Fourier-Reihen Rechteckschwingung

Prof. Dr. Dörte Haftendorn: Mathematik mit MuPAD 4, Sept 07   Update 14.05.08
Web: http://haftendorn.uni-lueneburg.de   www.mathematik-verstehen.de

###

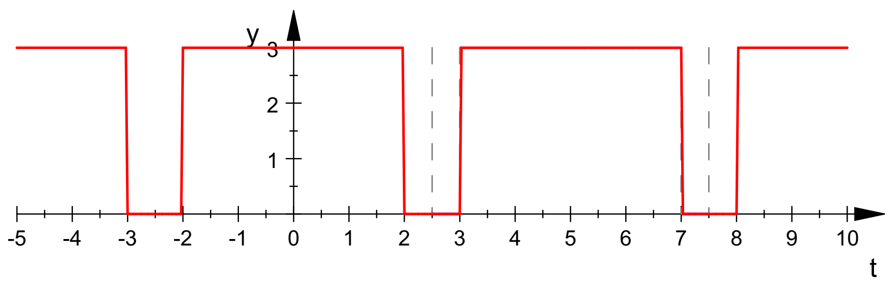
Dateiname fourier-reihen-rechteck.mn

Angabe der Funktion fH in der Hauptperiode.
Definition von f als periodische Funktion.

Achtung: eine volle Periode **im Positiven** als Hauptfunktion beschreiben!

```
Ta:=2.5:Ti1:=3:Ti2:=7: Te:=7.5:
fH:=t--> piecewise([Ta<=t and t<Ti1,0],
          [Ti1<=t and t<=Ti2,3],[Ti2<=t and t<=Te,0]) :
f:=t->fH(frac((t-(Te-Ta)/2)/(Te-Ta))*(Te-Ta)+(Te-Ta)/2):
```

```
plotfunc2d(fH(t), f(t), t=-5..10,
   Scaling=Constrained, LegendVisible=FALSE)
```



Definitionen von Feldern für die Koeffizienten,
übliche Festlegungen T Periode, om =omega= Kreisfrequenz.

```
n:=10:
a:=array(0..10):     b:=array(1..10):
T:=5:
om:=2*PI/T:
```

Das Verschiebungsglied kann oft auch elementargeometrisch bestimmt werden.
Hier als Dreieck g=4, h=6 -> F=12 und 2/T=2/4=1/2

```
a[0]:=2/T*int(fH(t),t=Ta..Te)
```

$$\frac{24}{5}$$

So kann man nur die anderen Koeffizienten berechnen.

```
a[1]:=Simplify(2/T*int(fH(t)*cos(1*om*t),t=Ta..Te));
b[1]:=2/T*int(fH(t)*sin(1*om*t),t=Ta..Te);
```

$$\frac{3\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\cdot\pi}$$

$$0$$

$$0$$

Automatische Berechnung von n Schwingungen

```
for k from 1 to 10 do
    a[k]:=2/T*int(fH(t)*cos(k*om*t),t=Ta..Te);
    b[k]:=0: /*2/T*int(fH(t)*sin(k*om*t),t=Ta..Te);*/
end_for:
```

For-Schleifen haben keine Ausgaben. Ausgabe folgt. Vereinfachen muss extra gefordert werden.

```
[Simplify(a[k]),Simplify( b[k])] $ k=1..n
```

$$\left[\frac{3\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\cdot\pi}, 0\right], \left[-\frac{3\cdot\sqrt{2\cdot\sqrt{5}+10}}{4\cdot\pi}, 0\right], \left[\frac{\sqrt{2\cdot\sqrt{5}+10}}{2\cdot\pi}, 0\right], \left[-\frac{3\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}{8\cdot\pi}\right.$$

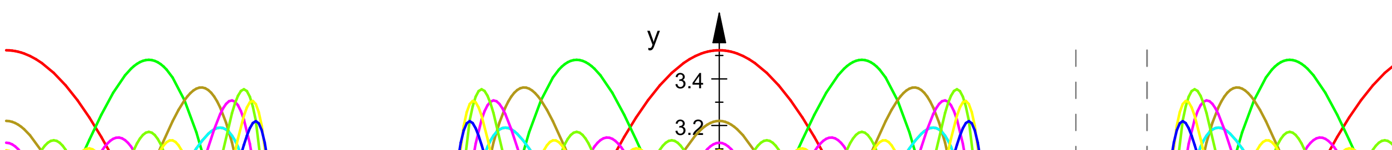
Wenn man mit so einem Werkzeug arbeitet, braucht man über die Gesetzäßigkeit in den Ausgaben nicht nachzudenken. Falls nötig, könnte man es schaffen.
Im Folgenden wird die Summe bis Ordnung n gebildet.

