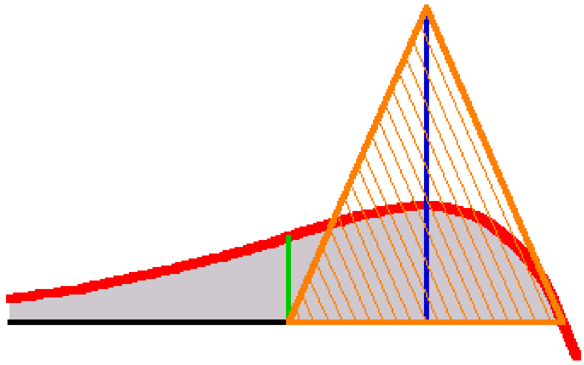


Bild 1

Ergebnis zur Sicherheit $k\, e^k$.

c) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion $f_k^{(n)}(x) = k\ e^x(k - x - n)$.

d) Deuten Sie Bild 2.
Gehen Sie auch auf die aus der Statuszeile entnommenen Informationen ein.
Äußern Sie sich zum pädagogischen Wert dieser Darstellung.

e) Bestimmen Sie die Kurve der Extrema und zeichnen Sie sie in Bild 2 ein.

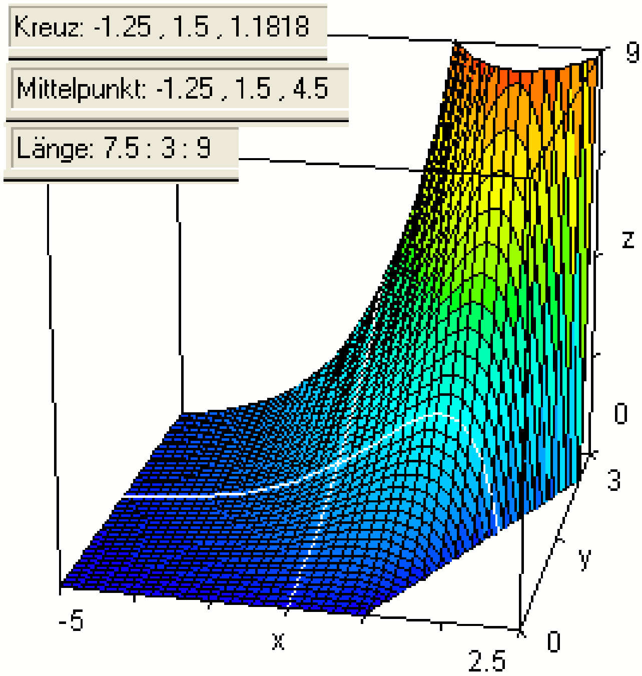


Bild 2

f) In Bild 3 ist f_1 und die zugehörige Krümmungskurve dargestellt.

Geben Sie die Gleichung für die Krümmungskurve an. (Vereinfachungen sind nicht verlangt.)

Deuten Sie Nullstelle und Extrempunkt der roten Kurve.

Äußern Sie sich zum Verhalten der Krümmung für betragsmäßig große x.

Äußern Sie sich zu der Behauptung:
“Mit heutigen Werkzeugen wird die Betrachtung der
Krümmung in der Schule attraktiv.”

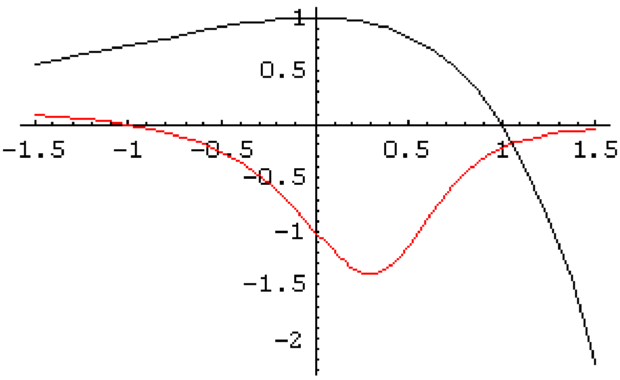
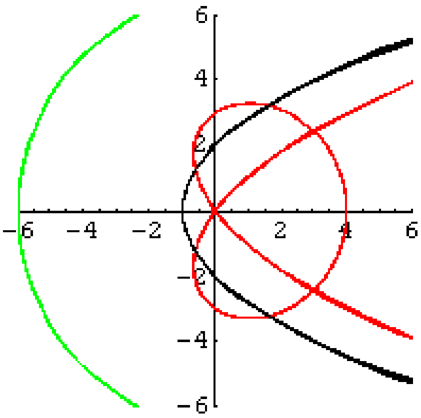


Bild 3

Es folgt Seite -2-

Aufgabe 2 Analytische Geometrie: Konchoiden

a) Begründen Sie anschaulich (mit "Herr und Hund"), warum alle Konchoiden die Polargleichung $r(\varphi) = \text{Weg\_von\_Q}(\varphi) \;\pm k$ haben. (Dabei steht der "Baum" im Ursprung.)



b) Hier sehen Sie eine Konchoide mit Parabelstraße.
Zeichen Sie eine "sichere" Stellung für Herrchen und zwei Hunde (Pluto und Fiffi) ein.
Skizzieren Sie noch drei weitere Stellungen. (Verlängern Sie nach Bedarf den grünen Ast)

Die allgemeine Polargleichung der Kegelschnitte lautet $g(\varphi) = \dfrac{p}{1-\varepsilon\cos(\varphi)}$, wobei der Ursprung im Brennpunkt gewählt ist. Stellen Sie damit erläutert die Gleichung der nebenstehenden Konchoide auf, dabei sind p, k, ε natürliche Zahlen.

