Kanal optimal

Extremwertaufgabe Kanal Haftendorn 2011

In einem zweiten Problem ist die Variante "Tunnel" mit anderer Lösung

k sei der Umfang der Kanals, dessen Querschnitt aus einem Halbkreis mit aufgesetzten senkrechten Rändern der Höhe a besteht. Gesucht ist die Form des Kanals, die am meisten Wasser durchfließen lässt. (siehe Geo−Fenster)

Zielgröße F, die Fläche des Querschnitts.

U sei der Umfang des Halbkreises. Dann gilt $k=u+2\cdot a \blacktriangleright k=u+2\cdot a$ Dies ist schon die Nebenbedingung.k ist fest. U und a hängen voneinander ab. Für den Radius des Halbreises gilt $r=\frac{u}{\pi} \blacktriangleright r=\frac{u}{\pi}$ bzw $u=\pi\cdot r \blacktriangleright u=\pi\cdot r$ mit der Nebenbedingung gilt

$2\cdot a=k-\pi\cdot r \blacktriangleright 2\cdot a=k-\pi\cdot r$.

Im Geo−Fenster ist der Radius r als Variable verwirklicht.

Prinzipiell hätte man auch a oder U nehmen können.

1.1

Die Zielgröße ist $f(r)=\frac{\pi\cdot r^2}{2}+2\cdot r\cdot a \blacktriangleright \frac{-r\cdot(\pi\cdot r-2\cdot k)}{2}=\frac{\pi\cdot r^2}{2}+2\cdot a\cdot r$

Also ist die Zielfunktion $f(r):=\frac{\pi\cdot r^2}{2}+(k-\pi\cdot r)\cdot r \blacktriangleright Fertig$ $f(r) \blacktriangleright \frac{-r\cdot(\pi\cdot r-2\cdot k)}{2}$

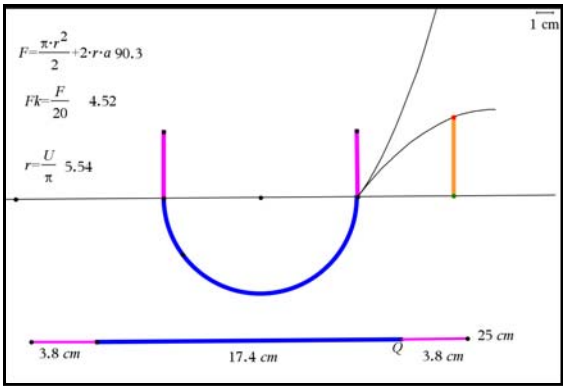
$f(x) \blacktriangleright \frac{-x\cdot(\pi\cdot x-2\cdot k)}{2}$ Dieses braucht man für das Graphfenster.

Es ist eine Parabel mit den Nullstellen r=0 und $r=\frac{2\cdot k}{\pi}$ Ihr Maximum erreicht sie also für $r=\frac{k}{\pi}$ Dort ist a=0 und **der Halbkreis allein, ohne aufgesetzte Ränder, erzeugt die maximale Querschnittsfläche.** Größer kann r gar nicht werden. Damit haben wir in dieser Aufgabe ein "Randmaximimum".

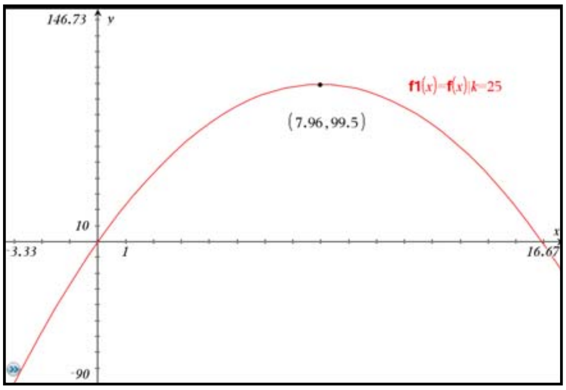
(Achtung: "Tunnel" s.u. hat eine andere Lösung)

Anmerkung: Der obere Teil der Ortskurve im Geo−Fenster entsteht, wenn Q "umgeschlagen" wird, wenn man Q nach links über des blaue Ende hinaus zieht. Er ist geometrisch nicht relevant.

