

# Bogenlänge und Fläche der Rosette

Prof. Dr. Dörte Haftendorn: Mathematik mit MuPAD 4 (es ex. in Version 3), Mrz. 06  
Update 20.08.07

[www.mathematik-verstehen.de](http://www.mathematik-verstehen.de)

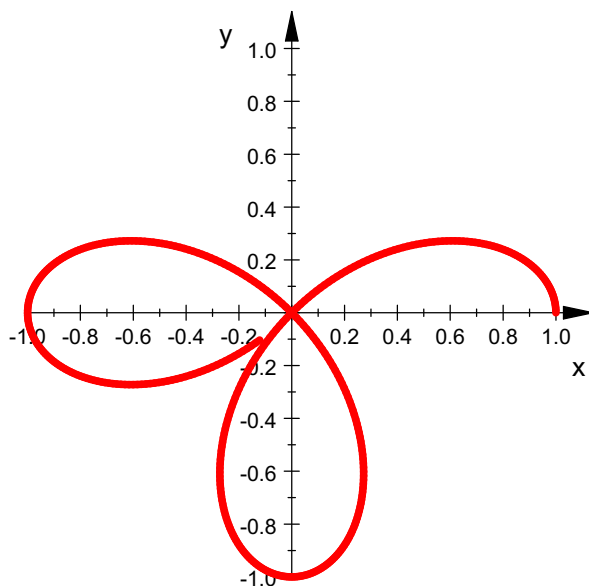
<http://haftendorn.uni-lueneburg.de>

Es existiert noch die alte Version in MuPAD 2.5 (zur Not) von Mai 04

Kosinus-Rosette (Sinus-Rosette unten)

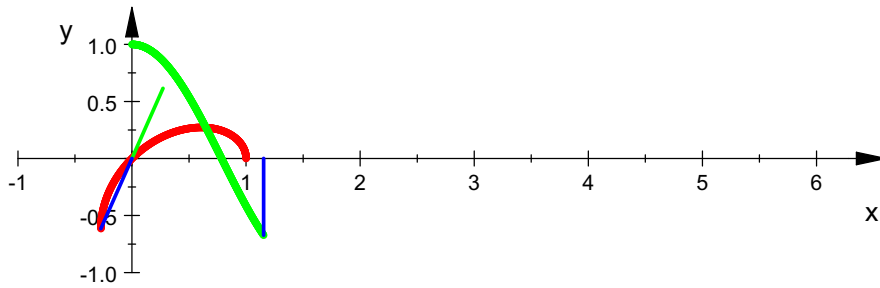
```
r:=t->cos(2*t);  
rosette:=plot::Polar([r(t),t],t=0..ende,ende=0..2*PI,  
    LineWidth=1,LineColor=[1,0,0], Mesh=400):  
plot(rosette);
```

$t \rightarrow \cos(2 \cdot t)$



**animieren durch Anklicken!**

```
pkt:=plotPoint2d([r(t),t],t=0..ende,ende=0..2*PI,PointSize=1.1):  
rosettekart:=plot::Curve2d([t,r(t)],t=0..ende,ende=0..2*PI,  
    LineWidth=1, Mesh=400, LineColor=RGB::Green):  
radius2:=plot::Line2d([0,0],[r(t)*cos(t),r(t)*sin(t)],t=0..2*PI,  
    LineWidth=0.5):  
radiusbetrag2:=plot::Line2d([0,0],[abs(r(t))*cos(t),abs(r(t))*sin(t)],  
    t=0..2*PI,LineColor=[0,1,0]):  
radiusordi2:=plot::Line2d([t,0],[t,r(t)],t=0..2*PI):  
plot(rosette,radiusbetrag2,radius2,rosettekart,radiusordi2,LineWidth=0.5,  
    AnimationStyle=BackAndForth);
```



[animieren durch Anklicken!](#)

Weiteres zur polar-kartesischen Darstellung auf Extraseite

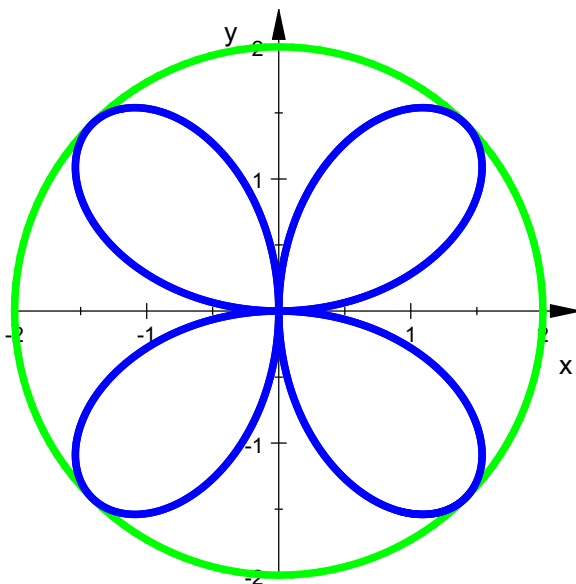
#####

Implizite Gleichung der Rosette (aus dem Bereich Kurven->Terme)  
oder aus der einfachen Polargleichung (s.u.) leicht herleitbar.

