Stetige Stammfunktion und doch keine volle Integrierbarkeit

Prof. Dr. Dörte Haftendorn: Mathematik mit MuPAD 4, Sept 07   Update 21.09.07
Web: http://haftendorn.uni-lueneburg.de   www.mathematik-verstehen.de

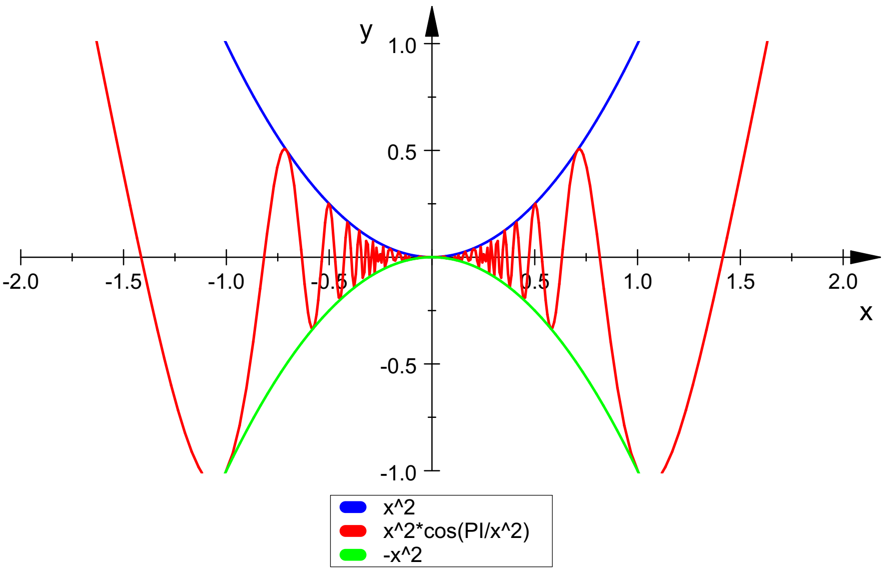
##

Hier gibt es überall stetige und differenzierbare Funktionen, die man "nicht durchzeichnen kann".

```
F:=x->x^2*cos(PI/x^2)
```

$$x \to x^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right)$$

```
plotfunc2d(x^2,F(x),-x^2,x=-2..2,ViewingBoxYRange=-1..1)
```



Ersichtlich ist F stetig

```
F'(x)
```

$$2 \cdot x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right) + \frac{2 \cdot \pi \cdot \sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right)}{x}$$

Der Differentialquotient bei x=0 existiert.

```
limit(F(h)/h,h=0)
```

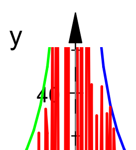
$$0$$

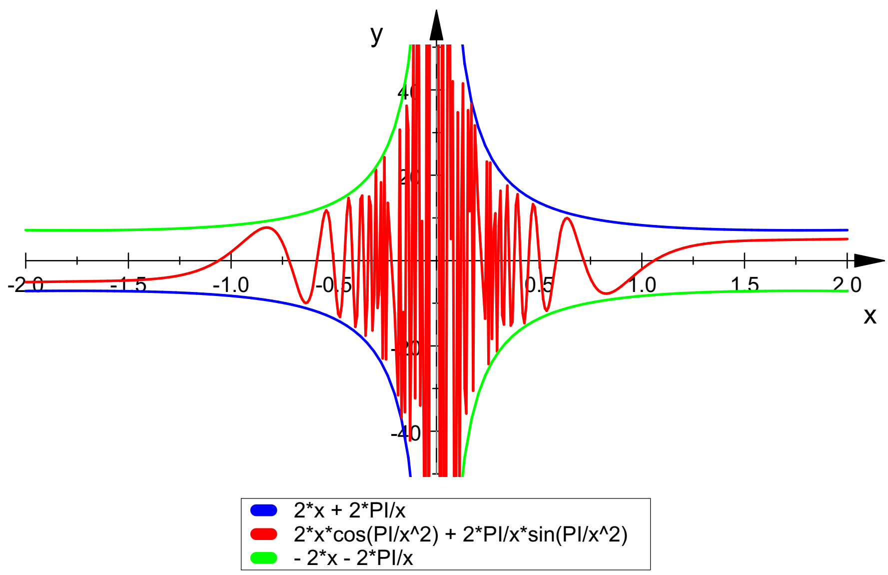
F ist auch überall differenzierbar.
Dennoch hat die Ableitung eine Unstetigkeitsstelle, x=0, und ist nicht beschränkt.
Zudem oszilliert auch f

```
f:=x-->F'(x)
```

