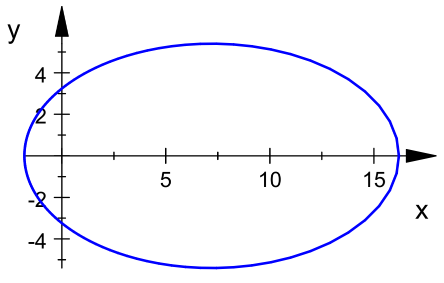
Kleine Rechnenaufgaben mit Polar und Parametern

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Juni 09 Update 25.06.09
www.mathematik-verstehen.de http://haftendorn.uni-lueneburg.de

###

Ellipsenfläche

```
plot(plot::Polar([1.8^2/(1-0.8*cos(t)),t],t=0..2*PI))
```



A aus der Polardarstellung in Brennpunktlage

```
int(1.8^2/(1-0.8*cos(t))^2,t=0..PI)
```

47.1238898

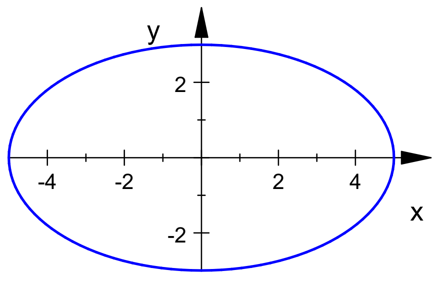
Test mit bekannter Formel

```
float(PI*5*3)
```

47.1238898

B mit der Parameterdarstellung

```
x:=t->a*cos(t):
y:=t->b*sin(t):
plot(plot::Curve2d([x(t),y(t)]|{a=5,b=3},t=0..2*PI))
```




```
hold(4/2*int(y'(t)*x(t)-y(t)*x'(t),t));
(4/2*int(y'(t)*x(t)-y(t)*x'(t),t));
(4/2*int(y'(t)*x(t)-y(t)*x'(t),t=0..PI/2))
```

$$2 \cdot \int (y'(t) \cdot x(t) - y(t) \cdot x'(t)) \, dt$$

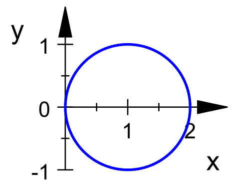
$$2 \cdot a \cdot b \cdot t$$

$$\pi \cdot a \cdot b$$

Achtung mit dieser Flächenformel berechnet man die Flächen,
die einer Polardarstellung entsprechen!!!!!!
Also ergibt sich die von einem Fahrstrahl überstrichene Fläche.

Also ergibt sich die von einem Fahrstrahl überstrichene Fläche.

```
plot(plot::Polar([2*cos(t),t],t=0..PI))
```




```
r:=t->2*R*cos(t);
```

$$t \rightarrow 2 \cdot R \cdot \cos(t)$$

Nun berechne ich das Kreissegment über der Wh
auf zwei Arten:
Mit Polardarstellung

```
1/2*int(r(t)^2, t);
r(t)^2;
1/2*int(r(t)^2, t=PI/4..PI/2)
```

$$\frac{R^2 \cdot (2 \cdot t + \sin(2 \cdot t))}{2}$$

$$4 \cdot R^2 \cdot \cos(t)^2$$

$$\frac{R^2 \cdot (\pi - 2)}{4}$$

mit Parameterdarstellung

```
x:=t->2*R*cos(t)^2:
y:=t->2*R*cos(t)*sin(t):
hold(1/2*int(y'(t)*x(t)-y(t)*x'(t),t));
Simplify(y'(t)*x(t)-y(t)*x'(t));
(1/2*int(y'(t)*x(t)-y(t)*x'(t),t));
(1/2*int(y'(t)*x(t)-y(t)*x'(t),t=PI/4..PI/2))
```

$$\frac{\int (y'(t) \cdot x(t) - y(t) \cdot x'(t)) \, dt}{2}$$

$$4 \cdot R^2 \cdot \cos(t)^2$$

$$\frac{R^2 \cdot (2 \cdot t + \sin(2 \cdot t))}{2}$$

$$\frac{R^2 \cdot (\pi - 2)}{4}$$

Beide Male kommt heraus: Viertelkreis minus Dreieck, ok
##

Bogenlänge der Kardioide

Bogenlänge der Kardioide

```
B:=1/2*int(sqrt(r'(t)^2+r(t)^2),t)
```

$$\frac{\int \sqrt{r(t)^2 + r'(t)^2}\, dt}{2}$$

```
r:=t->cos(t)+1; r'(t)
```

$$t \to \cos(t) + 1$$

$$-\sin(t)$$

```
expand(r'(t)^2+r(t)^2)
```

$$\cos(t)^2 + 2 \cdot \cos(t) + \sin(t)^2 + 1$$

Integrand von Hand

```
2*sqrt(2)*int(sqrt(cos(t)+1), t)
```

$$\frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(t)}{\sqrt{\cos(t) + 1}}$$

Achtung, in dieses Integral kann man die obere Grenze nicht einsetzen, l'Hospital geht auch nicht.
Man muss sin als cos-term mit Wurzel schreiben um weiterzukommen.

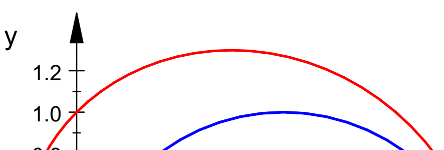
```
2*sqrt(2)*int(sqrt(cos(t)+1), t=0..PI)
```

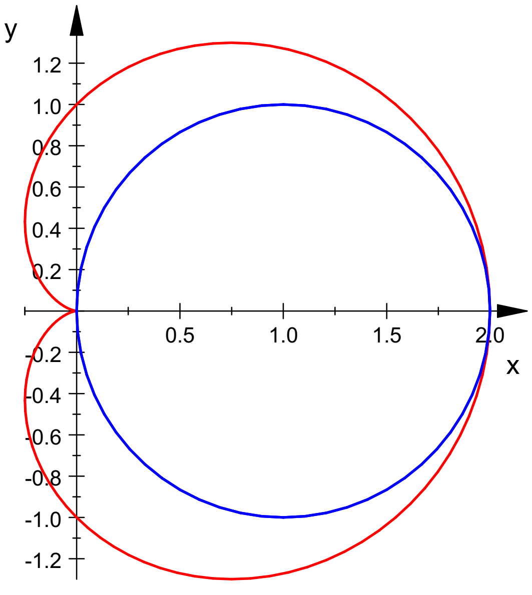
$$8$$

```
kardi:=plot::Polar([cos(t)+1,t],t=0..2*PI,LineColor=[1,0,0]);
kr:=plot::Polar([2*cos(t),t],t=0..2*PI);
plot(kardi,kr)
```

$$\text{plot::Polar}([\cos(t) + 1,\ t],\ t = 0\ ..2 \cdot \pi)$$

$$\text{plot::Polar}([2 \cdot \cos(t),\ t],\ t = 0\ ..2 \cdot \pi)$$





Vergleichskreis blau hat Umfang 2*PI= 6,3...
passt zu 8 bei der Kardioide