$$\text{rosettegl} := (x^2 + y^2)^3 = c^2 \cdot x^2 \cdot y^2$$

$$(x^2 + y^2)^3 = 16 \cdot x^2 \cdot y^2$$

```
c:=4:rosimp:=plot::Implicit2d(rosettegl,x=-2..2,y=-2..2):
kreis:=plot::Polar([c/2,phi],phi=0..2*PI, LineColor=RGB::Green):
plot(kreis,rosimp,Scaling=Constrained, LineWidth=1);delete(c):
```



[animieren durch Anklicken!](#)

$c$ =Durchmesser des Umkreises, unten  $a$ :=Radius= $c/2$

Man kann das von Hand nicht nach  $y$  auflösen, darum ist die Darstellung in Polarkoordinaten besser.

```
solve(rosette,y)
```

2

$$\{\sqrt{z} \mid z \in \text{RootOf}(X1^3 + 3 \cdot X1^2 \cdot x^2 - X1 \cdot (-x^4 \cdot 3 + c^2 \cdot x^2) + x^6, X1)\} \cup \{-\sqrt{z} \mid z \in \text{Ro}$$

```
solve((xx+yyy)^3=c^2*xx*yy,yy)
```

```
solve((xx+yyy)^3=c^2*xx*yy,yy)
```

$$\left\{ \begin{array}{ll} \left\{ \frac{(xx+yyy)^3}{c^2 \cdot xx} \right\} & \text{if } c \neq 0 \wedge xx \neq 0 \\ \emptyset & \text{if } xx + yyy \neq 0 \wedge (c = 0 \vee xx = 0) \\ \mathbb{C} & \text{if } xx + yyy = 0 \wedge (c = 0 \vee xx = 0) \end{array} \right.$$

Wie man es auch versucht, es kommt nichts heraus.

## Arbeit in Polarkoordinaten

Polargleichung der Rosette (experimentell gefunden oder aus dem Bereich Kurven->Terme)

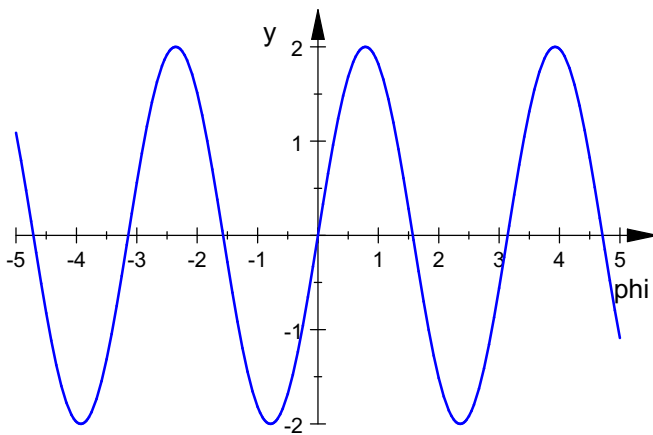
oder aus der impliziten Gleichung der Rosettengleichung (s.o.) leicht herleitbar.

```
r:=phi->(a*sin(2*phi))
```

$$\text{phi} \rightarrow a \cdot \sin(2 \cdot \text{phi})$$

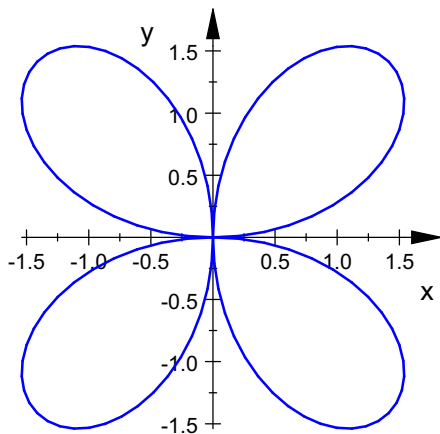
```
a:=2:
```

```
plotfunc2d(r(phi))
```