$$x \to 2 \cdot x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right) + \frac{2 \cdot \pi \cdot \sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right)}{x}$$

```
plotfunc2d(2*x+2*PI/x,f(x),-2*x-2*PI/x,x=-2..2,ViewingBo
xYRange=-50..50)
```




```
int(f(x), x)
```

$$x^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right)$$

```
int(f(x), x);
int(f(x), x=c..1/2);
int(f(x), x=0..1/2);
F(1/2);
```

$$x^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right)$$

$$\int_c^{\frac{1}{2}} \left(2 \cdot x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right) + \frac{2 \cdot \pi \cdot \sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right)}{x}\right) dx$$

$$\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4}$$

Obwohl f alsobei x=0 bis ins Unendliche wächst und obwohl die Fläche unter den berandenden Funktionen unendlich ist, hat das uneigentliche Integral einen endlichen Wert.

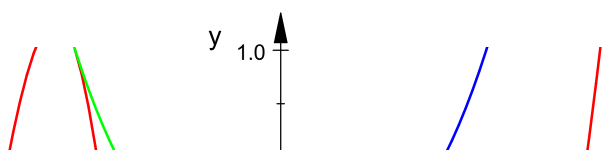
#####################

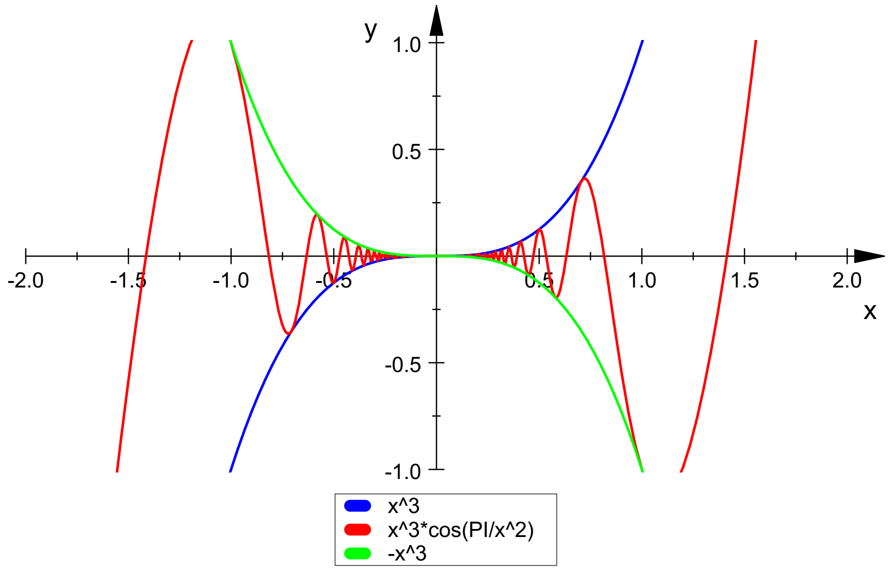
Nun drücke ich den Graphen bei 0 noch stärker zusammen

```
F:=x->x^3*cos(PI/x^2)
```

$$x \rightarrow x^3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right)$$


```
plotfunc2d(x^3,F(x),-x^3,x=-2..2,ViewingBoxYRange=-1..1)
```






```
F'(x)
```

$$2 \cdot \pi \cdot \sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right) + 3 \cdot x^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right)$$

