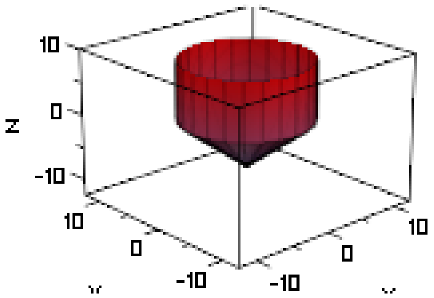
Extremwertaufgabe: Silberschmied Spitzpokal

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, MuPAD 4, Sept.06 Update
Web: http://haftendorn.uni-lueneburg.de www.mathematik-verstehen.de

+++

Mathix ist Silberschmied geworden. Er möchte Pokale schmieden, bei denen auf einen Kegel mit Raduis r und Höhe r ein offener Zylinder aufgesetzt ist. Er hat versucht auszurechnen, welche Zylinderhöhe und welchen Radius er bei festem Volumen (z.B.2 Liter) nehmen muss, damit er minimalen Silberverbrauch hat. Mathilde sagt: "Am besten lässt du den Zylinder weg, das war bei dem Pokal mit der Halbkugel auch am besten." Hat Mathilde Recht? (Variante mit halbkugelförmigem Unterteil siehe Extradatei)



animieren durch Anklicken!

Zielgröße: Silberverbrauch, entspricht der Oberfläche, setzt sich zusammen aus dem Zylindermantel und dem Kegelmantel (hh=h, weil h später gebraucht wird, s=Mantellinie):

```
Sformel:=2*PI*r*hh+PI*r*s;
```

$$2 \cdot \pi \cdot hh \cdot r + \pi \cdot r \cdot s$$

Nebenbedingung, Volumen 2 Liter= 2000 cm^3, setzt sich zusammen aus Kegelvolumen und Zylindervolumen

```
delete V:
s:=sqrt(2)*r;
NB:=   V=PI*r^2*hh+1/3*PI*r^3;
```

$$\sqrt{2} \cdot r$$

$$V = \frac{\pi \cdot r^3}{3} + \pi \cdot hh \cdot r^2$$

Nach r ließe sich diese Gleichung gar nicht leicht auflösen, daher Auflösen nach hh

```
assume(r>0):  solve(NB,hh);
```

$$\left\{ \frac{V - \frac{\pi \cdot r^3}{3}}{\pi \cdot r^2} \right\}$$

```
expand(op(%))
```

$$\frac{V}{\pi \cdot r^2} - \frac{r}{3}$$

```
h:=r->V/(PI*r^2)-1/3*r;h(r);
```

$$r \rightarrow \frac{V}{\pi \cdot r^2} - \frac{r}{3}$$

$$\frac{V}{\pi \cdot r^2} - \frac{r}{3}$$

Aufstellen der Zielfunktion S in Abhängigkeit von r allein

```
S:=r->2*PI*r*h(r)+PI*r*s;S(r); expand(S(r)):
```

$$r \rightarrow 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h(r) + \pi \cdot r \cdot s$$

$$\pi \cdot \sqrt{2} \cdot r^2 - 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \left(\frac{r}{3} - \frac{V}{\pi \cdot r^2}\right)$$

Man kann die Ausgabe markieren und in eine neue Ausgabezelle ziehen.

```
expand(2^(1/2)*PI*r^2 - 2*PI*r*(1/3*r - 1/PI*V/r^2));
```

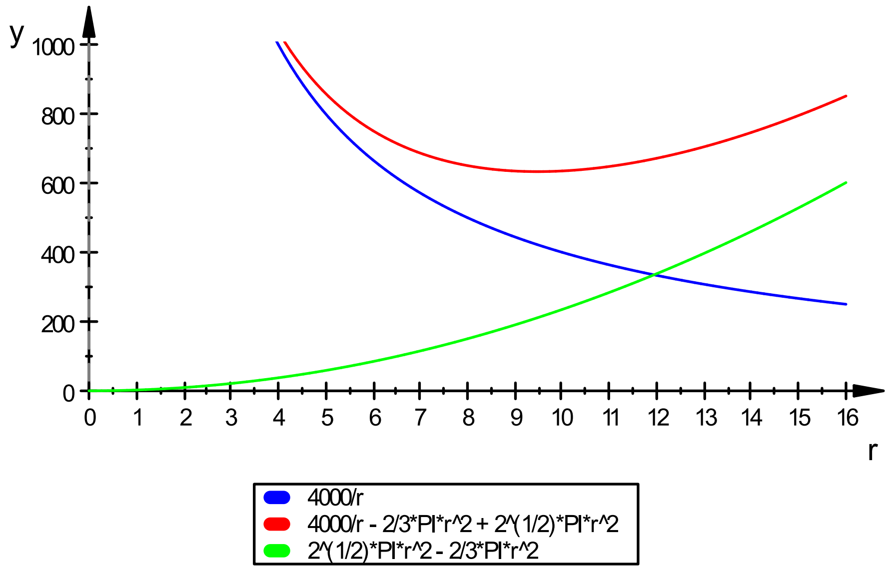
$$\frac{2 \cdot V}{r} - \frac{2 \cdot \pi \cdot r^2}{3} + \pi \cdot \sqrt{2} \cdot r^2$$

```
S:=r->2*V/r - 2/3*PI*r^2 + 2^(1/2)*PI*r^2: S(r);  //Zielfunk
```

