Riemann und die Wellengleichung

Prof. Dr. Dörte Haftendorn: Mathematik mit MuPAD 4, Sept 07 Update 21.09.07
Web: http://haftendorn.uni-lueneburg.de www.mathematik-verstehen.de
###
Dateiname riemann-trig.mn

```
saiteDGL:=y->diff(y(x,t), t,t)=`&alpha;`^2*diff(y(x,t),
x,x)
```

$$y \to \frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x, t) = \alpha^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x, t)$$

Differentialgleichung einer schwingenden Saite

```
f:=(x,t)->sin(k*PI*x)*cos(k*PI*`&alpha;`*(t-`&beta;`));
```

$$(x, t) \to \sin(\pi \cdot k \cdot x) \cdot \cos(\pi \cdot k \cdot \alpha \cdot (t - \beta))$$

```
diff(f(x,t),t,t);
diff(f(x,t),x,x);
```

$$-\alpha^2 \cdot \pi^2 \cdot k^2 \cdot \cos(\pi \cdot \alpha \cdot k \cdot (\beta - t)) \cdot \sin(\pi \cdot k \cdot x)$$

$$-\pi^2 \cdot k^2 \cdot \cos(\pi \cdot \alpha \cdot k \cdot (\beta - t)) \cdot \sin(\pi \cdot k \cdot x)$$

```
saiteDGL(f)
```

$$-\alpha^2 \cdot \pi^2 \cdot k^2 \cdot \cos(\pi \cdot \alpha \cdot k \cdot (\beta - t)) \cdot \sin(\pi \cdot k \cdot x) = -\alpha^2 \cdot \pi^2 \cdot k^2 \cdot \cos(\pi \cdot \alpha \cdot k \cdot (\beta - t)) \cdot \sin($$

Linke Seite = rechte Seite Also ist f ein Lösung der DGL
Wenn k ganze Zahl ist, sind die Randbedingungen bei einer Saitenlänge von 1 von allein erfüllt.
Die Anfangsbedingung: für t=0 ist die Saite straff:

```
f(0,t),f(1,t),f(x,0)
```

$$0, \sin(\pi \cdot k) \cdot \cos(\pi \cdot \alpha \cdot k \cdot (\beta - t)), \cos(\pi \cdot \alpha \cdot \beta \cdot k) \cdot \sin(\pi \cdot k \cdot x)$$

Damit die letzte Bedingung für alle x Null wird, muss der Kosinus 0 werden

```
solve(`&alpha;`*`&beta;`*k=1/2,`&beta;`)
```

$$\begin{cases} \emptyset & \text{if } \alpha = 0 \vee k = 0 \\ \left\{\frac{1}{2 \cdot \alpha \cdot k}\right\} & \text{if } \alpha \neq 0 \wedge k \neq 0 \end{cases}$$

```
expand(cos(r-s))
```

$$\cos(r) \cdot \cos(s) + \sin(r) \cdot \sin(s)$$

```
f(x,t)|`&beta`=1/(2*`&alpha;`*k)
```

$$\cos(\pi \cdot \alpha \cdot k \cdot (\beta - t)) \cdot \sin(\pi \cdot k \cdot x)$$


```
expand(cos((hold(k*PI*`&alpha;`*t))-PI/2));
```

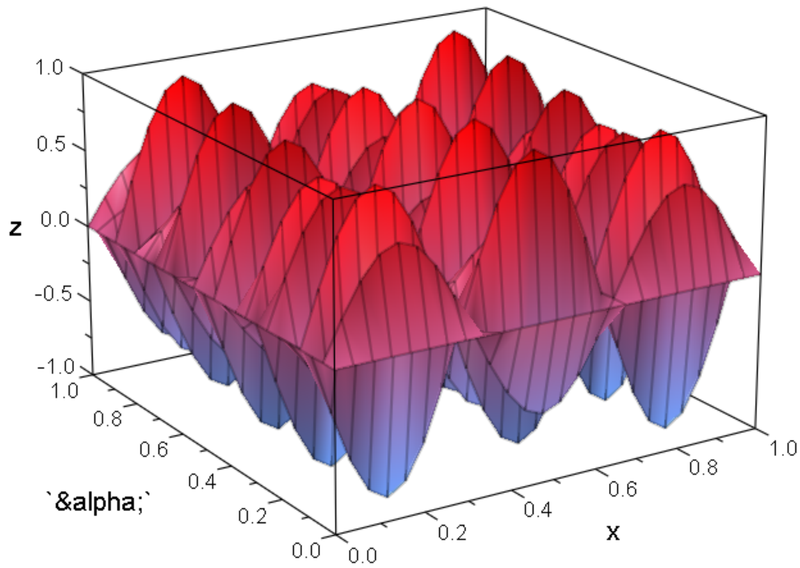
$$\sin(\pi \cdot \alpha \cdot k \cdot t)$$