Das ist also eine einfache Sinuskurve, Amplitude 2, Kreisfrequenz 2.

```
rg:=plot::Polar([r(phi),phi],phi=0..2*PI):plot(rg)
```



```
delete(a):
```

```
diff(r(phi),phi)
```

$$2 \cdot a \cdot \cos(2 \cdot \text{phi})$$

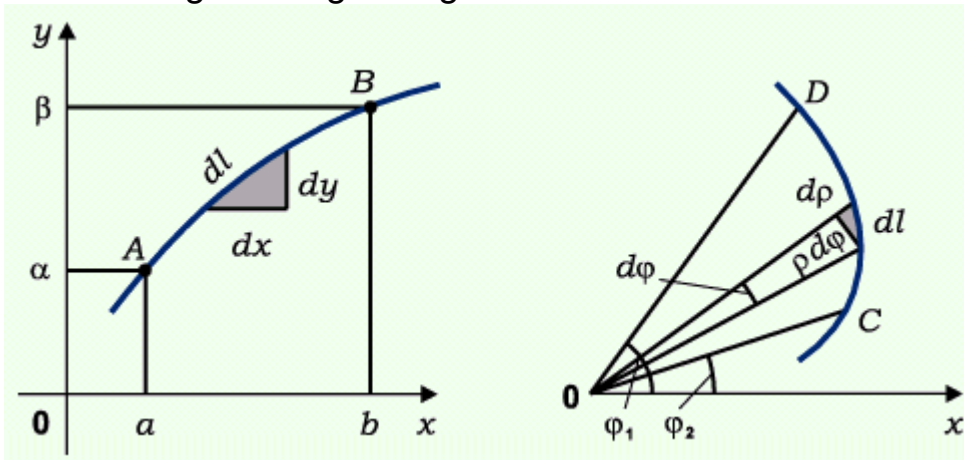
Term für die kleine Bogenlängenänderung  $ds=d|$

```
sqrt(r(phi)^2+diff(r(phi),phi)^2)
```

$$\sqrt{4 \cdot a^2 \cdot \cos(2 \cdot \text{phi})^2 + a^2 \cdot \sin(2 \cdot \text{phi})^2}$$

$$\sqrt{4 \cdot a^2 \cdot \cos(2 \cdot \text{phi})^2 + a^2 \cdot \sin(2 \cdot \text{phi})^2}$$

Berechnung der Bogenlänge



```
int(sqrt(r(phi)^2+4*a^2*cos(2*phi)^2), phi)
```

$$\int \sqrt{4 \cdot a^2 \cdot \cos(2 \cdot \text{phi})^2 + a^2 \cdot \sin(2 \cdot \text{phi})^2} d \text{phi}$$

Das Integral ist zu schwierig zu berechnen, es gibt keine Stammfunktion.

Einstzen von a=2 bringt auch nichts.

Das bestimmte Integral funktioniert daher auch nicht exakt.

```
int(sqrt(r(phi)^2+16*cos(2*phi)^2), phi=0..PI/2)
```

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \cdot \sin(2 \cdot \text{phi})^2 + 16 \cdot \cos(2 \cdot \text{phi})^2} d \text{phi}$$

Numerische Integration hilft da weiter (mit a=2):

```
b1:=numeric::int(sqrt((2*sin(phi))^2+16*cos(2*phi)^2), phi=0..PI/2)
4.714715648
```

Das ist also die Bogenlänge eines Blattes.

Die ganze Rosette:

```
4*b1
18.85886259
```

Sie ist etwa 6 PI lang, der Kreis hat einen Umfang von 2 PI

## Fläche der Rosette

Die folgende Formel macht man sich klar, indem man das kleine Tortenstück betrachtet, das von der kleinen Winkeländerung d phi und dem Radius r gebildet wird, Dann wird über alle Tortenstückchen summiert, das heißt es wird integriert.

```
int(1/2*r(phi)^2, phi)
```

$$-\frac{a^2 \cdot (\sin(4 \cdot \text{phi}) - \text{phi} \cdot 4)}{16}$$

4

```
delete(a):
frosette:=1/2*int(r(phi)^2, phi=0..PI/2)
```

$$\frac{\pi \cdot a^2}{8}$$

$$\frac{\pi \cdot a^2}{8}$$

subs(%, a=2)

$$\frac{\pi}{2}$$

Das ist die Fläche eines Blattes bei Radius 2.

Die Fläche der Rosette bei Radius a ist also

**4\*frosette**

$$\frac{\pi \cdot a^2}{2}$$

Sie nimmt also genau die Hälfte des Umkreises ein.