Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Dezember 02

Bestimmtes Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a) \quad mit \quad F'(x) = f(x)$$

Faktorregel außen $\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx$, **man kann eine Konstante vorziehen.**

Faktorregel innen $\int_a^b f(k \cdot x)\,dx = \frac{1}{k} \cdot F(k \cdot x) \;\; mit \;\; F'(x) = f(x)$,

Kehrwert von k kommt nach vorne, in der Stammfunktion innen bleibt k bei x ,

Summenregel $\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$ **Summen kann man einzeln integrieren.**

Verschieberegel $\int_a^b f(x-t)\,dx = [F(x-t)]_a^b \;\; mit \;\; F'(x) = f(x)$, **ist f waagerecht verschoben, so auch F.**

Intervall aufteilen $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \int_b^c f(x)\,dx$, **Grenzen umdrehen** $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

Tabelle 1: Grund- oder Stammintegrale $\int f(x)\,dx$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} \arcsin x + C_1 \\ -\arccos x + C_2 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \begin{cases} \arctan x + C_1 \\ -\operatorname{arccot} x + C_2 \end{cases}$$

$$\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2 x}\,dx = \tanh x + C$$

$$\int \frac{1}{\sinh^2 x}\,dx = -\coth x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \operatorname{arsinh} x + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{arcosh} x + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C \qquad (|x| > 1)$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \begin{cases} \operatorname{artanh} x + C_1 = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + C_1 & |x| < 1 \\ & \text{für} \\ \operatorname{arcoth} x + C_2 = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} + C_2 & |x| > 1 \end{cases}$$

Typ (A) ist lediglich eine Zusammenfassung der "Faktor innen"-Regel und der Verschieberegel.

Beispiele, $\int \sin(3x-12)\, dx = -\frac{1}{3}\cos(3x-12)$, $\int e^{3x-12}\, dx = \frac{1}{3} e^{3x-12}$

Typ (B) und (C) sind Spezialfälle des umfassenderen Typs:

f' erscheint:	$\int g(f(x))\bullet f'(x)\,dx = G(f(x))$ mit $G'(z) = g(z)$

Beispiel $\int \cos(x^5)\bullet 5x^4\, dx = \sin(x^5)$ denn $\sin'(z)=\cos(z)$, es ist $z = f(x) = x^5$,**Umkehrung der Kettenregel**

Typ (B) $\int \sin(x)\bullet\cos(x)\,dx = \frac{1}{2}\sin^2(x)$ denn $z = f(x) = \sin(x)$; $f'(x) = \cos(x)$; $g(z) = z$; $G(z) = \frac{1}{2}z^2$

Jedes CAS liefert Ihnen auf "Knopfdruck" sofort alle Integrale, die nach solchen Regeln gelöst werden können. Und noch viel mehr Integrale!!!!!! Eingabe und Ausgabe in MuPAD:

```
• int(sin(3*x-12), x)
```

$-\frac{\cos(12-3\cdot x)}{3}$

Tabelle 2: Integralsubstitutionen

Integraltyp	Substitution	Lösung	Beispiele	
(A) $\int f(ax+b)dx$	$u = ax+b$ $du = a\,dx$ $dx = \frac{du}{a}$		1. $\int(2x-3)^6 dx$ 2. $\int\sqrt{4x+5}\,dx$ 3. $\int e^{4x+2}dx$	$(u = 2x-3)$ $(u = 4x+5)$ $(u = 4x+2)$
(B) $\int f(x)\cdot f'(x)dx$	$u = f(x)$ $du = f'(x)\,dx$ $dx = \frac{du}{f'(x)}$	$\frac{1}{2}f^2(x)+C$	1. $\int \sin x\cdot\cos x\,dx$ 2. $\int\frac{\ln x}{x}dx$	$(u = \sin x)$ $(u = \ln x)$
(C) $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx$	$u = f(x)$ $du = f'(x)\,dx$ $dx = \frac{du}{f'(x)}$	$\ln\lvert f(x)\rvert + C$	1. $\int\frac{2x-3}{x^2-3x+1}dx$ 2. $\int\frac{e^x}{e^x+5}dx$	$(u = x^2-3x+1)$ $(u = e^x+5)$
(D) $\int f(x;\sqrt{a^2-x^2})dx$	$x = a\cdot\sin u$ $dx = a\cdot\cos u\,du$ $\sqrt{a^2-x^2} = a\cdot\cos u$		1. $\int\sqrt{r^2-x^2}\,dx$ 2. $\int x\sqrt{r^2-x^2}\,dx$ 3. $\int\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx$	$(x = r\cdot\sin u)$ $(x = r\cdot\sin u)$ $(x = 2\cdot\sin u)$
(E) $\int f(x;\sqrt{x^2+a^2})dx$	$x = a\cdot\sinh u$ $dx = a\cdot\cosh u\,du$ $\sqrt{x^2+a^2} = a\cdot\cosh u$		1. $\int\sqrt{x^2+1}\,dx$ 2. $\int\frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$	$(x = \sinh u)$ $(x = 2\cdot\sinh u)$
(F) $\int f(x;\sqrt{x^2-a^2})dx$	$x = a\cdot\cosh u$ $dx = a\cdot\sinh u\,du$ $\sqrt{x^2-a^2} = a\cdot\sinh u$		1. $\int\sqrt{x^2-9}\,dx$ 2. $\int\frac{x}{\sqrt{x^2-25}}dx$	$(x = 3\cdot\cosh u)$ $(x = 5\cdot\cosh u)$