$\sin(\pi \cdot \alpha \cdot k \cdot t)$

```
f:=x->sin(k*PI*x)*sin(k*PI*`&alpha;`*t)
```

$x \rightarrow \sin(\pi \cdot k \cdot x) \cdot \sin(\pi \cdot k \cdot \alpha \cdot t)$

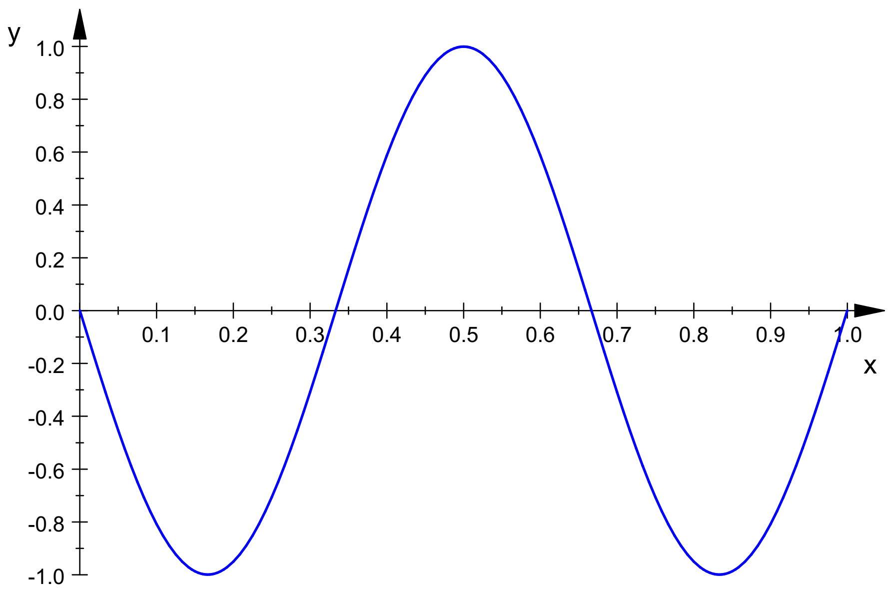
```
k:=3:
plotfunc3d(f(x,t),x=0..1,`&alpha;`=0..1,t=0..2*PI);
f(x,t)
```



$\sin(3 \cdot \pi \cdot x) \cdot \sin(3 \cdot \pi \cdot \alpha \cdot t)$

animieren durch Anklicken!

```
plotfunc2d(f(x,t)|`&alpha;`=1,x=0..1,t=0..60*PI)
```




```
delete k:
```

animieren durch Anklicken! 2

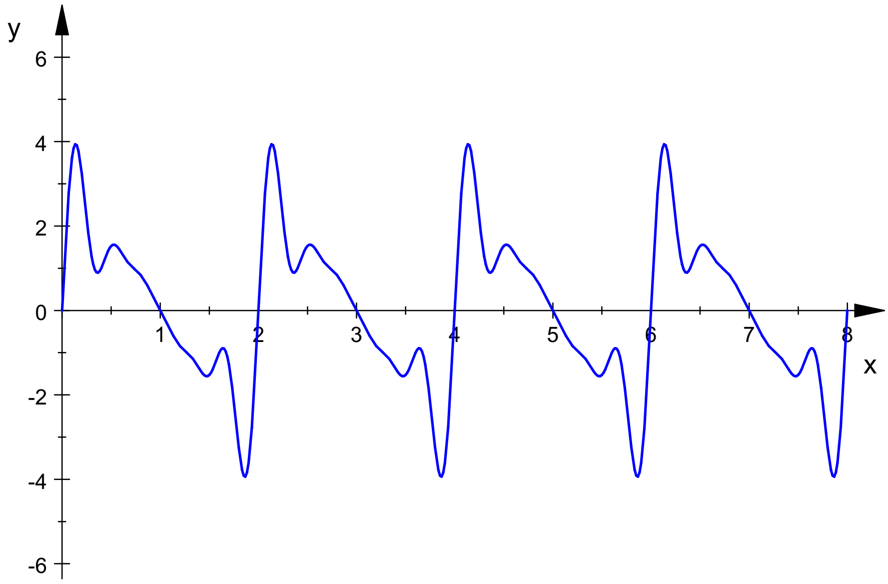
##

Addition dieser Funktionen , 6 Summanden, dem 1. ein 4-faches Gewicht gegeben

```
trigS:=4*(f(x,t)|k=1)+ (f(x,t)|k=2)+(f(x,t)|k=3)+
```