$$\frac{2 \cdot V}{r} - \frac{2 \cdot \pi \cdot r^2}{3} + \pi \cdot \sqrt{2} \cdot r^2$$

Aufbau der Zielfunktion aus Bausteinen:
Nun wird das Volumen auf 2 Liter=2000cm^3 festgesetzt.

```
V:=2000:  //Längen in cm
plotfunc2d(2*V/r,S(r), - 2/3*PI*r^2 + 2^(1/2)*PI*r^2,r=0..1(
                  ViewingBoxYRange=0..1000 );
```



Als Summe aus Parabel und Hyperbel hat die Zielfunktion ein gesichertes Minimum, etwa bei r=10.
Berechnung:

```
S'(r);
solve(S'(r)=0,r);
```

$$2 \cdot \pi \cdot \sqrt{2} \cdot r - \frac{4 \cdot \pi \cdot r}{3} - \frac{4000}{r^2}$$

$$\left\{ \sqrt[3]{-\frac{6000}{2 \cdot \pi - 3 \cdot \pi \cdot \sqrt{2}}} \right\}$$

```
rs:=float(%[1])
```

$$9.478666144$$

Welches ist das maximale r, für welchel die 2 Liter ganz in dem Kegel sind? Wenn r noch größer würde, wäre der Pokal ja zu groß.
Berechnung aus dem Kegelvolumen:

```
V:=2000:
solve(V=1/3*PI*r^3,r);
rm:=(op(%));rmf:=float(rm);
```

$$\left\{ \sqrt[3]{\frac{6000}{\pi}} \right\}$$

$$\sqrt[3]{\frac{6000}{\pi}}$$

$$12.40700982$$

Da ergibt sich ein größerer Wert, darum hat der Pokal mit minimalem Verbrauch einen zylindischen Rand mit folgender Höhe:

```
simplify(h(rs));
```

3.92619207

Damit ist klar, dass Mathilde nicht Recht hat, der Pokal für 2 Liter mit minimalem Silberverbrauch hat einen
Zylinderrand von fast 4 cm. Die Silberoberfläche ist dann

```
simplify(S(rs));
float(%)
```

633.0004569

633.0004569

##

Herstellung der Graphen:

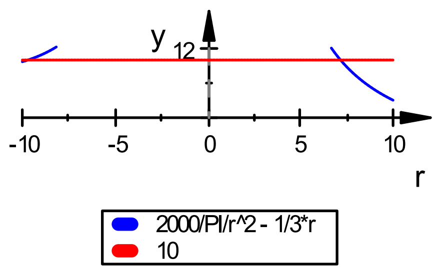
Sinnvolle optische Begrenzung für h könnte 10 sein. Wie groß ist dann r

```
solve(h(r)=10,r)
```

$$(0, \infty) \cap \mathrm{RootOf}\left(\pi \cdot X1^3 + 30 \cdot \pi \cdot X1^2 - 6000,\ X1\right)$$

Exakt geht es nicht, also Ablesen:

```
plotfunc2d(h(r),10,r=-10..10,ViewingBoxYRange=0..12 )
```



Numerische Bestimmung:

```
lo:=numeric::solve(h(r)=10,r);
lm:=numeric::solve(h(r)=0,r)
```

$\{-27.46883186,\ -9.699440553,\ 7.16827241\}$

$\{12.40700982,\ -6.203504909 - 10.74478569 \cdot i,\ -6.203504909 + 10.74478569$

