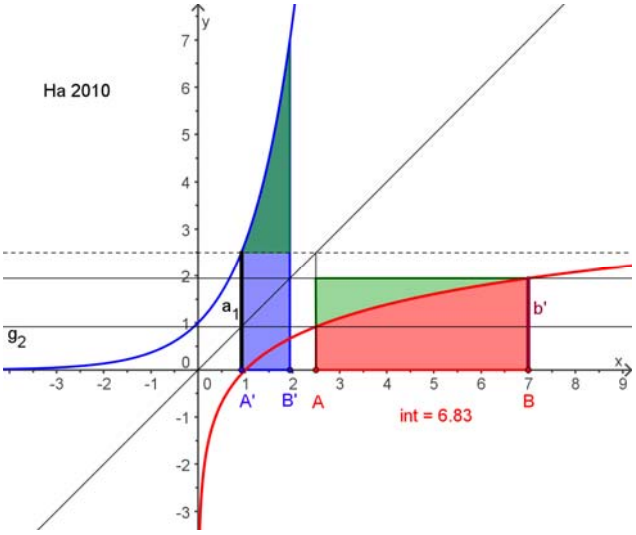
Integration einer Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = g(x) = \ln(x)$



Gesucht ist

$$\int_a^b f^{-1}(x)\,dx = \int_a^b \ln(x)\,dx$$

und wir versuchen dies zu beschaffen, indem wir ausnutzen, dass wir den Integranden als Umkehrfunktion einer einfacher zu integrierenden Funktion auffassen. Die e-Funktion können wir integrieren.

$$A = (a,0);\quad B = (b,0);\ a_1 = a$$

$$A' = (a',0);\quad B' = (b',0);$$

$$a' = f^{-1}(a) = \ln(a);\quad b' = \ln(b)$$

Gesucht ist also die rote Fläche. Sie ergibt sich aus Rechteck – grüne Fläche:

$$\int_a^b \ln(x)\ dx = (b-a)\cdot b' - \text{grün}$$

Die grüne Fläche rechts ist, weil Funktion und Umkehrfunktion Spiegelbilder voneinander sind, kongruent zu der grünen Fläche oben. Diese ergibt sich aus dem Integral minus dem blauen Rechteck: $grün = \int_{a'}^{b'} f(x)\ dx - (b'-a')\cdot a$ Zusammen folgt:

$$\int_a^b \ln(x)\ dx = (b-a)\cdot b' - \int_{a'}^{b'} f(x)\ dx + (b'-a')\cdot a$$

$$= bb' - ab' + ab' - aa' - \int_{a'}^{b'} f(x)\ dx = bb' - aa' - F(b') - F(a') \quad \text{mit} \quad F'(x) = f(x)$$

Konkret:

$$\int_a^b \ln(x)\ dx = b\ln(b) - a\ln(a) - b + a \quad \text{da} \quad F'(x) = e^x = f(x) \quad \text{und} \quad F(x) = e^x$$

$$= \left[x\cdot\ln(x) - x\right]_a^b$$

Dieses Ergebnis erhält man auch formal durch die Substitution

$x = e^y \Rightarrow \ln(x) = y;\ dx = e^y dy$ und partielle Integration.

$$\int \ln(x)dx = \int y\ e^y\ dy = y\,e^y - \int e^y\ dy = y\,e^y - e^y + C = \ln(x)\cdot x - x + C$$

Mit partieller Integration geht es auch direkt mit einem hinzugefügten Faktor 1

$$\int \ln(x)dx = \int 1\cdot\ln(x)dx = x\ln(x) - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln(x) - \int 1dx = \ln(x)\cdot x - x + C$$

Allgemein gilt

$$\boxed{\int_a^b f^{-1}(x)\ dx = \left[x\cdot f^{-1}(x) - F(f^{-1}(x))\right]_a^b \ \text{mit}\ F'(y) = f(y) = x\ \text{und}\ f^{-1}(f(y)) = y}$$