Der Differentialquotient bei x=0 existiert.

```
limit(F(h)/h,h=0)
```

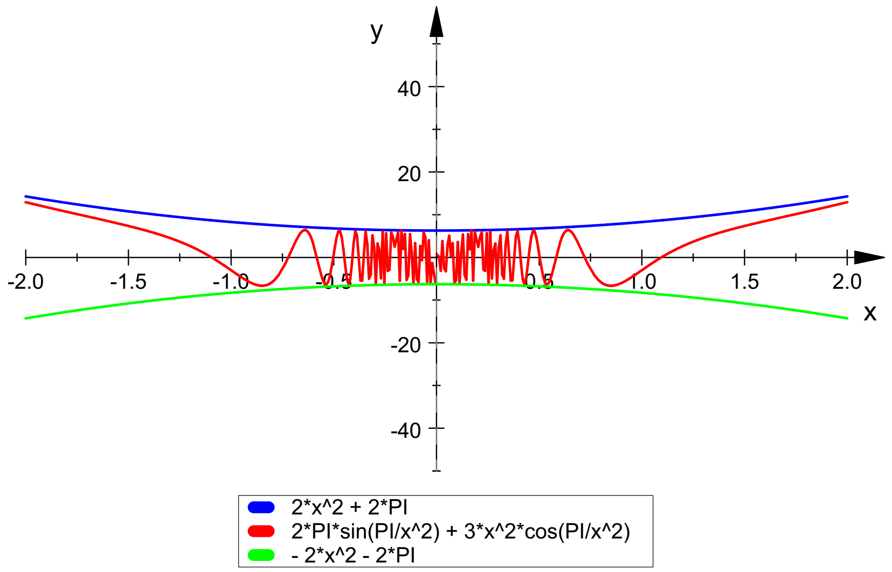
$$0$$

Dennoch ist die Ableitung nicht stetig in 0

```
f:=x-->F'(x)
```

$$x \to 2 \cdot \pi \cdot \sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right) + 3 \cdot x^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right)$$

```
plotfunc2d(2*x^2+2*PI,f(x),-2*x^2-2*PI,x=-2..2,ViewingBoxYRange=-50..50)
```



Dennoch ist f Riemann-integrierbar

```
int(f(x), x);

int(f(x), x=0..0.5)
```

```
int(f(x), x=0..0.5)
```

$$x^3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right)$$

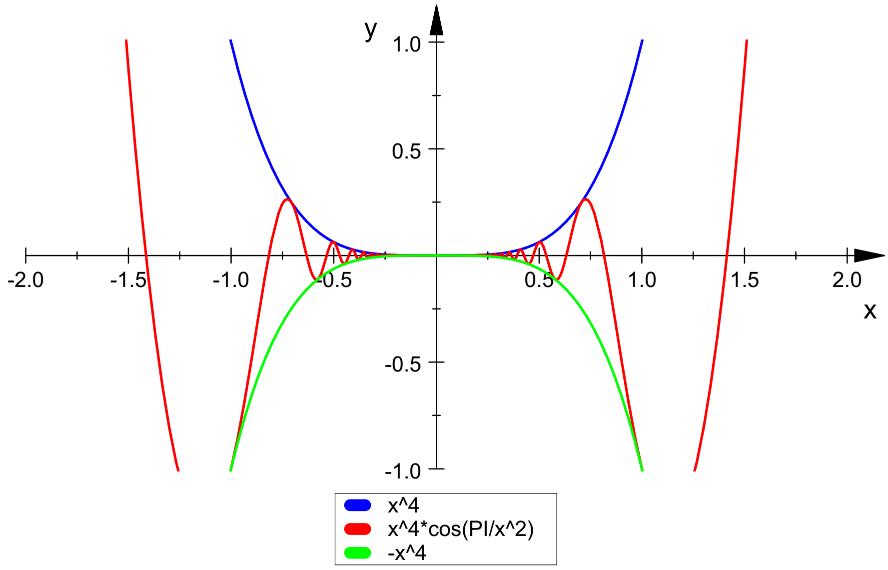
$$0.125$$

#####################
Nun drücke ich den Graphen bei 0 noch stärker zusammen

```
F:=x->x^4*cos(PI/x^2)
```

$$x \to x^4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right)$$

```
plotfunc2d(x^4,F(x),-x^4,x=-2..2,ViewingBoxYRange=-1..1)
```




```
F'(x)
```

$$4 \cdot x^3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right) + 2 \cdot \pi \cdot x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right)$$