1.2



1.3



1.4

FA 51 Tunnel

FA 51 Der Querschnitt eines 25 m langen Tunnels besteht aus einem Rechteck mit aufgesetztem Halbkreis (siehe Abbildung). Der Umfang der Querschnittsfläche beträgt 18 m. Wie ist der Radius des Halbkreises zu wählen, damit das Tunnelvolumen möglichst groß ist?

k sei der Umfang der Tunnels, dessen Querschnitt aus einem Halbkreis mit darunter gesetzten senkrechten Rändern der Höhe a besteht. Gesucht ist die Form des Tunnels, die das größte Volumen hat. (siehe Geo−Fenster)

Zielgröße F, die Fläche des Querschnitts.

U sei der Umfang des Halbkreises. Dann gilt $k=u+2\cdot a+2\cdot r$ Dies ist schon die Nebenbedingung.k ist fest. U, r und a hängen voneinander ab. Für den Radius des Halbkreises gilt $r=\frac{u}{\pi}$ bzw $u=\pi\cdot r$ mit der Nebenbedingung gilt

$2\cdot a=k-\pi\cdot r-2\cdot r$. Die Zielgröße ist $f(r)=\frac{\pi\cdot r^2}{2}+2\cdot r\cdot a$

(weiter nächste Seite)

2.1

Also ist die Zielfunktion $f(r):=\frac{\pi\cdot r^2}{2}+(k-\pi\cdot r-2\cdot r)\cdot r \blacktriangleright Fertig$ $f(x) \blacktriangleright \frac{-x\cdot((\pi+4)\cdot x-2\cdot k)}{2}$

Es ist eine Parabel mit den Nullstellen r=0 und $r=\frac{2\cdot k}{\pi+4}$

Ihr Maximum erreich sie also für $r=\frac{k}{\pi+4}$ Dort ist $2\cdot a=k-\pi\cdot\frac{k}{\pi+4}-2\cdot\frac{k}{\pi+4} \blacktriangleright 2\cdot a=\frac{2\cdot k}{\pi+4}$

also $a=\frac{k}{\pi+4} \blacktriangleright a=\frac{k}{\pi+4}$ Damit sind bei dem **optimalen Tunnel a und r gleich groß.**

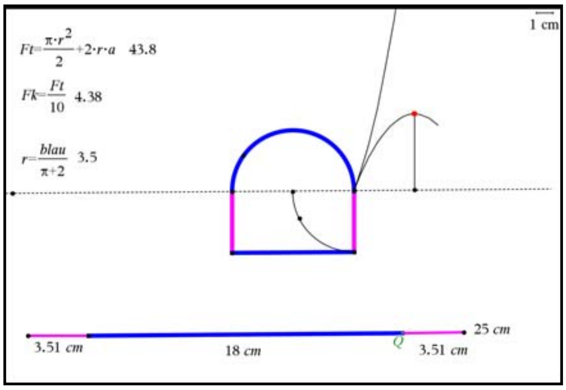
Man kann also zwei Quadrate in das Rechteck legen.

Die optimale Fläche ist $f\left(\frac{k}{\pi+4}\right) \blacktriangleright \frac{k^2}{2\cdot(\pi+4)}$.

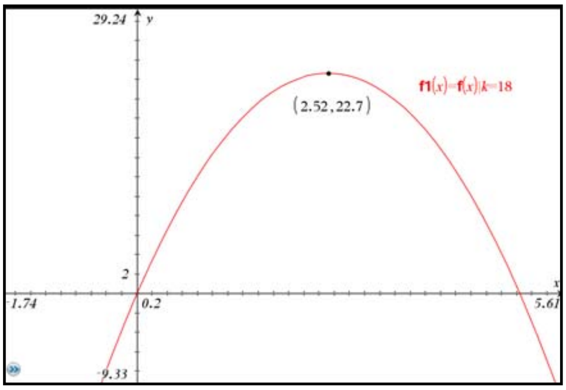
Konkret $\frac{k}{\pi+4}|k=18 \blacktriangleright \frac{18}{\pi+4}$ Also $\frac{k}{\pi+4}|k=18 \blacktriangleright 2.52045$ sind r und a und

$approx\left(f\left(\frac{k}{\pi+4}\right)|k=18\right) \blacktriangleright 22.684$ ist der optimale Flächeninhalt.

2.2



2.3



2.4