Pascalsche Schnecken

Die **Pascalschen Schnecken** sind die Konchoiden, bei denen der Weg_von_Q ein Kreis ist, auf dessen Rand der "Baum" steht.
c) Leiten Sie für einen nach rechts um seinen eigenen Radius R verschobenen Kreis die Polar-Gleichung her. Begründen Sie mit einer Skizze oder mit der entsprechenden kartesischen Gleichung.
Ergebnis $r(\varphi) = 2R\cos(\varphi)$.

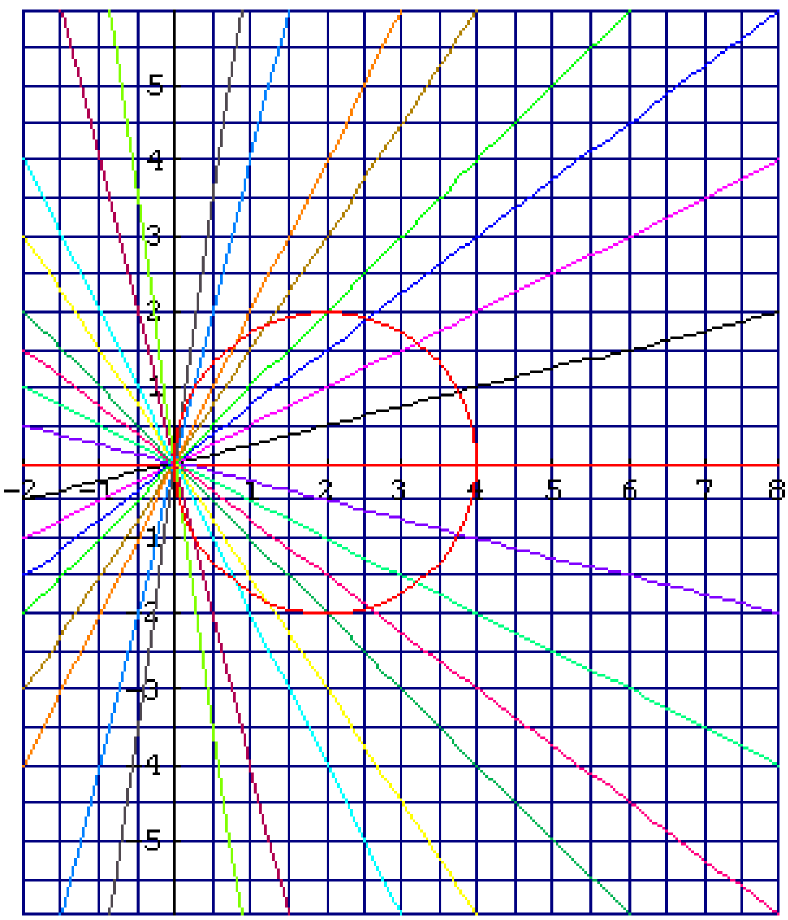
d) Stellen Sie unter Verwendung von c) die Polar-Gleichung der Pascalschen Schnecken auf.
Leiten Sie daraus ihre kartesische Gleichung her.
Zielstruktur:
$$(x^2 - \ldots\ldots + y^2)^2 = k^2(\ldots\ldots\ldots)$$

e) Konstruieren Sie die Kardioide als Pascalsche Schnecke mit k=2R .

f) Konstruieren Sie dazu die Pascalsche Schnecke mit k=2 cm.

g) Welcher Sonderfall ergibt sich für R=0? Zeichen Sie ihn für k=2 ein. Beziehen Sie dies auf die Gleichung.

h) Wie sehen die Pascalschen Schnecken aus, bei denen k größer als 2R ist? Skizzieren Sie grob.



Es folgt Seite -3-

i	xi	yi
1	1	1
2	2	3
3	3	7
4	5	18

Bild 1

Aufgabe 3 Stochastik und Didaktik: Regression

Bild 2

Beschreibende Statistik ist in allen Schultypen ein Element des MU (Mathematik-Unterrichts), in fortschrittlichen Schulen wurde schon immer auch die einfach- und doppelt-logarithmische Darstellung in Klasse 10 gelehrt. Die Regressionsgerade wurde meist "per Augenmaß" eingefügt.
Heutige Werkzeuge zwingen den MU, adäquate Anwendung zu lehren und unsinnige Anwendung zu verhindern. Gehen Sie bei den folgenden Fragen jeweils auf diesen Aspekt ein.

a) Nehmen Sie Bild 2 zum Anlass, um Nominaldaten, Rangdaten, Intervalldaten und Maßdaten zu unterscheiden. Geben Sie je ein Beispiel, das nach Möglichkeit die Daten aus Bild 1 verwendet.