Der Differentialquotient bei x=0 existiert.

```
limit(F(h)/h,h=0)
```

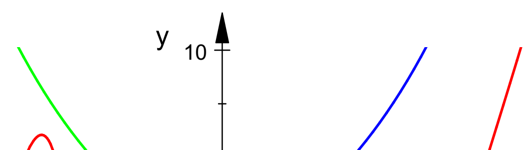
$$0$$

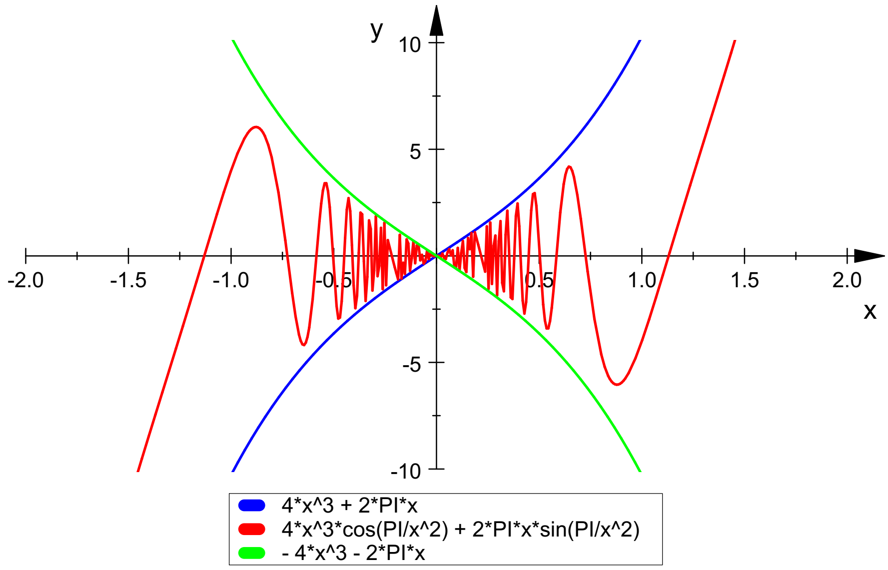
Nun aber ist die Ableitung stetig in 0

```
f:=x-->F'(x)
```

$$x \to 4 \cdot x^3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right) + 2 \cdot \pi \cdot x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right)$$

```
plotfunc2d(4*x^3+2*PI*x,f(x),-4*x^3-2*PI*x,x=-2..2,Viewi
ngBoxYRange=-10..10)
```




```
int(f(x), x)
```

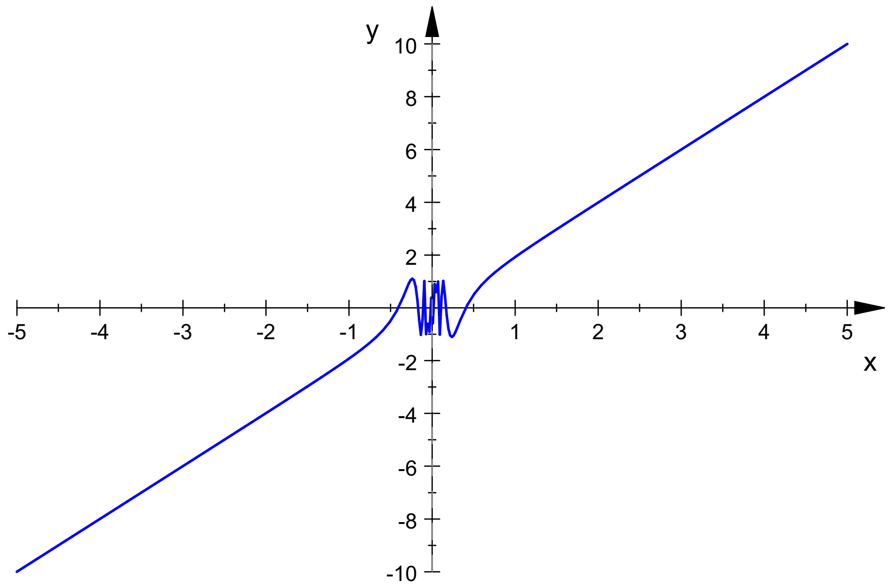
$$x^4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right)$$

```
F:=x->x^2*cos(1/x);
F'(x)
```

$$x \to x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right) + 2 \cdot x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

```
plotfunc2d(F'(x))
```



