Glasrest

Glasrestaufgabe mit Erklärung von **Maßübertragung** Haftendorn 2011 (1996)

Aus einem Glasrest in Form eines rechtwinkligen Dreiecks soll eine möglichst große (bzl. Fläche) rechteckige Scheibe ausgeschnitten werden. *Katheten* a, b

Diese ist eine Standardaufgabe, die in jeder Sammlung von Extremwertaufgaben vorkommt.

Für schwache Lerngruppen eignet sie sich als Start in das Thema, denn sie kann auch handlungsorientiert eingeführt werden. Ihr Nachteil ist, dass "Mitte" herauskommt und somit keine Analysis benötigt wird, und dass der Eindruck entsteht, durch Raten käme man schnell zum Ziel.

Fall A Eine Rechteckseite auf die Katheten legen. (gelb)

Fall B Eine Rechteckseite auf die Hypotenuse legen. (blau)

Fall A Eine Seite x, die andere Seite q. Zielgröße Fläche f(x)=x*q

Nebenbedingung $\mathbf{nb}:=\frac{q}{b}=\frac{a-x}{a} \blacktriangleright \frac{q}{b}=\frac{-(x-a)}{a}$ $\text{solve}(\mathbf{nb},q) \blacktriangleright q=\frac{-b\cdot(x-a)}{a}$

1.1

Zielfunktion $\mathbf{f}(x):=x\cdot\frac{-b\cdot(x-a)}{a} \blacktriangleright \textit{Fertig}$ Das ist eine Parabel, nach unten geöffnet, mit den Nullstellen 0 und a. Diese sind auch aus den Grenzlagen des Rechtecks zu schließen.

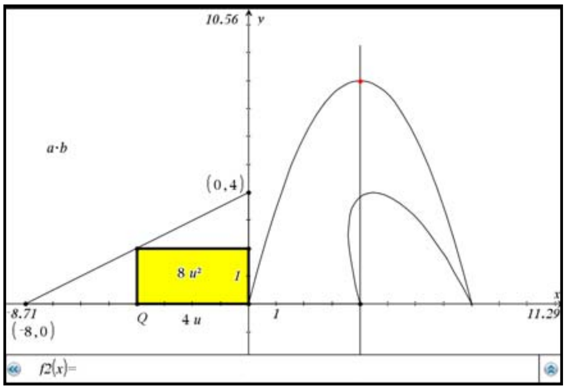
Ihr Maximum ist bei $\frac{a}{2}$ für x. $\frac{-b\cdot(x-a)}{a}|x=\frac{a}{2} \blacktriangleright \frac{b}{2}$ ⚠ Auch die andere Seite muss halbiert werden, wie auch der Strahlensatz erfordert.

Der maximale Flächeninhalt ist dann also $\mathbf{f}\left(\frac{a}{2}\right) \blacktriangleright \frac{a\cdot b}{4}$ ⚠ , das ist die Hälfte der Dreiecksfläche. Mehr kann man nicht "rausholen".

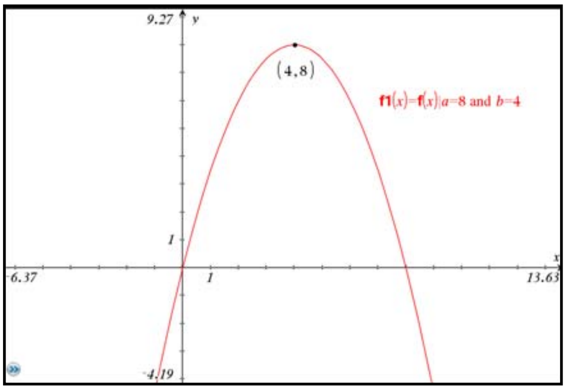
Anmerkung: Der "schiefe" Teil der Ortskurve entsteht dadurch, dass Q auf dem ganzen Rand des Dreiecks laufen kann. Es ist aber nur Q auf der unteren Kathete relevant.

Weiter unten ist die andere Lage FallB des Rechtecks betrachtet.