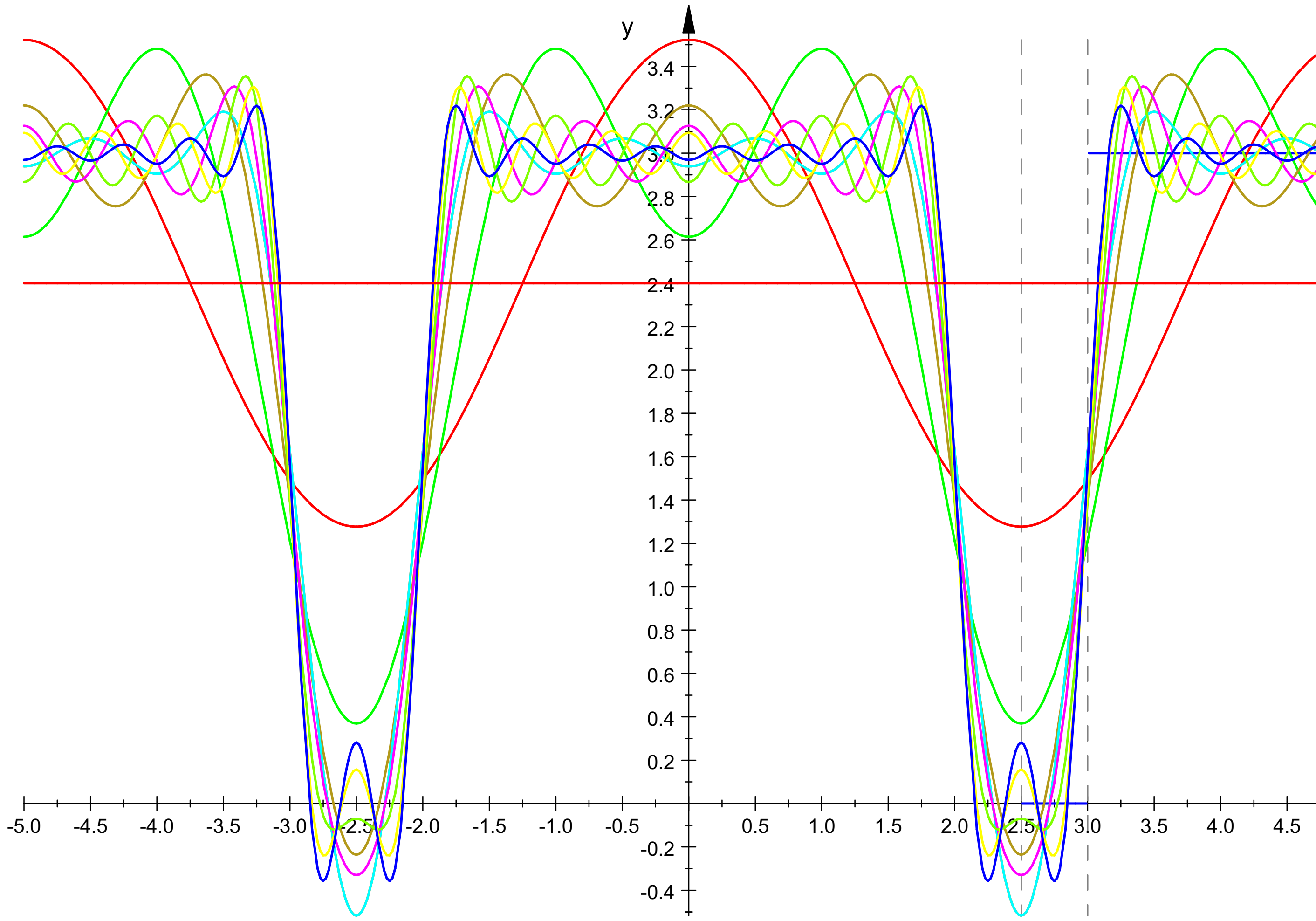
```
su:=(t,n)->a[0]/2+_plus((a[k]*cos(k*om*t)+b[k]*sin(k*om*
t)) $ k=1..n);
```

$$(t,\ n) \rightarrow \frac{a_0}{2} + \_plus(a_k\cdot\cos(k\cdot om\cdot t) + b_k\cdot\sin(k\cdot om\cdot t)\ \$\ k = 1\ ..n)$$

