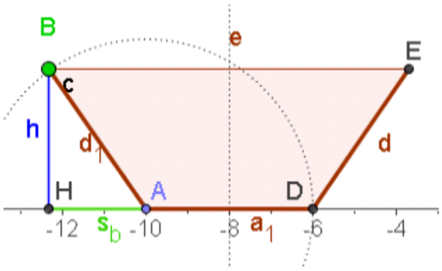
# Rinne aus drei gleichen Brettern. In welcher Form fasst die Rinne am meisten Wasser?




$$\left.\begin{array}{l} a = a_1 = d = d_1 \\ b = s_b \end{array}\right\} h^2 = a^2 - b^2$$

Trapez oben $a+2b$, unten $a$  $m = \frac{a+2b+a}{2}$, $m = a+b$

Zielgröße $V$ maximal

Rinne als Prisma $\Rightarrow$ Querschnitt Fläche maximal

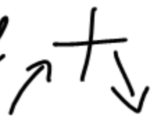
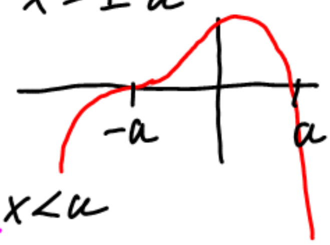
$V = m \cdot h = (a+b)h$  Vorstellung z.B. auf 1m Länge

$V(b) = (a+b)\sqrt{a^2-b^2}$  $V$ ist maximal $\Leftrightarrow$ $V^2$ maximal, $V$ pos.

$V^2(b) = (a+b)^2(a^2-b^2)$ Zielfunktion

$f(x) = (a+x)^2(a^2-x^2)$ Polynom 4. Grades

Dopp. Nst. bei $x=-a$; zwei weitere Nullstellen bei $x = \pm a$ } 3-fach Nst bei $x=-a$, einfach $x=a$

Verlauf  Also 


ein Maximum für $0 < x < a$ erwartet

für $x = b < 0$ sieht die Rinne so aus: △ sicher nicht maximal.

$f(x) = (a^2+2ax+x^2)(a^2-x^2)$
$= a^4 + 2a^3x - 2ax^3 - x^4$

$f'(x) = 2a^3 - 6ax^2 - 4x^3$

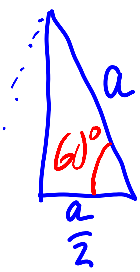
Sichere Lösung von $f'(x)=0$: $x=-a$

Hornerschema

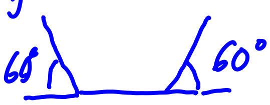
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $-4$ | $-6a$ | $0$ | $2a^3$ |
| $-a$ | | $4a$ | $2a^2$ | $-2a^3$ |
| | $-4$ | $-2a$ | $2a^2$ | $0$ |
| $-a$ | | $4a$ | $-2a^2$ | |
| | $-4$ | $2a$ | $0$ | |

$-4x + 2a = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{2}$

$f\left(\frac{a}{2}\right) = \left(\frac{3a}{2}\right)^2 \frac{a^2 \cdot 3}{4} = \frac{27a^4}{16}$  $V_{max} = \frac{3}{4}\sqrt{3}\,a^2$ für $b = \frac{a}{2}$

Also 


An der Seite muss also ein halbes gleichseitiges Dreieck stehen können.




Dann passt am meisten Wasser in die Rinne.