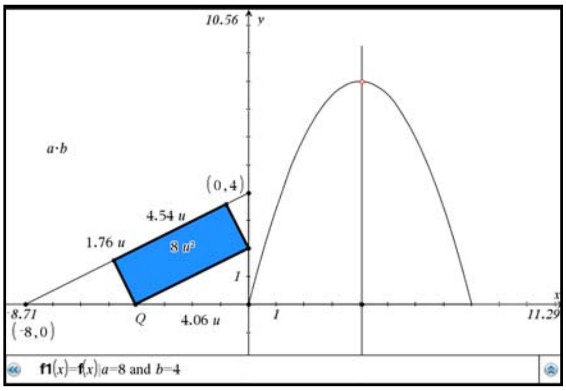
1.2



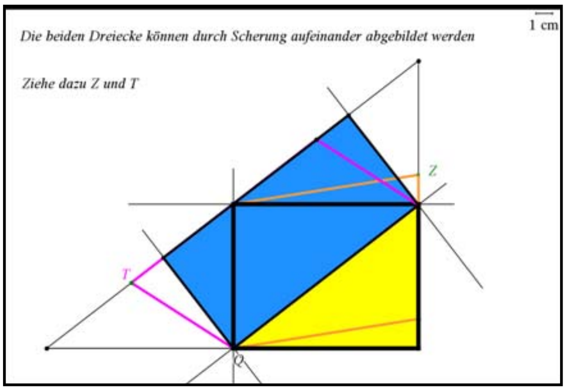
1.3



1.4



1.5



1.6

Fall B Wenn die eine Rechtecksseite auf der Hypotenuse liegt:

Diesen Fall kann man durch **Scherung** auf den Fall A zurückführen.

Also hat man hier denselben Flächeninhalt für das optimale Rechteck.

Allerdings ist das Seitenverhältnis ein anderes, Seiten r und s.

$\mathbf{s}:=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}} \blacktriangleright \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ und $\mathbf{r}:=\frac{a\cdot b}{4\cdot \mathbf{s}} \blacktriangleright \frac{a\cdot b}{2\cdot\sqrt{a^2+b^2}}$

$\mathbf{s}|a=8 \text{ and } b=4 \blacktriangleright 2\cdot\sqrt{5}$ $\mathbf{r}|a=8 \text{ and } b=4 \blacktriangleright \frac{4\cdot\sqrt{5}}{5}$

$\mathbf{s}|a=8 \text{ and } b=4 \blacktriangleright 4.47214$ $\text{approx}(\mathbf{r}|a=8 \text{ and } b=4) \blacktriangleright 1.78885$

1.7

Außer mit Scherung kann man in der besonderen optimalen Lage auch elementar durch "**Abschneideflächen**" die Gleichheit der Flächeninhalte begründen. Dabei brauch man aber die Pythagorassatz-Variante für ähnliche auf die Dreiecksseiten aufgesetzte Figuren.

Das gelb sichtbare Dreieck ist das Hypotenusendreieck, es hat die Fläche der beiden kleineren blauen Kathetendreiecke zusammen.

1.8

Maßübertragung und Berechnung in der Graphfenstern.

Da erforderliche Menu ist beim Wekzeugsymbol

1. Vorbereitung mit "Messen" die zu den passenden Größen Messwerte herstellen und anzeigen (durch Enter)
2. Aktionen Text einfügen Berechnungsterm schreiben, z.b. $a \cdot b \blacktriangleright a \cdot b$
3. Aktionen Berechnung, den Text aus 2. anklicken.
4. Es kommt ein Fenster mit der Aufforderung die erste Zahl oder Variable einzugeben, z.B. nun den Messwert von a anklicken, dann den Messwert von b anklicken.
5. nun sofort neben dem Text aus 2 einfügen durch Enter.

1.9

Maßübertragung

Erst muss man sich klarmachen, was man wohin übertragen will. Es gibt viele Möglichkeiten, gut beschrieben im Online-Handbuch. Hier wird "Maß auf Streckenlänge übertragen" beschrieben beschrieben.

(Strecke auf Strecke geht schneller mit dem Zirkel-Werkzeug (bei Konstruktion))

6. Konstruktion Maßübertragung, Zahl anklicken oder eingeben, Zirkelwerkzeug,

es erscheint an der Maus ein Kreis mit dem gewählten Radius. Diesen setzt man passend ab. Die gewünschte Strecke erhält man durch Schnitt mit einer Geraden.

