Es geht um "gebrochen-rationale Funktionen" f mit $\boxed{f(x)=\frac{p_n(x)}{q_m(x)}}$,

d.h. um einen Bruchterm aus Polynomen .

Polynom n-ten Grades $p_n(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x + a_0 \; mit\, a_n \neq 0$

Es gibt viele mathematische Zusammenhänge (Integration, Laplace-Transformation u.a.), in denen man einen solchen Funktionsterm nicht gut weiterverwenden kann. Man zerlegt ihn daher in eine Summe aus einen "ganz-rationalen" Anteil und einfachen Teil-Brüchen, man macht eine

"Partialbruchzerlegung": $f^*(x)=\frac{x^4-4x^3-6x^2+4x+5}{x^4-x^3-6x^2}$

Schritt 1: falls der Nennergrad m nicht größer ist als der Zählergrad, $m \le n$

Durch algebraische Division sorgt man dafür, dass der Zählergrad kleiner ist als der Nennergrad.

$f^*(x)=1-\frac{-3x^3+4x+5}{x^4-x^3-6x^2}$ Im folgenden sei der Zählergrad kleiner als der Nennergrad.

Schritt 2: $f(x)=\frac{Zählerpolynom}{Nennerpolynom}=\frac{-3x^3+4x+5}{x^4-x^3-6x^2}$, man bestimmt die Nullstellen des Nenners und zerlegt ihn vollständig in Faktoren der Bauart $(x-x_0)^r$ oder $\left(x^2+px+q\right)^r$

Die Zahl r nennt man "Vielfachheit". Ein quadratischer Term entsteht aus einem Paar konjugiert-komplexer Nullstellen. $x^4-x^3-6x^2=x^2(x+2)(x-3)$

Eine einfache Nullstelle erzeugt einen Summanden der Bauart $\frac{A}{(x-x_0)}$

Eine r-fache Nullstelle erzeugt r Summanden $\frac{B_1}{(x-x_1)}+\frac{B_2}{(x-x_1)^2}+...+\frac{B_r}{(x-x_1)^r}$

Eine einfacher quadratischer Term ohne Nullstelle erzeugt $\frac{Cx+D}{\left(x^2+px+q\right)}$, r>1 entspr.

Schritt 3: Ansatz für die Partialbruchzerlegung

$$\frac{Zählerpolynom}{Nennerpolynom}=\frac{-3x^3+4x+5}{(x+2)x^2(x-3)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x^2}+\frac{D}{x-3}$$

Schritt 4: Multiplikation mit dem ganzen Nenner ergibt:

$$-3x^3+4x+5=Ax^2(x-3)+B(x+2)x(x-3)+C(x+2)(x-3)+D((x+2)x^2$$

Schritt 5: Nun setz man nacheinander die Nennernullstellen ein. Das liefert sofort einige der gesuchten Kostanten, hier sind das A,C,D. Die fehlenden bestimmt man aus beliebigen Einsetzungen, hier B z.B. mit x=1.

Schritt 6:

Die nun entstandenen Terme kann integrieren oder für die Laplace-Rücktransformation verwenden.

Wieder gibt ein CAS alles sofort auf "Knopfdruck" hier MuPAD

```
partfrac(zz/nn)
```

$$1-\frac{5}{6\cdot x^2}-\frac{21}{20\cdot(x+2)}-\frac{64}{45\cdot(x-3)}-\frac{19}{36\cdot x}$$