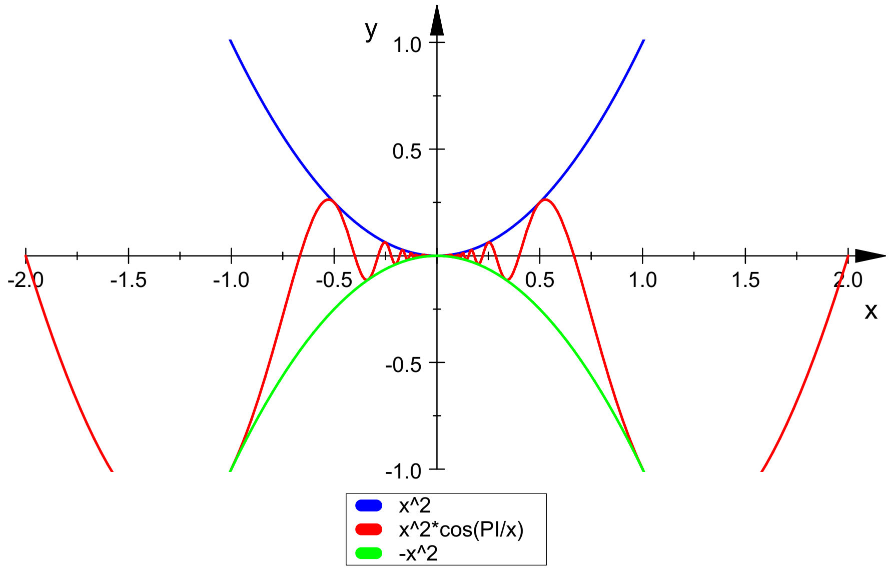
Mein altes Beispiel: Sinuswunderdinge

```
F:=x->x^2*cos(PI/x)
```

```
F:=x->x^2*cos(PI/x)
```

$$x \rightarrow x^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

```
plotfunc2d(x^2,F(x),-x^2,x=-2..2,ViewingBoxYRange=-1..1)
```




```
F'(x)
```

$$\pi \cdot \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) + 2 \cdot x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

Der Differentialquotient bei x=0 existiert.

```
limit(F(h)/h,h=0)
```

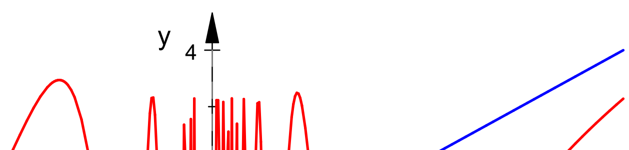
$$0$$

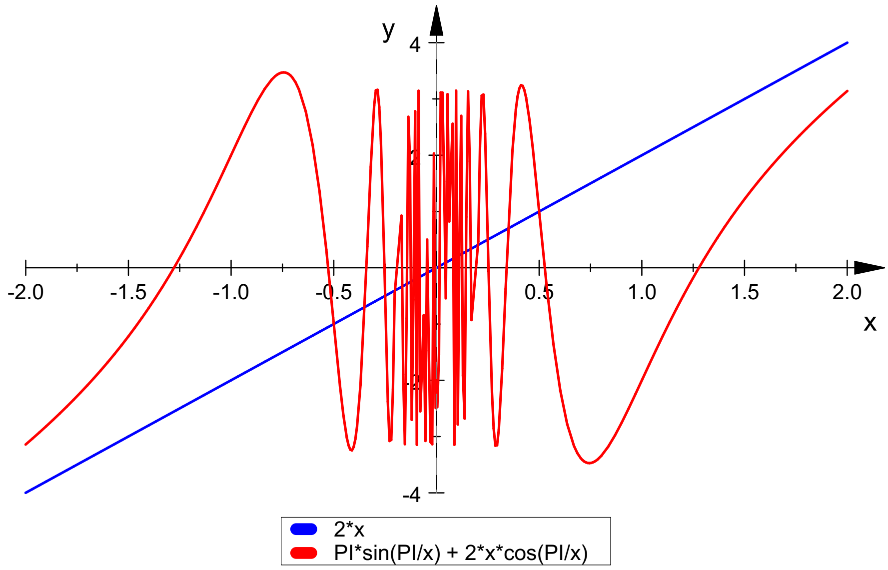
Nun aber ist die Ableitung unstetig

```
f:=x-->F'(x)
```

$$x \rightarrow \pi \cdot \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) + 2 \cdot x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

```
plotfunc2d(2*x,f(x),x=-2..2)
```




```
int(f(x), x);
int(f(x), x=0..1/2);
```

$$x^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

$$\frac{1}{4}$$