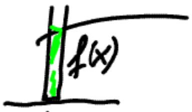
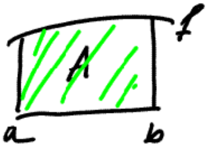
Flächen in allen Darstellungen

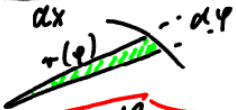
Kartesisch $y=f(x)$



$$\boxed{A=\int_a^b f(x)\,dx}$$

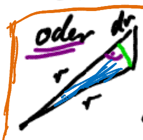


Polar $r=r(\varphi)$



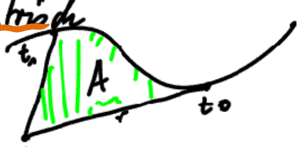
$\dfrac{\text{Sektor}}{\pi r(\varphi)^2}=\dfrac{d\varphi}{2\pi} \Rightarrow \text{Sektor}=\frac{1}{2}r(\varphi)^2\,d\varphi$

$$\boxed{A=\frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r(\varphi)^2\,d\varphi}$$

oder  $r\,d\varphi$ Dreiecke vernachlässigen

$dA=\frac{1}{2}r\cdot r\,d\varphi+\underbrace{\frac{1}{2}r\,d\varphi\cdot dr}_{\text{klein}}$

Parametrisch



$x=x(t)$ Vorstellung: in Polarkoordinaten $\varphi=\varphi(t)$

$y=y(t)$ Verwendung der Polar-Flächenformel

und $\varphi=\arctan\dfrac{y(t)}{x(t)}$

Also $\dfrac{d\varphi}{dt}=\dfrac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\dfrac{\dot y x-y\dot x}{x^2}=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\dfrac{\dot y x-y\dot x}{x^2}=\dfrac{\dot y x-y\dot x}{r^2}$ } alles abh. von t

Aus Polar-A. $A=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} r(t)^2\,\dfrac{d\varphi}{dt}\,dt=\boxed{\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(\dot y x-y\dot x)\,dt=A}$ Parametrisch

Beispiele Ellipse, MP-Darstellung $r(\varphi)=\dfrac{b}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi}}$ Polar

$A=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\dfrac{b^2}{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi}\,d\varphi$ mit $b=3$ $e=4$ $\Rightarrow a=5$; $\varepsilon=\frac{4}{5}$

folgt tatsächlich $A=15\pi$ Formel $A=\pi ab$ ✓.

Ellipse Parameterdarstellung $x=a\cos\varphi$ $\dot x=-a\sin\varphi$

$y=b\sin\varphi$ $\dot y=b\cos\varphi$

$A=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\dot y x-y\dot x)\,d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(b\cos\varphi\cdot a\cos\varphi-b\sin\varphi(-a\sin\varphi))\,d\varphi=$

$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(ab\cos^2\varphi+ab\sin^2\varphi)\,d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}ab\,\varphi=\frac{1}{2}\left[ab\varphi\right]_0^{2\pi}=\pi ab$

Neilsche Parabel $x=t^2$ $\dot x=2t$ $y=t^3$ $\dot y=3t^2$

$A=\frac{1}{2}\int_0^2(3t^2\cdot t^2-t^3\cdot 2t)\,dt=\frac{1}{2}\int_0^2 t^4\,dt=\frac{1}{10}\left[t^5\right]_0^2=\frac{32}{10}=3{,}2$

Nochmal Bogenlänge:

$\| = r\,d\varphi$ Bogenstück

$ds^2=r^2d\varphi^2+dr^2=\left(r^2+\dfrac{dr^2}{d\varphi^2}\right)d\varphi^2=(r^2+\dot r^2)\,d\varphi^2$

Also ist die Herleitung der Bogenlänge aus der Parameterdarstellung nicht nötig. Es geht auch direkt.