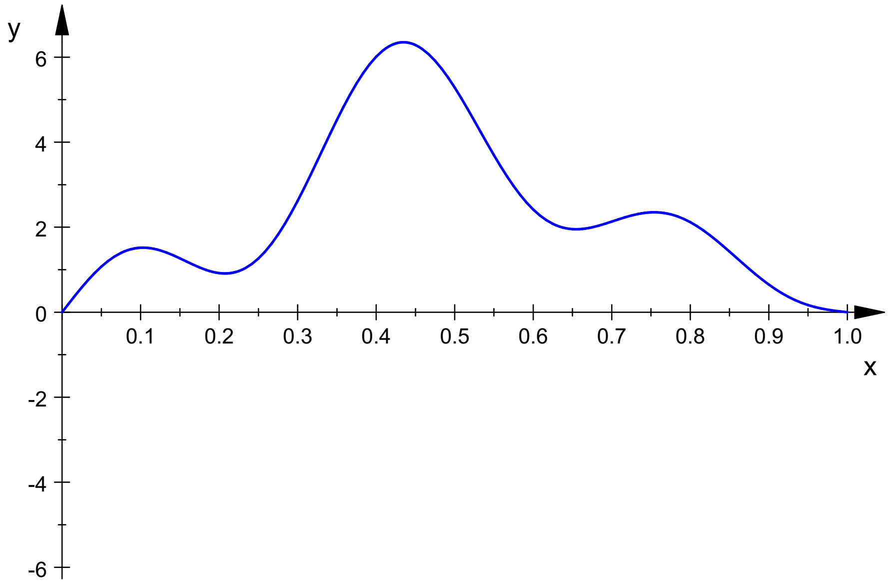
```
trigS:=4*(f(x,t)|k=1)+ (f(x,t)|k=2)+(f(x,t)|k=3)+
       (f(x,t)|k=4)+ (f(x,t)|k=5)+(f(x,t)|k=6):
```

```
`&alpha;`:=1:
plotfunc2d(trigS,x=0..8,t=0..8*PI)
```



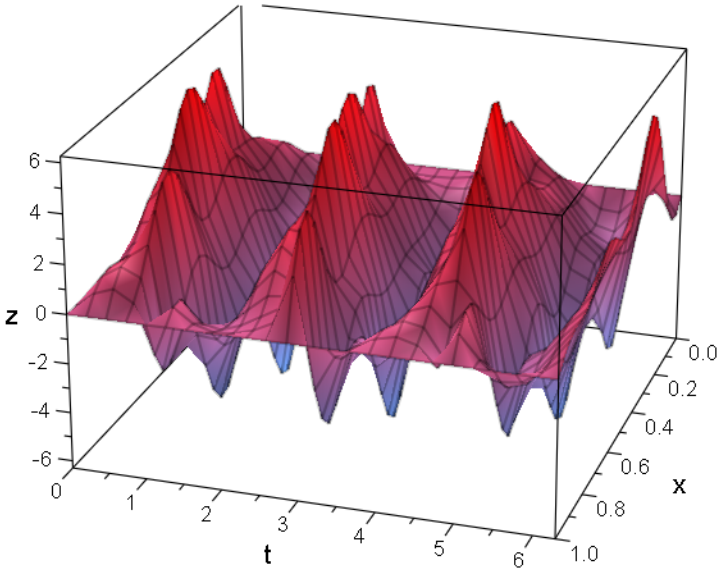
animieren durch Anklicken!

```
`&alpha;`:=1:
plotfunc2d(trigS,x=0..1,t=0..2*PI)
```



animieren durch Anklicken!

```
plotfunc3d(trigS,x=0..1,t=0..2*PI)
```


z
t
x
6
4
2
0
-2
-4
-6
0
1
2
3
4
5
6
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

##