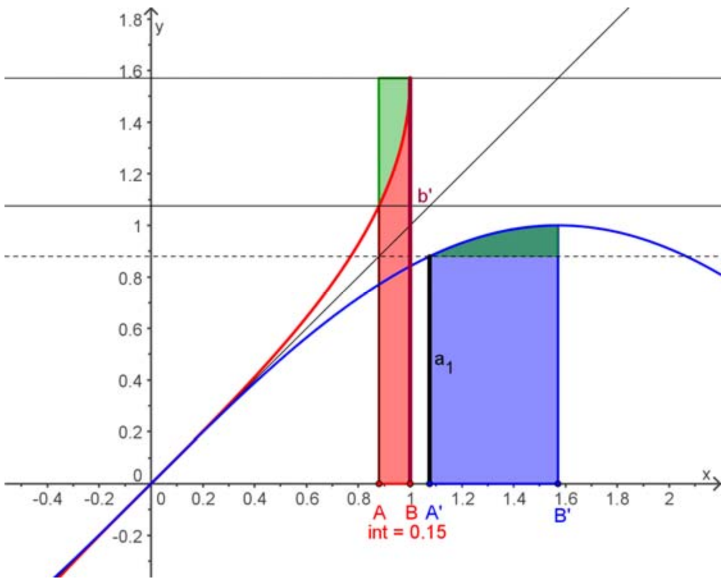
Integration einer Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = g(x) = \arcsin(x)$



Gesucht ist

$$\int_a^b f^{-1}(x)\,dx = \int_a^b \arcsin(x)\,dx$$

und wir versuchen dies zu beschaffen, indem wir ausnutzen, dass wir den Integranden als Umkehrfunktion einer einfacher zu integrierenden Funktion auffassen. Die Sinus-Funktion können wir integrieren.

$A = (a,0);\quad B = (b,0);\ a_1 = a$

$A' = (a',0);\quad B' = (b',0);$

$a' = f^{-1}(a) = \arcsin(a);\quad b' = \arcsin(b)$

Gesucht ist also die rote Fläche. Sie ergibt sich aus Rechteck – grüne Fläche:

$$\int_a^b \arcsin(x)\;dx = (b-a)\cdot b' - \text{grün}$$

Die grüne Fläche rechts ist, weil Funktion und Umkehrfunktion Spiegelbilder voneinander sind, kongruent zu der grünen Fläche oben. Diese ergibt sich aus dem Integral minus dem blauen Rechteck: $\text{grün} = \int_{a'}^{b'} f(x)\;dx - (b'-a')\cdot a$ Zusammen folgt:

$$\int_a^b \arcsin(x)\;dx = (b-a)\cdot b' - \int_{a'}^{b'} f(x)\;dx + (b'-a')\cdot a$$

$$= bb' - ab' + ab' - aa' - \int_{a'}^{b'} f(x)\;dx = bb' - aa' - F(b') - F(a') \quad \text{mit} \quad F'(x) = f(x)$$

Konkret:

$$\int_a^b \arcsin(x)\;dx = b\arcsin(b) - a\arcsin(a) - \cos(\arcsin(b) + \cos(\arcsin(a))$$

$$\{\text{da}\quad F'(x) = \sin(x) = f(x) \quad \text{und} \quad F(x) = -\cos(x)\}$$

$$= \left[\, x\cdot\arcsin(x) - \sqrt{1-x^2} \,\right]_a^b$$

Man musste den Kosinus mit Sinus ausdrücken, damit man den Arcus-Sinus los wird.

Dieses Ergebnis erhält man auch formal durch die Substitution

$x = \sin(y) \Rightarrow \arcsin(x) = y;\ \ dx = \cos(y)\,dy$ und partielle Integration.

$$\int \arcsin(x)dx = \int y\ \cos(y)\,dy = y\sin(y) - \int \sin(y)\,dy = y\sin(y) + \cos(y) + C$$

$$\int \arcsin(x)dx = x\cdot\arcsin(x) + \cos(\arcsin(x)) + C = x\cdot\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C$$