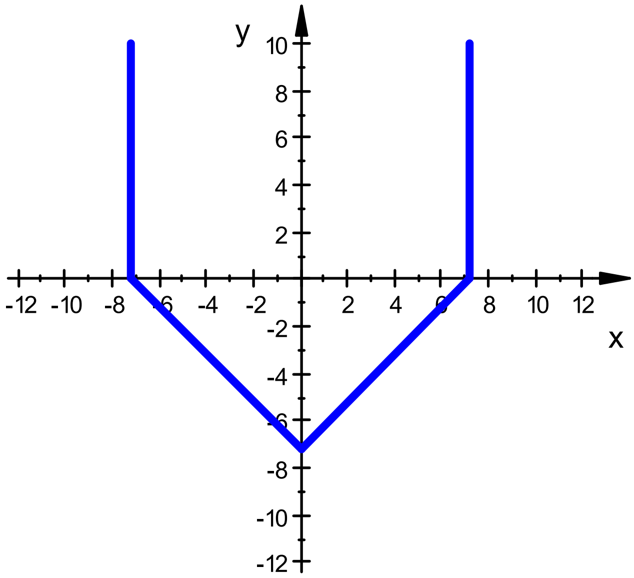
```
rmin:=lo[3];
rmax:=lm[1];
```

7.16827241

12.40700982

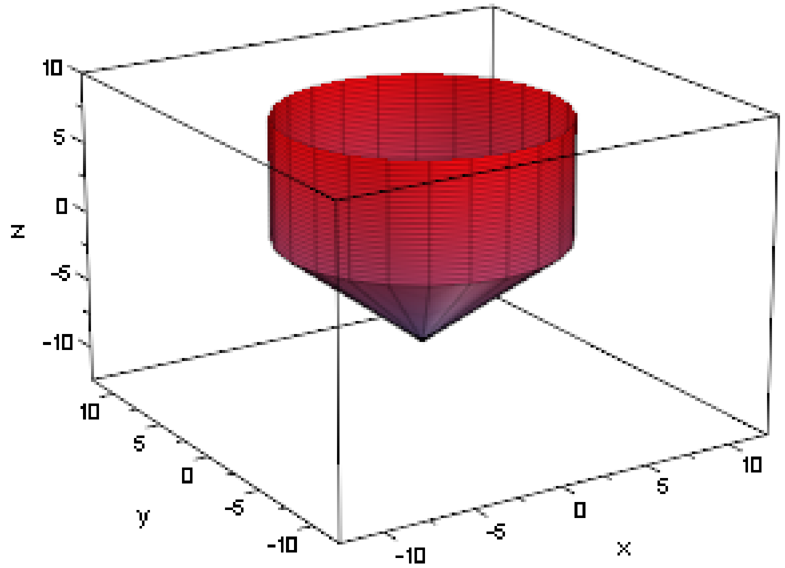

```
gerli2d:=plot::Line2d([-r,0],[0,-r],r=rmin..rmax):
gerre2d:=plot::Line2d([r,0],[0,-r],r=rmin..rmax):
```

```
zy2d1:=plot::Line2d([-r,0],[-r,h(r)],r=rmin..rmax ):
zy2d2:=plot::Line2d([r,0],[r,h(r)],r=rmin..rmax):
plot(gerli2d, gerre2d,zy2d1,zy2d2, ViewingBoxYRange=-rmax..1
                                  LineWidth=1, Scaling=Const
```



animieren durch Anklicken!

```
hkeg3d:=plot::Surface([k*cos(t),k*sin(t),-r+k],
                      t=0..2*PI,k=0..r , r=rmin..rmax):
zyl3d:=plot::Surface([r*cos(t),r*sin(t),hh],t=0..2*PI,hh=0..
                      r=rmin..rmax,  ViewingBoxZRange=-rmax..
                      AnimationStyle=BackAndForth):
plot(hkeg3d,zyl3d)
```



animieren durch Anklicken!

Gezeigt sind verschiedene Pokale mit 2 Liter Inhalt.

