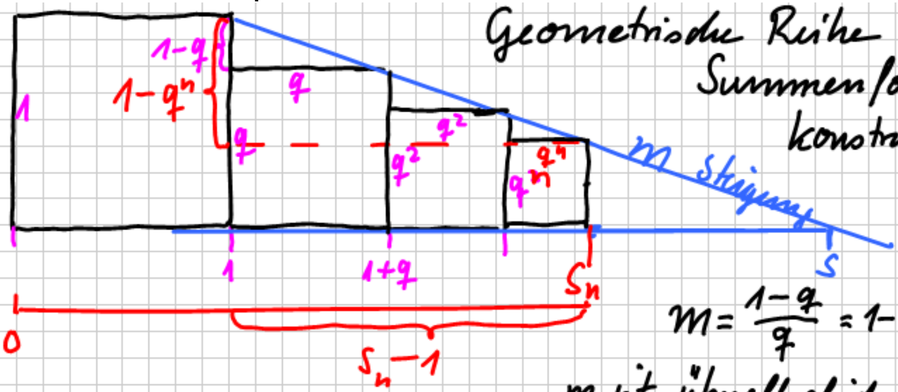
Diese Visualisierung eignet sich sehr gut, das Phänomen der unendlichen Summen überhaupt einzuführen.

Geometrische Reihe
Summenformel mit konstruktivem Beweis



$$m = \frac{1-q}{q} = 1 - \frac{1}{q}$$

m ist überall gleich $m_2 = \frac{q-q^2}{q^2} = \frac{q(1-q)}{q \cdot q} = \frac{1-q}{q}$ usw

Also $m = \frac{1-q}{q} = \frac{1-q^n}{S_n - 1}$

$$(1-q)(S_n - 1) = q(1-q^n)$$
$$(1-q)S_n - 1 + q = q - q^{n+1}$$
$$(1-q)S_n = 1 - q^{n+1}$$
$$\boxed{S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

$a_0 = 1$

a_0 allg $\Rightarrow S_n = a_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Bestimmung von s ohne Grenzprozess

$$m = \frac{1-q}{q} = \frac{1}{s-1}$$
$$s - 1 = \frac{q}{1-q}$$
$$s = \frac{q+1-q}{1-q}$$

$\xrightarrow{n \to \infty}$ $\boxed{s = \frac{1}{1-q}}$

a_0 allg $s = a_0 \frac{1}{1-q}$

2/2

Geom. Reihe

Beweis mit vollständiger Induktion

Notiztitel 14.11.200

a_0; $a_n = a_{n-1} \cdot q$ geom Folge a_0; $a_1 = a_0 \cdot q$ $a_n = a_0 q^n$

$S_0 = a_0$ $S_n = S_{n-1} + a_n$ rekursiv explizit

Behauptung $\boxed{S_n = a_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$ Es folgt $S_n \xrightarrow{n\to\infty} a_0 \frac{1}{1-q}$ für $|q|<1$

Beweis mit vollst. Ind.

IV $n=0$ $S_0 = a_0 \frac{1-q}{1-q} = a_0$ ok $S_1 = a_0 \frac{1-q^2}{1-q} = a_0 \frac{(1-q)(1+q)}{1-q} = a_0(1+q)$ ok

IA S_n-Formel gilt Ziel $S_{n+1} = a_0 \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$

$n \curvearrowright n+1$

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \underset{\text{IA}}{=} \frac{a_0}{1-q}(1-q^{n+1}) + a_0 q^{n+1}$$
$$= \frac{a_0}{1-q}\left(1 - q^{n+1} + (1-q)q^{n+1}\right)$$
$$= \frac{a_0}{1-q}\left(1 - q^{n+1} + q^{n+1} - q^{n+2}\right)$$
$$= \frac{a_0}{1-q}\left(1 - q^{n+2}\right) = a_0 \frac{1-q^{n+2}}{1-q} \quad \text{q.e.d.}$$

1