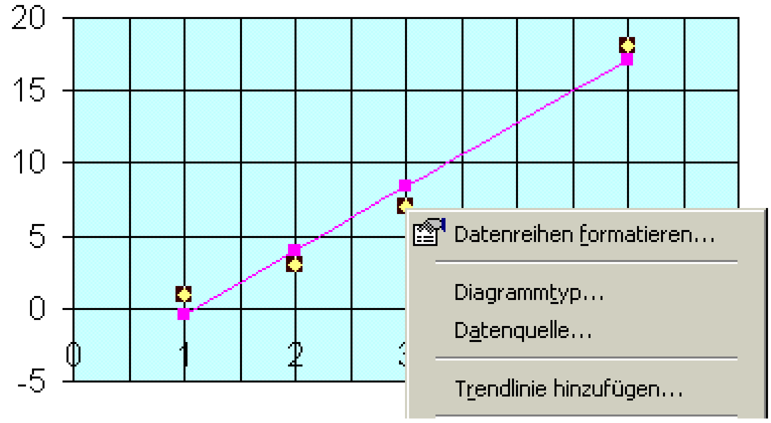


Bild 3

b) Berechnen Sie mit den Daten aus Bild 1 die Ausgleichsgerade, die in Bild 3 dargestellt ist. Bestimmen Sie dabei auch den Korrelationskoeffizienten.

c) Bild 3 zeigt, dass eine Tabellenkalkulation (hier Excel) imstande ist, eine "Trendlinie" hinzuzufügen, deren Typ gemäß Bild 4 ausgewählt werden muss. Was ist mit "Trendlinie" gemeint?
Erläutern Sie für "Exponentiell" und "Potenziell", welcher Kurvengleichungstyp gemeint ist.

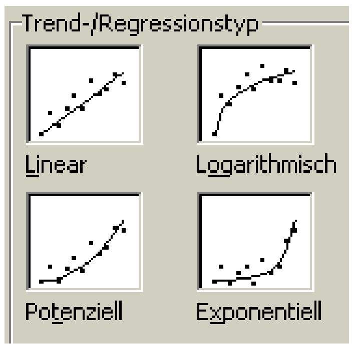


Bild 4

d) Leiten Sie für "Exponentiell" oder "Potenziell" von Hand die Ausgleichskurve für die Daten aus Bild 1 her. (Ohne r).

e) Deuten Sie für Ihren Fall aus d) auch eine Zeichnung an, die man heute "logarithmische Darstellung" nennen würde.
Bild 5 und Bild 6 zeigen logarithmische Darstellungen auf
"logaritmischem Papier". Was war früher der Vorteil dieser Darstellungen und warum sind sie heute in den hier betrachteten Fällen nicht mehr nötig?

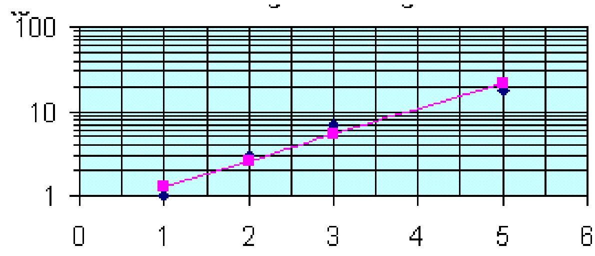


Bild 5

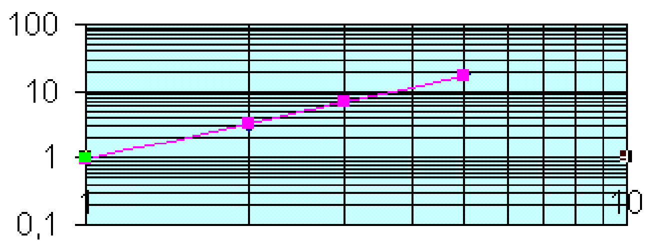


Bild 6

f) Gehen Sie zusammenfassend auf das in der Einleitung genannte Statement ein.
Welche Elemente halten Sie für wesentlich, wenn Mathematik in die Berufsfelder integriert ist?
Welche Elemente halten Sie für wesentlich, wenn es sich um einen Mathematikkurs handelt, der zum Abitur führt?

Anmerkung:
Die Aufgabenteile werden entsprechend ihrem Anspruch und Aufwand mit Punkten bewertet, daher sind die Aufgaben und Aufgabenteile nicht gleich gewichtig. Sie müssen aus den drei Sachgebieten angemessene Anteile bearbeiten. Um Ihnen eine gewisse Schwerpunktsetzung zu ermöglichen, reichen 90% für die Bestnote. Unter dieser Voraussetzung reichen etwa 40% der Punkte um zu bestehen.

Gutes Gelingen!