1.10

FA 49 Baugrund-Dreieck

FA 49 Auf einem Baugrundstück, das die Form eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Kathetenlängen 80 m und 100 m hat, soll eine Halle mit rechteckiger Grundfläche errichtet werden. Bei welchen Abmessungen wird die Hallenfläche am größten?

Dieses ist meine Glasrestaufgabe. Katheten $\mathbf{a}:=100 \cdot m \blacktriangleright 100 \cdot m$, $\mathbf{b}:=80 \cdot m \blacktriangleright 80 \cdot m$

Fall A Eine Rechteckseite auf die Katheten legen. (gelb)

Fall A Eine Seite x, die andere Seite q. Zielgröße Fläche f(x)=x*q

Nebenbedingung $\mathbf{nb}:=\frac{q}{\mathbf{b}}=\frac{\mathbf{a}-x}{\mathbf{a}} \blacktriangleright \frac{q}{80 \cdot m}=\frac{-(x-100 \cdot m)}{100 \cdot m}$

$\text{solve}(\mathbf{nb},q) \blacktriangleright q=\frac{-4 \cdot (x-100 \cdot m)}{5}$

Zielfunktion $\mathbf{f}(x):=x \cdot \frac{-\mathbf{b} \cdot (x-\mathbf{a})}{\mathbf{a}} \blacktriangleright \textit{Fertig}$

Das ist eine Parabel, nach unten geöffnet, mit den Nullstellen 0 und a.

2.1

Diese sind auch aus den Grenzlagen des Rechtecks zu schließen.

Ihr Maximum ist bei $\frac{\mathbf{a}}{2}$ für x. $\frac{-\mathbf{b} \cdot (x-\mathbf{a})}{\mathbf{a}} | x=\frac{\mathbf{a}}{2} \blacktriangleright 40 \cdot m$ ⚠ Auch die andere Seite muss halbiert werden, wie auch der Strahlensatz erfordert. $\frac{\mathbf{b}}{2} \blacktriangleright 40. \cdot m$

Der maximale Flächeninhalt ist dann also $\mathbf{f}\left(\frac{\mathbf{a}}{2}\right) \blacktriangleright 2000 \cdot m^2$ ⚠ , das ist die Hälfte der Dreiecksfläche. Mehr kann man nicht "rausholen",

Fall B Eine Rechtecksseite auf der Hypotenuse

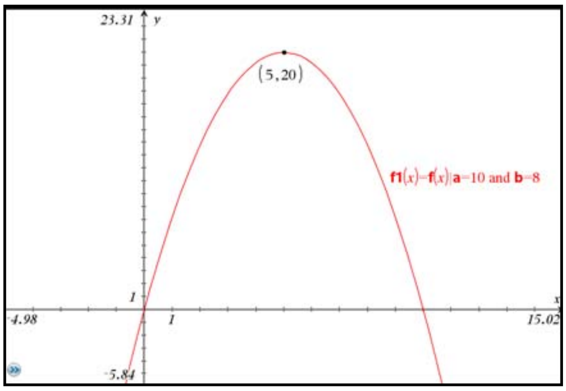
In der anderen Lage ist allerdings ist das Seitenverhältnis ein anderes,

Seiten r und s. $\mathbf{s}:=\sqrt{\frac{\mathbf{a}^2}{4}+\frac{\mathbf{b}^2}{4}} | \mathbf{a}=100 \text{ and } \mathbf{b}=80 \blacktriangleright 10 \cdot \sqrt{41}$ und

$\mathbf{r}:=\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{4 \cdot \mathbf{s} \cdot m} \blacktriangleright \frac{200 \cdot m \cdot \sqrt{41}}{41}$ ⚠

$\mathbf{s} | \mathbf{a}=100 \text{ and } \mathbf{b}=80 \blacktriangleright 64.0312$ $\quad \mathbf{r} | \mathbf{a}=100 \text{ and } \mathbf{b}=80 \blacktriangleright 31.2348 \cdot m$

2.2



2.3