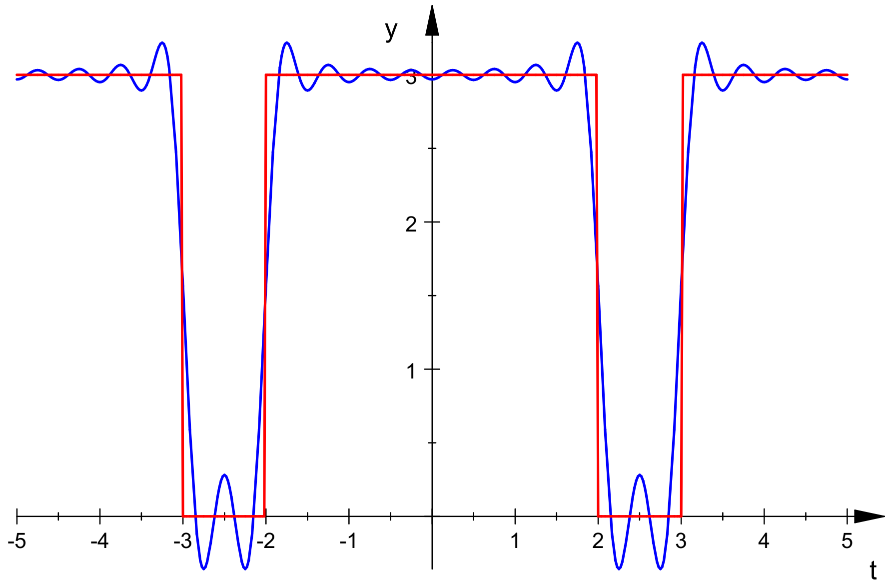
Die Grundschwingung und ihre Achse ist deutlich.

```
plotfunc2d(fH(t),su(t,n) $
n=1..10,a[0]/2,LegendVisible=FALSE)
```




```
plotfunc2d(su(t,10),f(t), LegendVisible=FALSE)
```



Die Reihen mit 10 Doppeltermen ist von der gegebenen Funktion noch deutlich zu unterscheiden.

###

Vergleich mit der Handrechnung, Bronsteinformel und meiner Folie

$$a_k = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cos(k\omega t)\,dt$$

Speziell $f(t) = c$

$$= \frac{2}{T}\cdot c\int_{-a}^{a}\cos k\omega t\,dt + 0$$

$$= \frac{2}{T}\,c\,\frac{1}{k\omega}\left[\sin k\omega t\right]_{-a}^{a} = \frac{2c}{Tk\omega}\left(\sin(k\omega a) - \sin(k\omega(-a))\right)$$

$$= \frac{2}{T}\,c\,\frac{1}{k\omega}\cdot 2\sin(k\omega a) = \frac{2c}{k\pi}\sin(k\omega a) \quad \text{mit } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Speziell $a=2$ $c=3$

$$a_k = \frac{6}{k\pi}\sin\left(\frac{4k\pi}{T}\right) = \frac{6}{2\pi}\sin\left(\frac{4k\pi}{5}\right)$$

$T=5$

Fourierterm(k) $= \frac{6}{2\pi}\sin\left(\frac{4k\pi}{5}\right)\cdot\cos\frac{2\pi k}{5}t$

```
for k from 1 to 10 do
   c[k]:=6/k*PI*sin(4*k*PI/5);
   d[k]:=0;
end_for:
simplify(c[k]) $ k=1..5
```

$$\frac{3\cdot\pi\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2},\ -\frac{3\cdot\pi\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt{5}+5}}{4},\ \frac{\pi\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt{5}+5}}{2},\ -\frac{3\cdot\pi\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5-\ldots}}{8}$$

Die Wurzeln erscheinen, weil sie 5-Teilung des Vollwinkels Winkels konstruiert werden kann.
Mit Siebenteln ginge es nicht.

```
for k from 1 to 10 do
   c[k]:=6/k*PI*sin(4*k*PI/7);
   d[k]:=0;
end_for:
simplify(c[k]) $ k=1..2
```

$$6\cdot\pi\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi}{7}\right),\ -3\cdot\pi\cdot\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$$