##5###

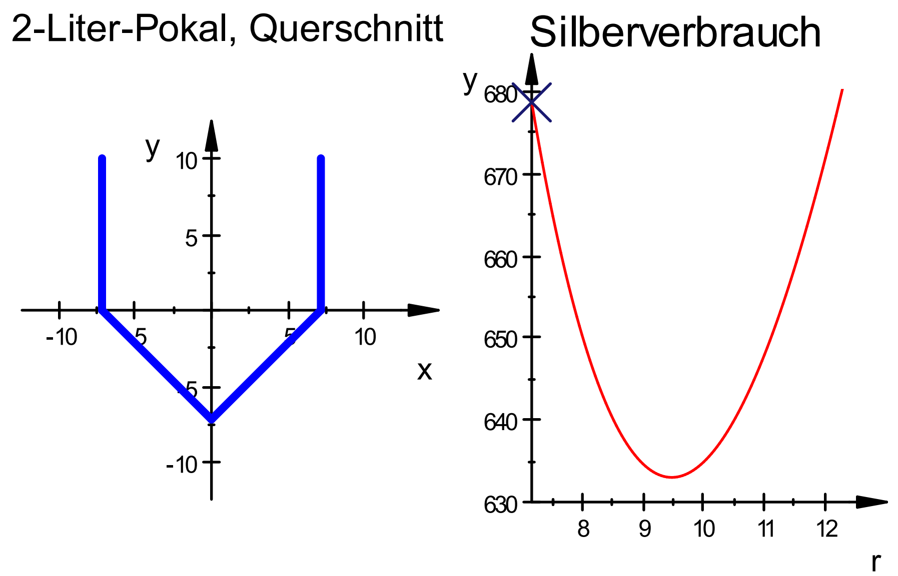
Darstellung der Zielfunktion allein und eines animierten Silververbrauchspunktes

```
Sg:=plot::Function2d(S(r),r=rmin..rmax, LineColor=[1,0,0]):
```

```
pkt:=plot::Point2d([r,S(r)],r=rmin..rmax, PointSize=5,
                                      PointStyle=XCrosses):
```

Definition von Szenen, damit man alles zusammen sehen kann.

```
scen1:=plot::Scene2d(gerli2d,gerre2d,zy2d1,zy2d2,
     ViewingBoxYRange=-rmax..10,LineWidth=1, Scaling=Constra
                      AnimationStyle=BackAndForth,
                    Header="2-Liter-Pokal, Querschnitt",HeaderFont = ["
scen2:=plot::Scene2d(Sg,pkt, ViewingBoxYRange=630..680,
                   AnimationStyle=BackAndForth,
               Header="Silberverbrauch", HeaderFont = ["arial", 16]):
plot(scen1, scen2):
```

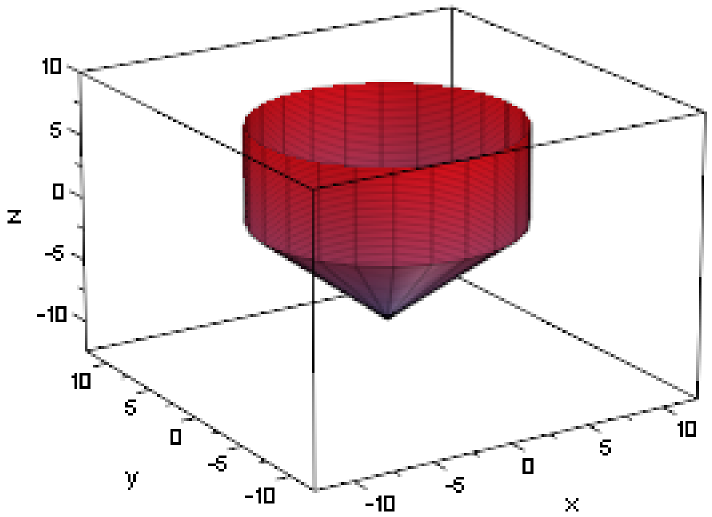


animieren durch Anklicken!

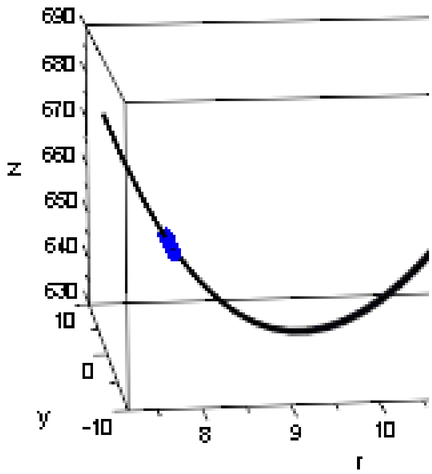
Leider können 2d- und 3d-Szenen nicht in denselben plot.
Darum Simulation von 2d in 3d.

```
SWand:=plot::Function3d(S(r),r=rmin..rmax,y=0..1,
                                    ViewingBox=[rmin..rmax,-10..10,
SZeiger:=plot::Line3d([r,-2,S(r)],[r,2,S(r)],r=rmin..rmax,
                                   Tubular=TRUE, TubeDiameter=2):
scen3:=plot::Scene3d(hkeg3d,zyl3d, AnimationStyle=BackAndForth,
                    Header="2-Liter-Pokal",HeaderFont = ["arial", 16]):
scen4:=plot::Scene3d(SWand,SZeiger,AnimationStyle=BackAndForth,
                Header="Silberverbrauch", HeaderFont = ["arial", 16]):
plot(scen3,scen4):
```

2-Liter-Pokal



Silberverbrauch



animieren durch Anklicken !